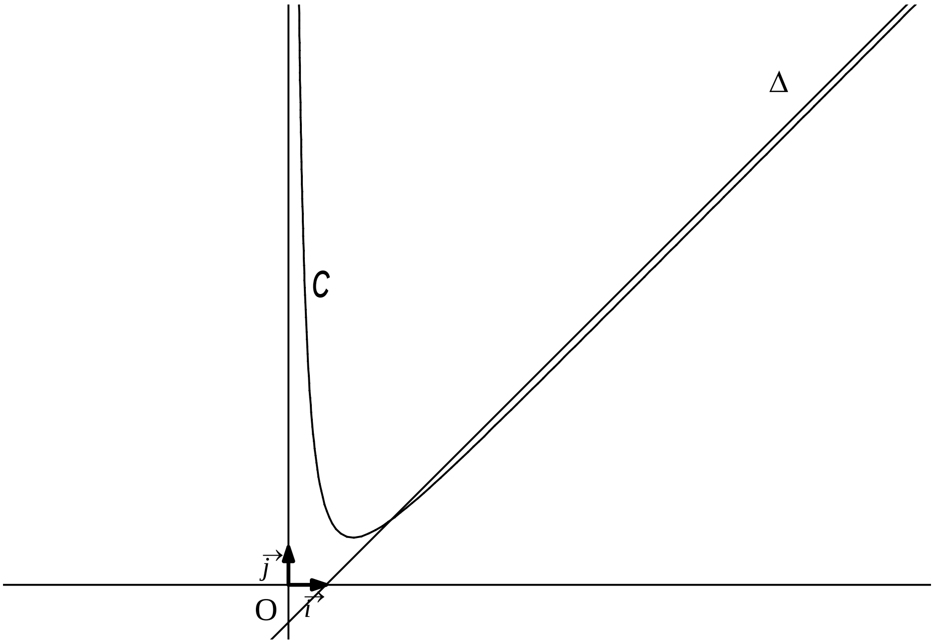
$1^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les limites (3)

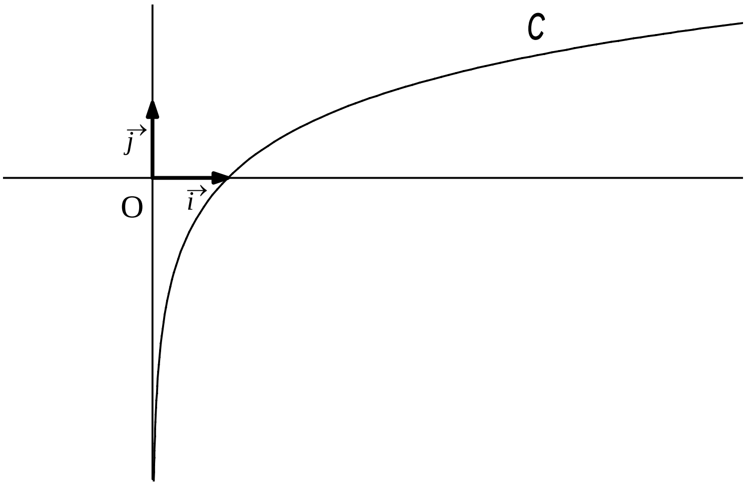
$\boxed{1}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Dire si :
- l'axe des ordonnées semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$;
- la droite Δ semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



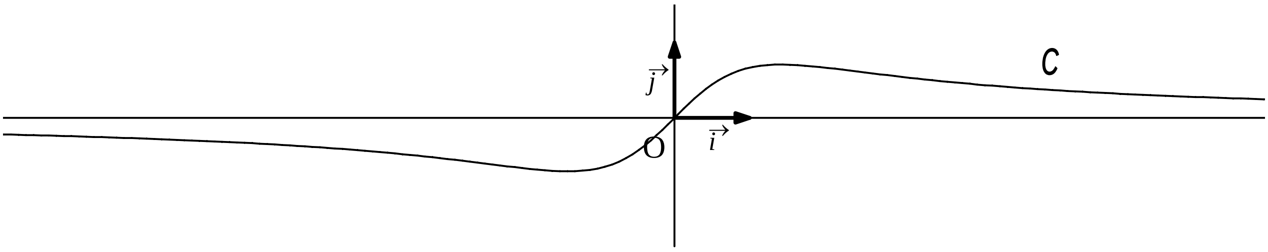
$\boxed{2}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Dire si :
- l'axe des abscisses semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$;
- l'axe des ordonnées semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



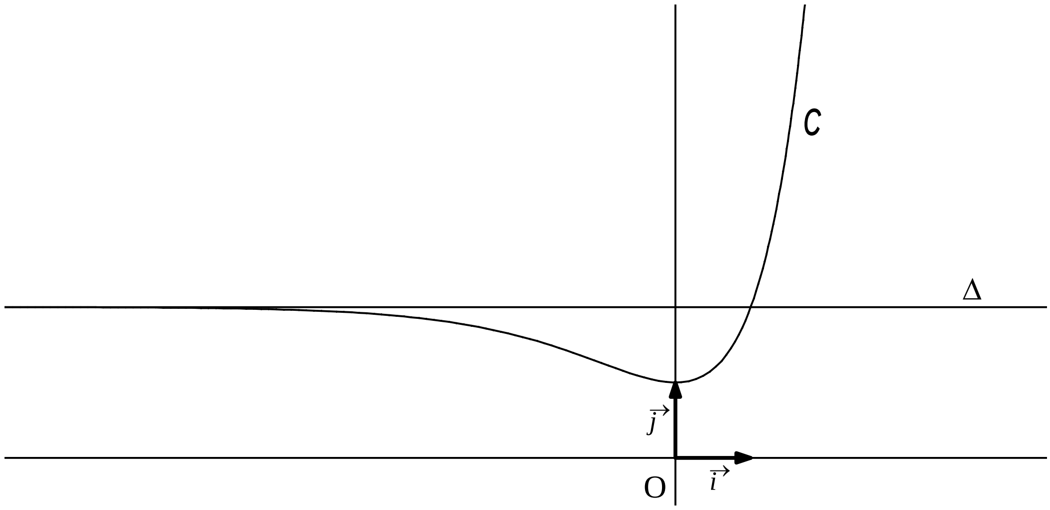
$\boxed{3}$ On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dire si l'axe des abscisses semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



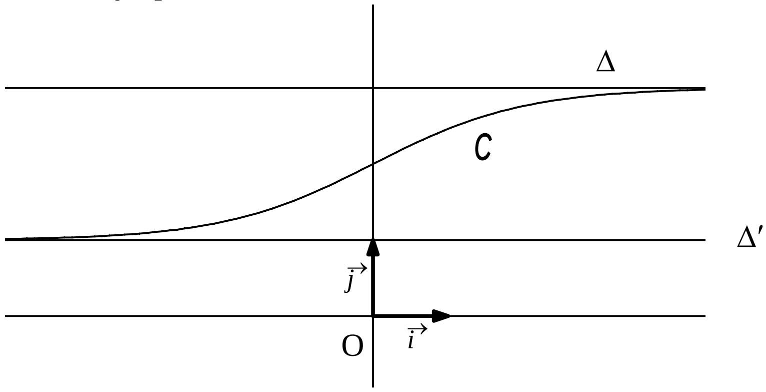
$\boxed{4}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dire si la droite Δ semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



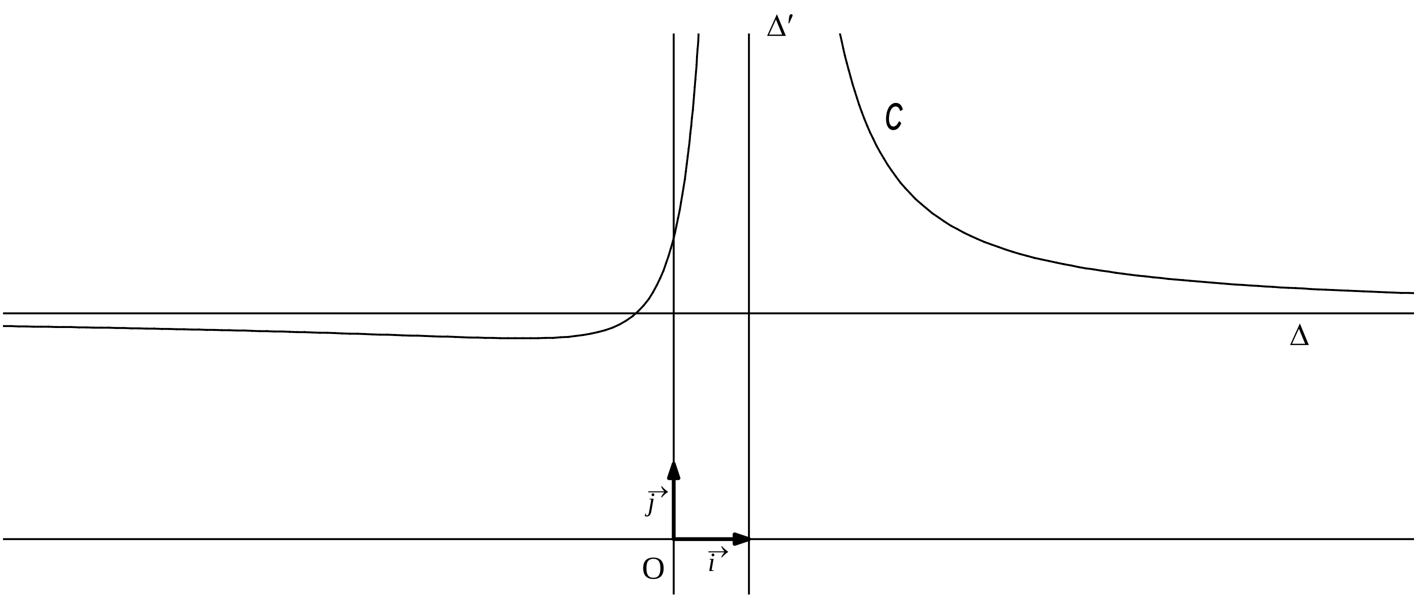
$\boxed{5}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dire si les droites Δ et Δ' semblent asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.



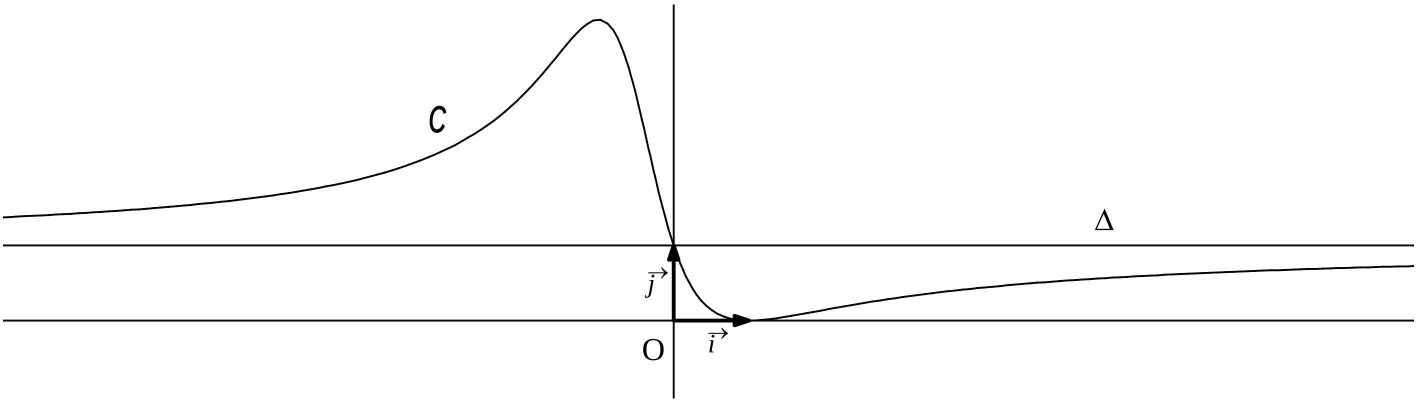
$\boxed{6}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Dire si les droites Δ et Δ' semblent asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.



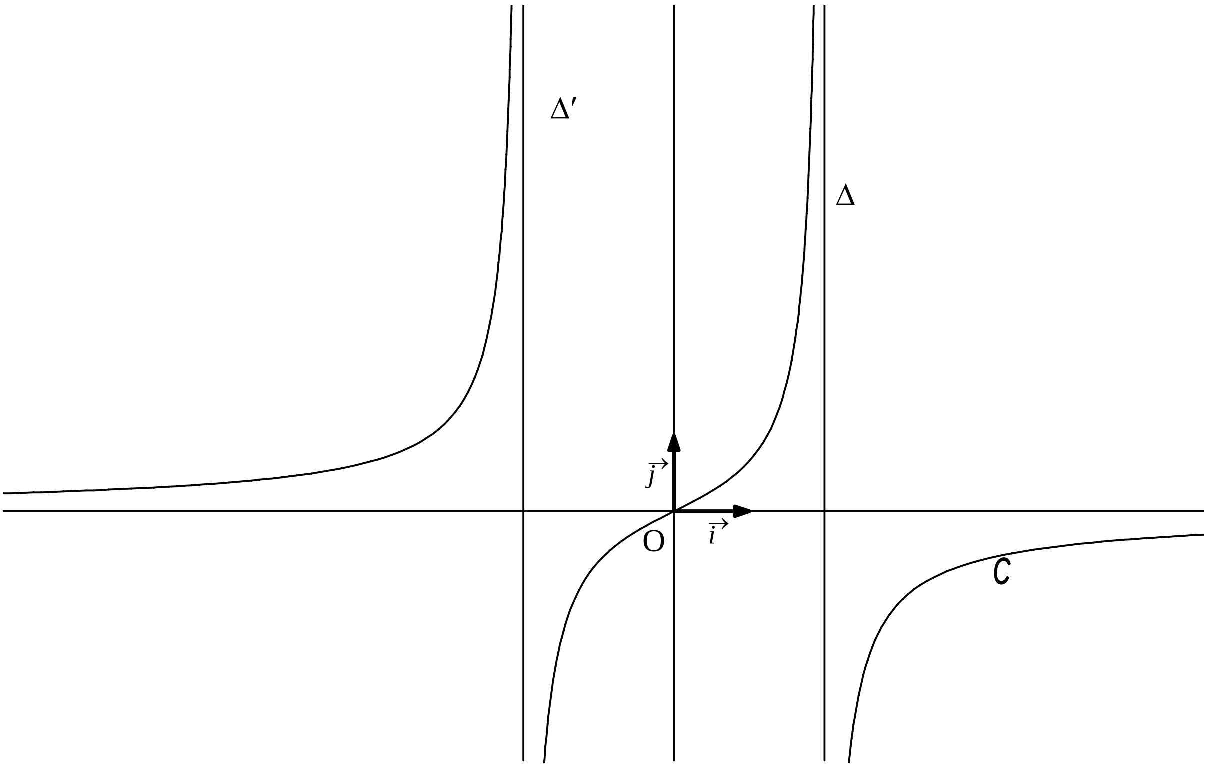
$\boxed{7}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dire si la droite Δ semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



$\boxed{8}$ On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2 ; -2\}$.

Il s'agit d'une même courbe constituée de plusieurs morceaux.
Quelles droites semblent asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$?



$\boxed{9}$ On considère une fonction f sur laquelle on dispose d'une information dans chaque cas. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Recopier et compléter la deuxième colonne du tableau suivant :

Donnée	**Conséquence graphique**
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$	La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = \ldots.$ pour asymptote …. .
$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = -\infty$	
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$	

10 On considère une fonction f définie sur l'ensemble $\mathcal{D} = \left]0\,;2\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$ admettant le tableau de variations ci-dessous. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

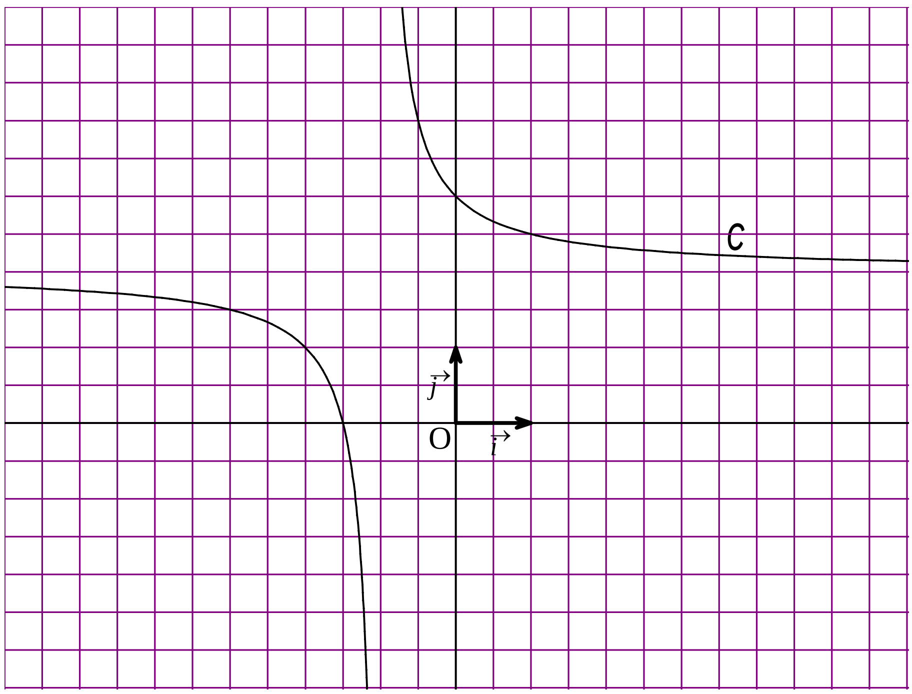
x	0		2		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Reproduire le tableau de variations.
Donner à l'aide du tableau de variations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
En déduire les asymptotes à $\mathcal{C}$ en rédigeant clairement.
Sur un graphique, tracer les asymptotes et donner, en utilisant les variations de f, l'allure de $\mathcal{C}$.

11 On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dont on ne connaît pas l'expression.

On sait que $\mathcal{C}$ admet

- la droite Δ d'équation réduite $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$;
- la droite Δ' d'équation réduite $x = -1$ pour asymptote verticale.

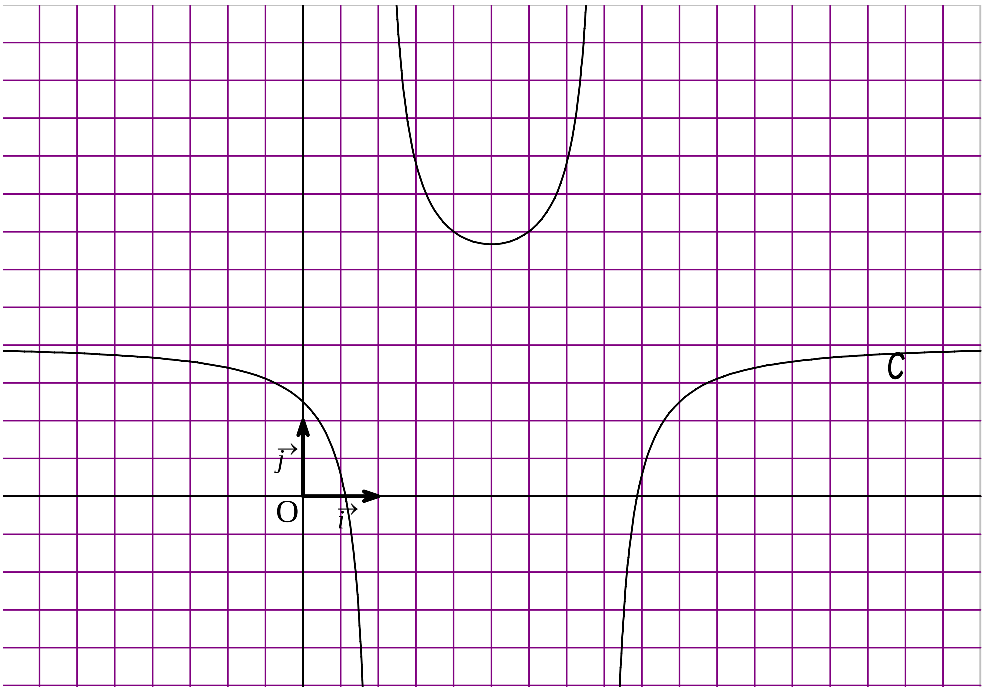


Tracer les droites Δ et Δ' en couleur sur le graphique précédent (ou refaire la courbe, ça entraîne à les faire !).
Recopier et compléter sans explication les égalités suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \ldots$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \ldots$.

12 On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;4\}$ dont on ne connaît pas l'expression.

On sait que $\mathcal{C}$ admet

- la droite Δ d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$;
- les droites Δ' et Δ'' d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ pour asymptotes verticales.



Tracer les droites Δ, Δ', Δ" en couleur sur le graphique précédent (ou refaire la courbe, ça entraîne à les faire !).
Recopier et compléter sans explication :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ldots$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ldots$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \ldots$; $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \ldots$.

$\boxed{13}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Que peut-on en déduire graphiquement pour $\mathcal{C}$?
Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{14}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5}{2-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Que peut-on en déduire graphiquement pour $\mathcal{C}$? Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{15}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer le domaine de définition de *f*.
2°) Calculer la dérivée de *f*.
3°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant le signe de la dérivée et les variations de *f*.
On n'oubliera pas les doubles barres pour la valeur interdite.
4°) Étudier en détaillant les calculs $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes Δ et Δ′ que l'on précisera.
Compléter le tableau de variation du 3°) avec les limites de *f*.

5°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-3	-2	$-1,5$	$-0,5$	0	1
$f(x)$						

6°) Sur un graphique, tracer le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant le centimètre pour unité de longueur.

Tracer les asymptotes Δ et Δ'.
Placer les points correspondants au tableau de valeurs.
Commencer le tracé de $\mathcal{C}$ en reliant ces points « à la main ». On prendre garde que la courbe $\mathcal{C}$ est constituée de deux morceaux séparés par l'asymptote verticale.
Achever enfin le tracé de $\mathcal{C}$ en soignant le tracé des branches infinies.
Vérifier sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.
7°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-1 ; 2)$ pour centre de symétrie.

16 On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier la parité de f ; qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$?

2°) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

3°) Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$?

4°) On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point O.
Déterminer l'équation réduite de T.
Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.
On dit que O est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$.
5°) Recopier et remplir le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	$0,5$	1	2	3	7
$f(x)$						

Faire un graphique en prenant 2 centimètres pour unité graphique.
Placer les points correspondants au tableau de valeurs et leurs symétriques par rapport au point O (compte tenu de la symétrie de la courbe par rapport à O).
Tracer les tangentes horizontales (sous la forme d'une double flèche).
Tracer T.
Commencer le tracé de $\mathcal{C}$ en reliant les points « à la main ».
Achever enfin le tracé de $\mathcal{C}$ en soignant le tracé des branches infinies (en tenant compte de l'asymptote).
Vérifier sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.

$\boxed{17}$ On considère la fonction *f* définie par $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2°) Calculer $f'\left(x\right)$ (tirer tous les traits de fraction à la règle). Dresser le tableau de variations de f (faire le tableau de variation et les flèches de variations à la règle).

3°) Étudier la limite de $f\left(x\right)$ quand *x* tend vers + ∞ et en – ∞ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale Δ.

4°) Recopier et compléter le tableau de valeurs.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0
$f\left(x\right)$					

Préciser en particulier les points en lesquels $\mathcal{C}$ coupe les axes de coordonnées.
Tracer $\mathcal{C}$, l'asymptote Δ et la tangente horizontale. On prendra pour unités : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

5°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ′ d'équation réduite $x=-2$ pour axe de symétrie.

$\boxed{18}$ On considère la fonction *f* définie par $f\left(x\right)=1-\dfrac{3}{\left(x-2\right)^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2°) Dresser le tableau de variations de *f*. Faire le tableau et les flèches de variations à la règle.

3°) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale Δ et une asymptote verticale Δ′ ; étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

4°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
On rédigera ainsi :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O*x*) sont solutions de l'équation ……….. ».
On conclura ainsi $\mathcal{C} \cap \left(\mathrm{O}x\right)=\left\{\mathrm{I}\,;\mathrm{J}\right\}$ avec I (… ; …) et J (… ; …).

5°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	– 1	0	0,5	1	1,5	2,5	3	3,5	4	5
$f\left(x\right)$										

Faire un graphique en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer les asymptotes Δ et Δ′ puis placer les points du tableau de valeurs puis $\mathcal{C}$.
Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.
Tracer la tangente au point I où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées.
On prendra 2 cm pour unité graphique.

6°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ′ pour axe de symétrie.

Corrigé

Pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{8}$, on peut repasser les droites en couleur et entourer les zones concernées par les asymptotes. Les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{8}$ sont aussi intéressants du point de vue de la rédaction : rédaction pour une asymptote verticale, rédaction pour une asymptote horizontale.
Certaines courbes sont en plusieurs parties ; c'est intéressant à signaler.

$\boxed{1}$ L'axe des ordonnées semble asymptote à $\mathcal{C}$ (asymptote verticale).
La droite Δ semble asymptote à $\mathcal{C}$.

$\boxed{2}$ L'axe des abscisses ne semble pas asymptote à $\mathcal{C}$.
L'axe des ordonnées semble asymptote à $\mathcal{C}$ (asymptote verticale).

$\boxed{3}$ L'axe des abscisses semble asymptote à $\mathcal{C}$ (asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$).

$\boxed{4}$ La droite Δ semble asymptote à $\mathcal{C}$ (asymptote horizontale en $-\infty$).

Une meilleure rédaction que nous utiliserons plus tard est :

Il semble que la courbe $\mathcal{C}$ admette la droite Δ pour asymptote horizontale en $-\infty$ (mais pas en $+\infty$).

$\boxed{5}$ Les droites Δ et Δ' semblent asymptotes à $\mathcal{C}$.

$\boxed{6}$ La droite Δ semble asymptote à $\mathcal{C}$ mais c'est beaucoup moins évident pour Δ'.

$\boxed{7}$ La droite Δ semble asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{8}$ La courbe $\mathcal{C}$ est en plusieurs parties.
Les droites Δ et Δ' ainsi que l'axe des abscisses semblent asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ (Δ et Δ' sont des asymptotes verticales ; l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$).

$\boxed{9}$ **Il s'agit d'un exercice de rédaction.**

Tableau à compléter :

Donnée	**Conséquence graphique**
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$	La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=3$ pour AH en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$	La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-2$ pour AV.
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$	La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=1$ pour AV.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$	La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=4$ pour AH en $-\infty$.

$\boxed{\textbf{10}}$

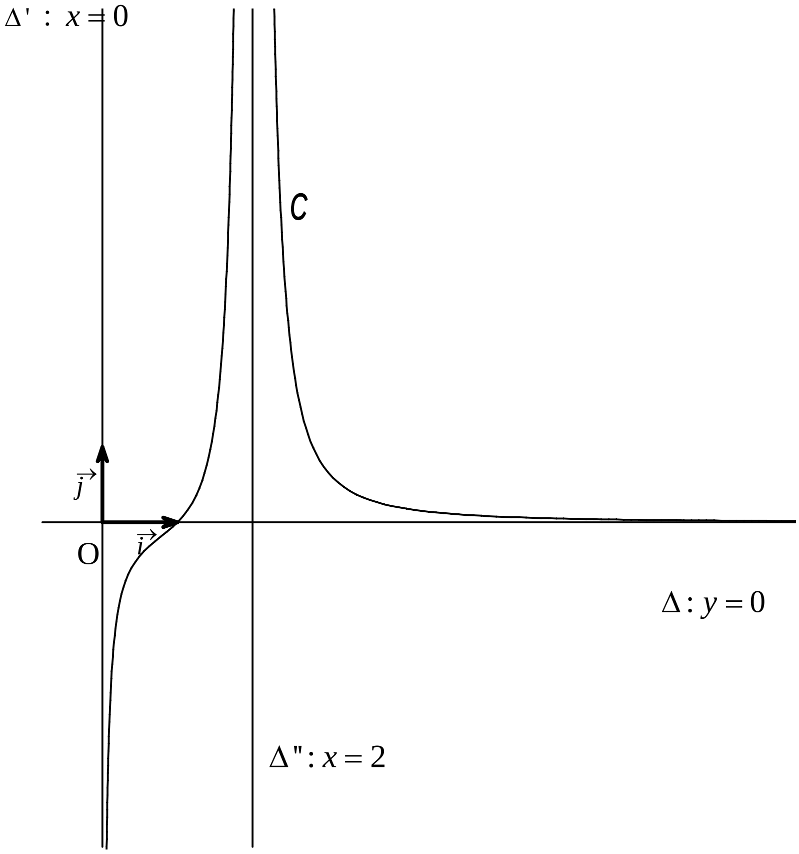
Reproduire le tableau de variations.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) pour asymptote horizontale en + ∞.
La courbe $\mathcal{C}$ admet les droites Δ′ et Δ″ d'équations réduites respectives $x = 0$ et $x = 2$ pour asymptote verticale.

On remarquera que la 2^{e} et la 3^{e} limites donnent la même déduction graphique.

Allure de $\mathcal{C}$:



$\boxed{\textbf{11}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$ (juste avant – 1, la courbe « plonge »).

$\boxed{\textbf{12}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{13}}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2)=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ (une même asymptote en deux endroits séparés).

On vérifie le résultat sur calculatrice ou sur ordinateur.

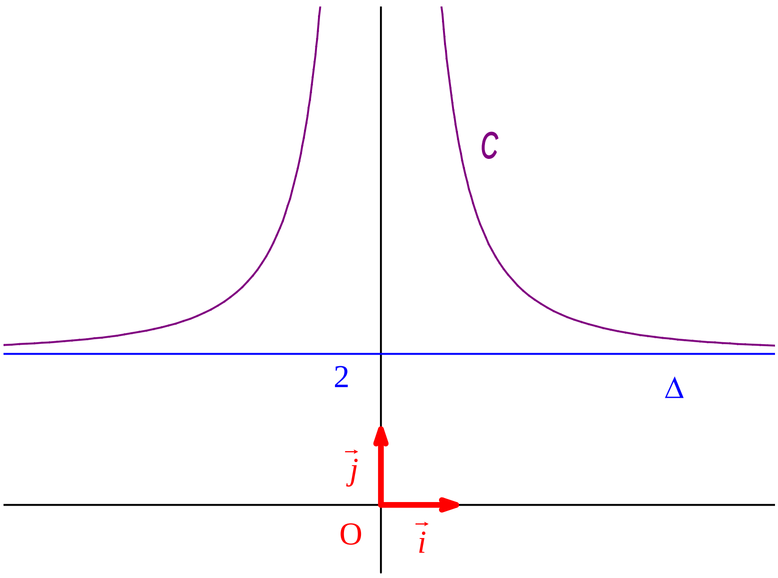
Attention :

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ce n'est pas pour autant que l'on peut dire que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x=0$ pour asymptote verticale : pour le démontrer, il faut déterminer la limite de f en 0.

Visualisation sur calculatrice : la courbe et l'asymptote horizontale ne sont pas confondues mais elles sont « hyper-proches ».

Faire la courbe.



$\boxed{14}$ $f : x \mapsto \dfrac{5}{2-x}$

Déterminons les limites de *f* en 2^+ et en 2^-.

Faire le tableau de signe de $2-x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}(5)=5\\ \lim\limits_{x\to2^+}(2-x)=0^-\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}(5)=5\\ \lim\limits_{x\to2^-}(2-x)=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

$\boxed{15}$ Étude d'une fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$

N.B. : Attention au vocabulaire :
Ne pas dire qu'« une fonction homographique est une fonction inverse » mais qu'« une fonction homographique "**est associée**" à **la** fonction inverse. »

1°) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2°) *f* est une fonction rationnelle (c'est même une fonction homographique car c'est le quotient de deux fonctions affines) donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ (formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$)

3°) **Tableau récapitulatif**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
SGN de 1	$+$		$+$
SGN de $(x+1)^2$	$+$	0 déno	$+$
SGN de $f'(x)$	$+$		$+$
Variations de *f*	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

4°)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^+} (2x+1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} (x+1) = 0^+ \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^-} (2x+1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} (x+1) = 0^- \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

f est une fonction rationnelle non nulle donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré pour trouver les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $x = -1$ pour asymptote verticale.

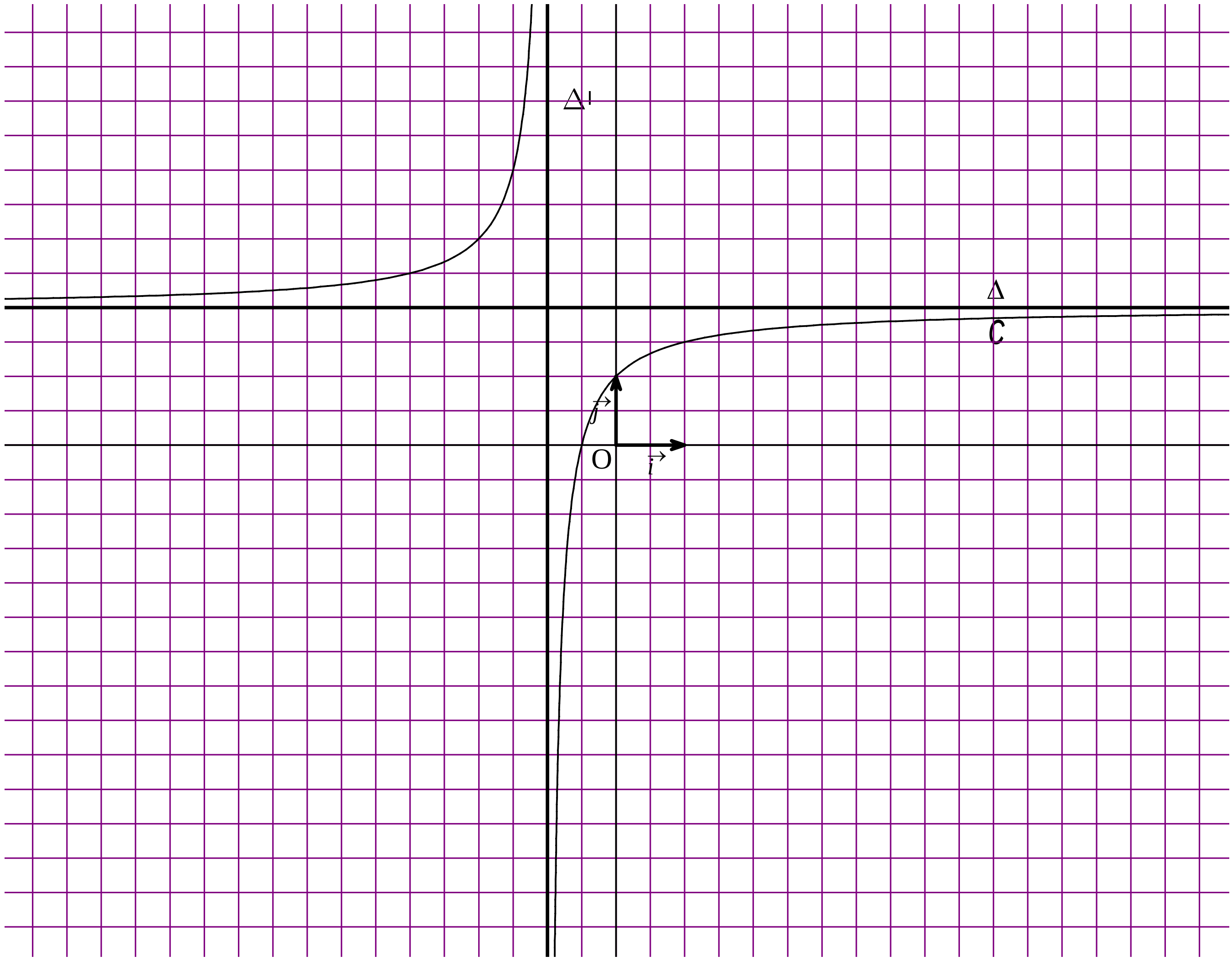
5°) **Tableau de valeurs**

x	-3	-2	$-1{,}5$	$-0{,}5$	0	1
$f(x)$	2,5	3	4	0	1	1,5

6°) **Tracé de $\mathcal{C}$**

La courbe $\mathcal{C}$ est constituée de deux branches symétriques par rapport à Ω.

La courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole.



7°) **Démontrons que $\mathcal{C}$ admet le point Ω(– 1 ; 2) pour centre de symétrie.**

On calcule $f(-1+h)+f(-1-h)$ pour $h \neq 0$.

$\mathcal{D}_f$ est centré en – 1.

Soit h un réel non nul.

$$f\ (-1+h)=\frac{2(-1+h)+1}{-1+h+1}=\frac{2h-1}{h}$$

$$f\ (-1-h)=\frac{2(-1-h)+1}{-1-h+1}=\frac{-2h-1}{-h}=\frac{2h+1}{h}$$

$$f\ (-1+h)+f\ (-1-h)=\frac{2h-1}{h}+\frac{2h+1}{h}=\frac{4h}{h}=4=2\times 2$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point Ω(– 1 ; 2) pour centre de symétrie.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1°) **Étudions la parité de *f*.**

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f$ est centré en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x)=\frac{2\times(-x)}{1+(-x)^2}$$
$$=-\frac{2x}{1+x^2}$$
$$=-f(x)$$

Donc la fonction *f* est impaire.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet l'origine O du repère pour centre de symétrie.

2°) **Dressons le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}^+$.**

f est une fonction rationnelle donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de 2		$+$		$+$		$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\left(1+x^2\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3°) **Étudions la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.**

f est une fonction rationnelle non nulle donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Qu'en déduisons-nous pour $\mathcal{C}$?

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ (car $\mathcal{C}$ admet le point O comme centre de symétrie).

4°) T : tangente à $\mathcal{C}$ au point O

• **Déterminons l'équation réduite de T.**

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = 2x + 0$ soit $y = 2x$.

L'équation réduite de T s'écrit $y = 2x$.

• **Étudions la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.**

Pour étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T, on étudie le signe de la différence $f(x) - 2x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2x = \frac{2x}{1+x^2} - 2x$$

$$= 2x\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right)$$

$$= -\frac{2x^3}{1+x^2}$$

Tableau de signe de $f(x) - 2x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-2x^3$		$+$	0	$-$	
Signe de x^2+1		$+$		$+$	
Signe de $f(x)-2x$		$+$	0	$-$	

Le signe de $-2x^3$ est contraire de celui de x.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f(x) - 2x < 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle]0 ; +∞[.
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ $\quad f(x) - 2x > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur l'intervalle] –∞ ; 0[.
$\mathcal{C}$ et T sont sécantes au point d'abscisse 0.

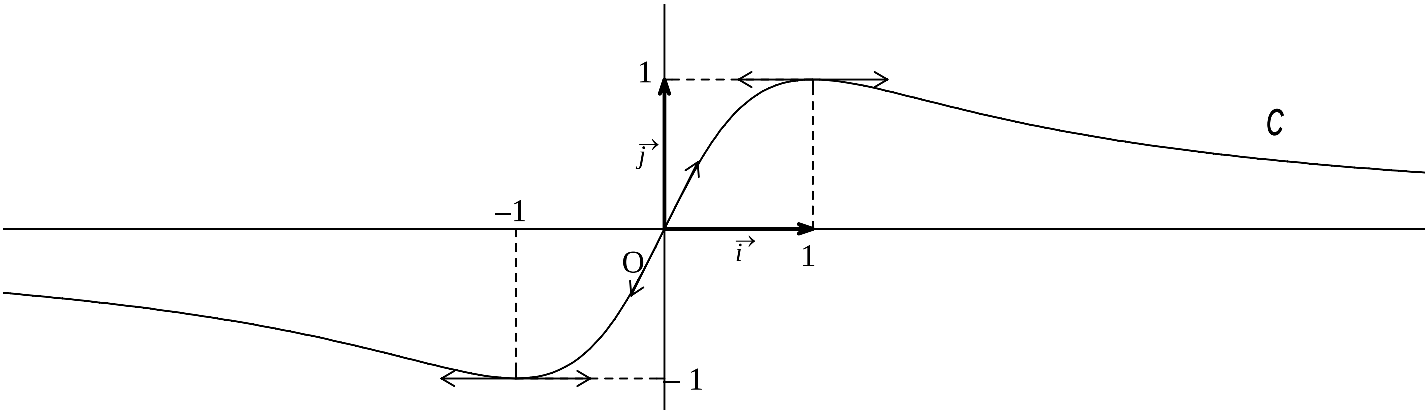
On dit que O est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$.

On peut aussi faire l'étude dans un tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $-2x^3$		$+$	0	$-$	
SGN de $1+x^2$		$+$		$+$	
SGN de $f(x) - 2x$		$+$	0	$-$	
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à T		$\mathcal{C}$ est au-dessus de T	$\mathcal{C}$ et T sont sécantes au point d'absc. 0	$\mathcal{C}$ est au-dessous de T	

5°)

x	0	0,5	1	2	3	7
$f(x)$	0	0,8	1	0,8	0,6	0,28



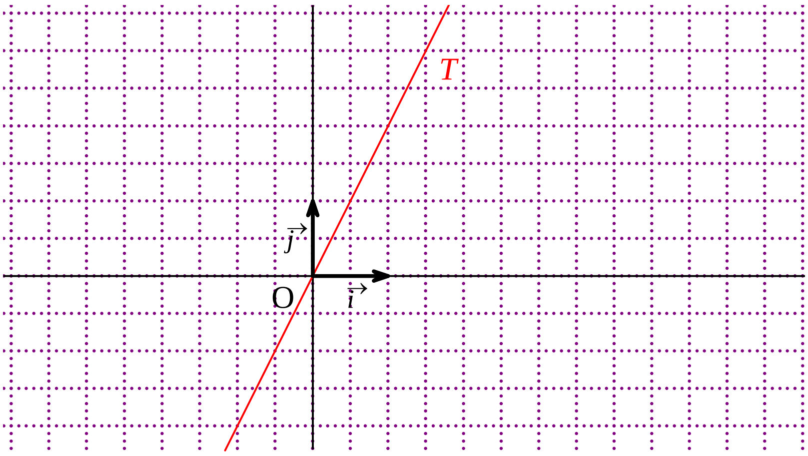
La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe (Ox) pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
Elle se rapproche de l'axe (Ox) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Tracé de *T*

L'équation réduite de T s'écrit $y = 2x$.
Pour tracer *T*, il y a essentiellement **deux méthodes** :

On sait déjà que T passe par le point O (l'équation réduite de la droite T est de la forme $y = ax$, autre raison : T est la tangente au point O donc elle passe par O).

- soit on prend un autre point de la droite T par exemple le point A(1 ; 2)
- soit on utilise le coefficient directeur de T qui est égal à 2 (donc en avançant d'une unité vers la droite on doit monter d'une unité vers le haut). On peut aussi dire que le vecteur $\vec{u}(1\,;2)$ est un vecteur directeur de *T*).



Faire le tracé de la courbe sous la forme d'un rébus

Pour pouvoir respecter l'échelle donnée dans l'énoncé pour le tracé de la courbe, on peut prendre le cahier dans l'autre sens.

$\boxed{17}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$

Cet exercice reprend beaucoup de notions étudiées cette année.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $2x^2+8x+9\neq 0$.

Considérons le polynôme $2x^2+8x+9$.

Son discriminant est égal : $\Delta=64-4\times 2\times 9=64-72=-8$.

$\Delta<0$ donc le polynôme admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Donc $D_f=\mathbb{R}$.

2°) Calculons $f'(x)$.

f est une fonction rationnelle donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On calcule la dérivée en utilisant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{(2x+4)(2x^2+8x+9)-(4x+8)(x^2+4x+3)}{(2x^2+8x+9)^2}$$

Méthode astucieuse : on factorise le numérateur

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(2x^2+8x+9)-2(2x+4)(x^2+4x+3)}{(2x^2+8x+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+4)\left[(2x^2+8x+9)-2(x^2+4x+3)\right]}{(2x^2+8x+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x+12}{(2x^2+8x+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6(x+2)}{(2x^2+8x+9)^2}$$

Méthode basique : on développe tout sans réfléchir

$$f'(x)=\frac{(4x^3+16x^2+18x+8x^2+32x+36)-(4x^3+8x^2+16x^2+32x+12x+24)}{(2x^2+8x+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{4x^3}+\cancel{24x^2}+50x+36-\cancel{4x^3}-\cancel{24x^2}-44x-24}{(2x^2+8x+9)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{6x+12}{\left(2x^2+8x+9\right)^2}$$

Le calcul de la dérivée est un peu compliqué mais, heureusement, le résultat se simplifie.
Dans ce cas, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel est tout à fait indiquée.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	
Signe de $\left(2x^2+8x+9\right)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\frac{1}{2}$	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$

3°) f est une fonction rationnelle donc en appliquant la règle du quotient des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-\frac{1}{2}=\frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}-\frac{1}{2}=\frac{2\left(x^2+4x+3\right)-\left(2x^2+8x+9\right)}{2\left(2x^2+8x+9\right)}=-\frac{3}{2\left(2x^2+8x+9\right)}$$

(Pour la mise au même dénominateur, on utilise la formule $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$)

Le polynôme $2x^2+8x+9$ a un discriminant strictement négatif donc il est toujours du signe positif.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)-\frac{1}{2}<0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est toujours située en dessous de Δ.

4°)

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	$\frac{1}{3}$

Construction de la courbe (présentation sous la forme d'un rébus)

On utilise un crayon à papier ou mieux un critérium.

Avant de tracer la courbe, on doit mettre en place tous les éléments importants du tracé.

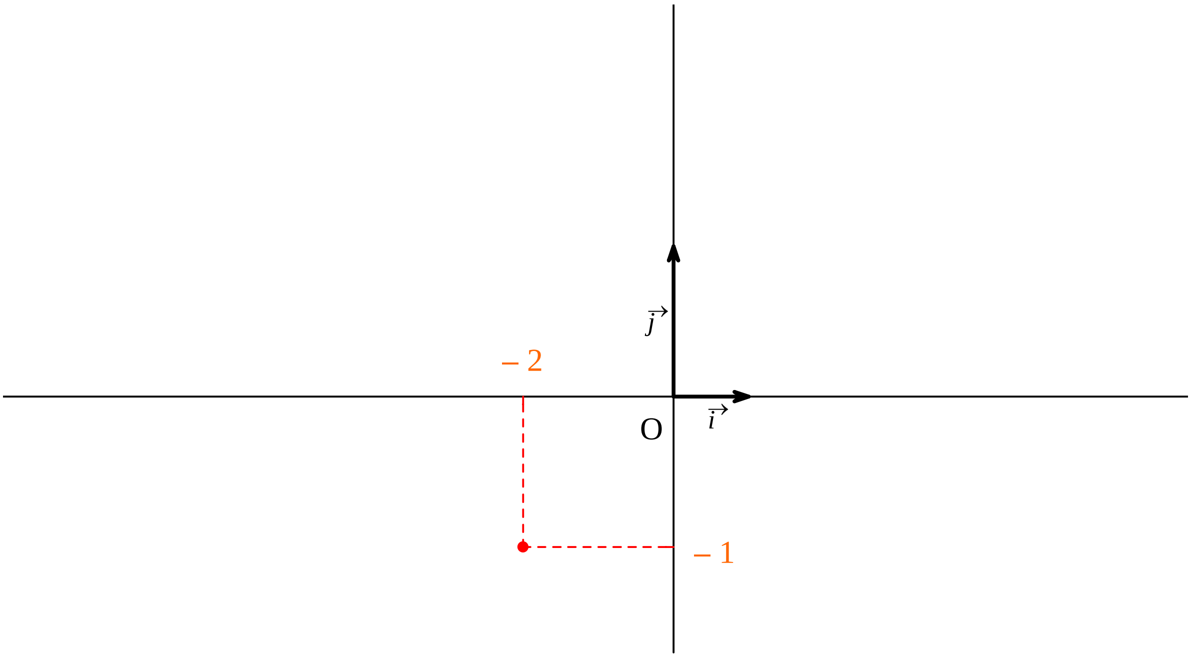
1ère étape :

On trace le repère orthogonal en respectant l'échelle donnée dans l'énoncé (1 centimètre en abscisse et 2 centimètres en ordonnée).

2e étape :

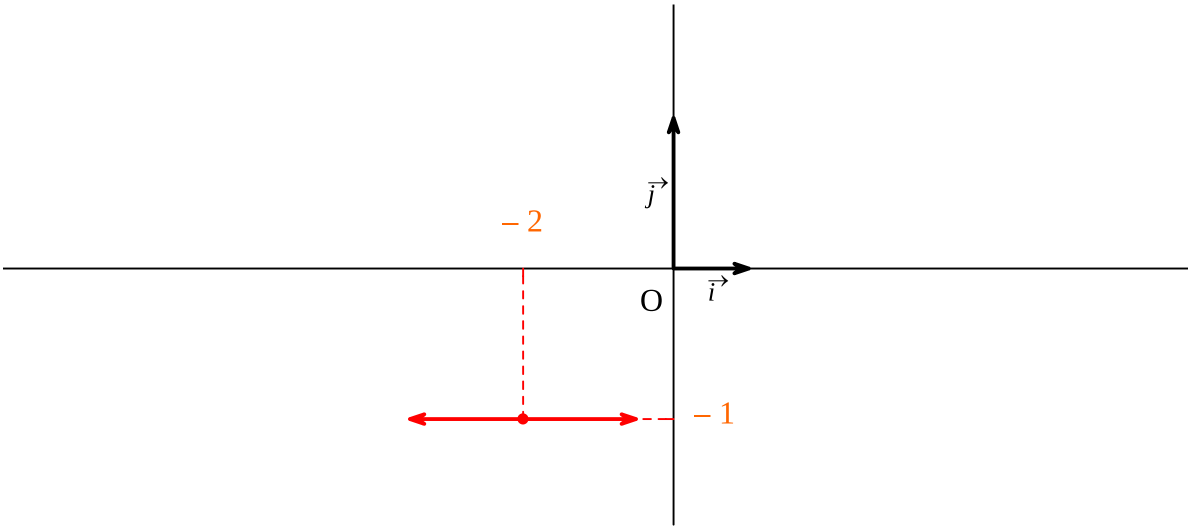
On place le point correspondant au minimum de *f* sur $\mathbb{R}$. On trace des pointillés à la règle et l'on marque les coordonnées du point sur les axes.

On utilise la représentation conventionnelle d'une tangente sous la forme d'une double flèche.



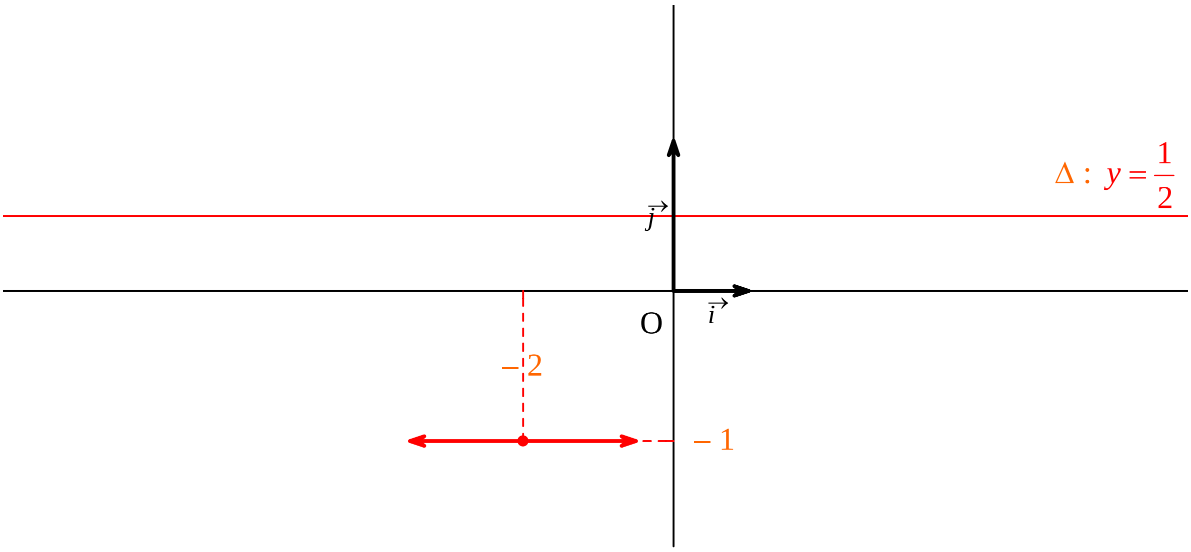
3e étape :

On trace la tangente horizontale au point correspondant au minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ (en effet, dans le tableau de variation, sur la ligne du signe de $f'(x)$, on voit que $f'(-2)=0$). On effectue ce tracé à la règle (et non à main levée).



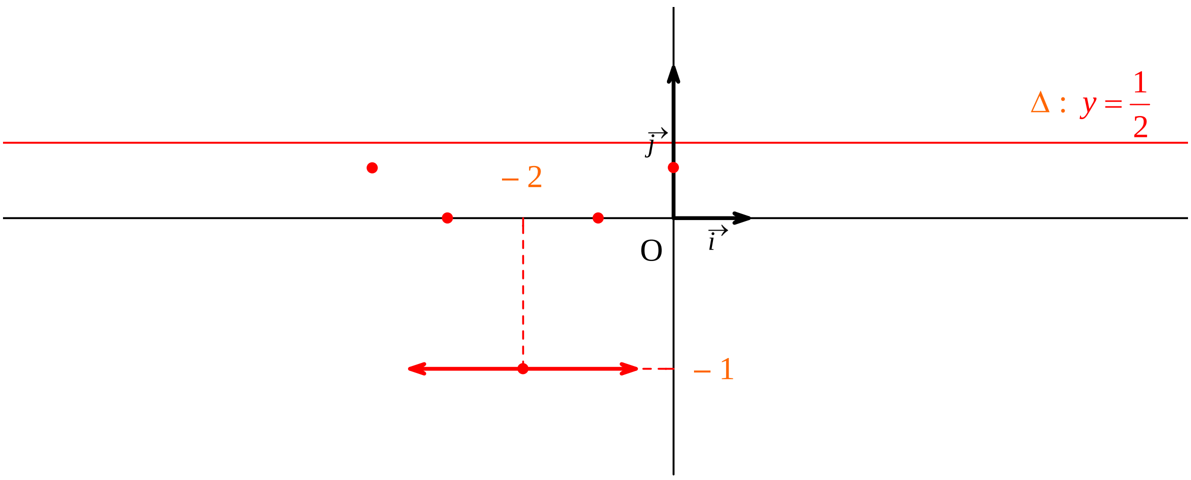
4^{e} étape :

On trace la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ qui est asymptote horizontale à la courbe en + ∞ et en – ∞.



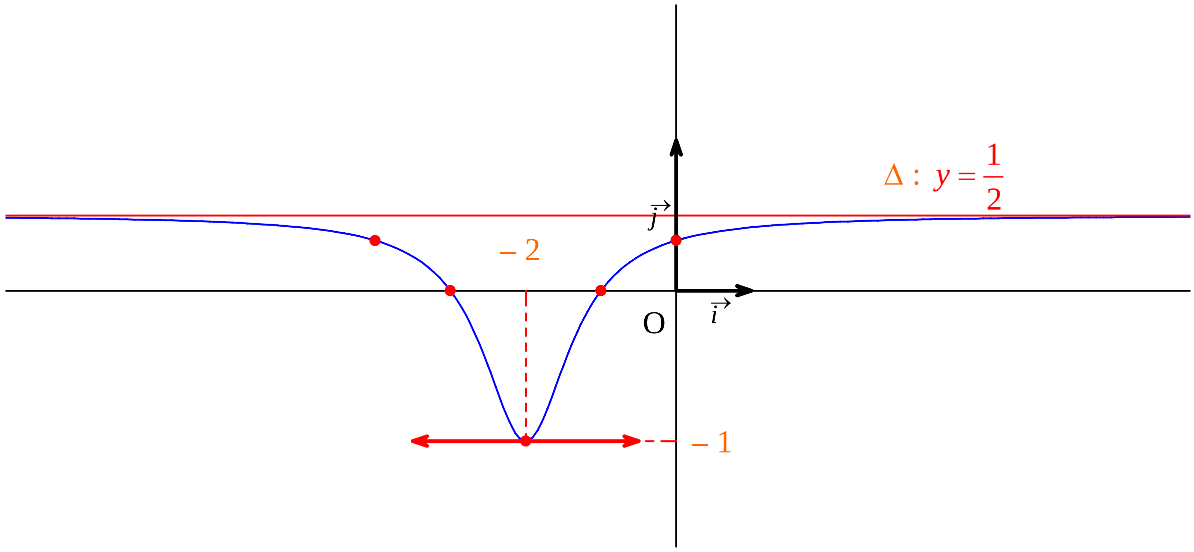
5^{e} étape :

On place les points correspondant au tableau de valeurs en tenant compte du tableau de variation qui a été établi.



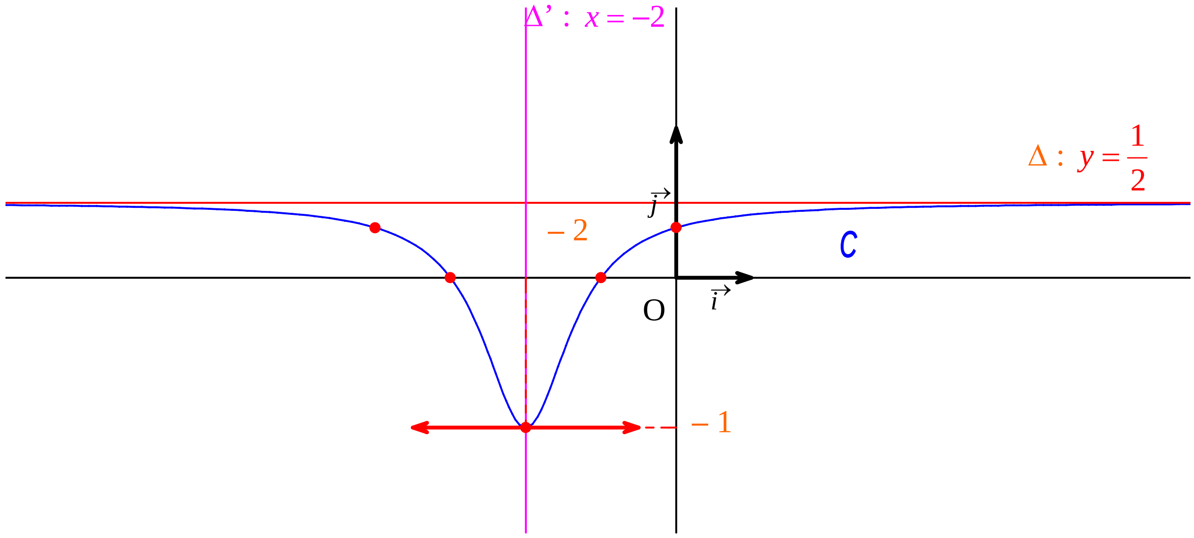
6^{e} étape :

Tout est mis en place pour effectuer le tracé de la courbe.
On relie les points à la main, toujours au crayon ou au critérium, en soignant particulièrement l'allure au voisinage de + ∞ et de – ∞ (car la courbe admet la droite Δ pour asymptote horizontale en + ∞ et en – ∞).



On doit soigner l'arrivée au niveau de la tangente horizontale (bien plate).

On vérifie le tracé à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de tracé de courbes.



5°) On utilise la règle du cours pour démontrer qu'une droite est axe de symétrie.
On vérifie que pour tout réel *h*, on a $f(-2+h)=f(-2-h)$.

Soit *h* un réel.

$$f(-2+h)=\frac{(-2+h)^2+4(-2+h)+3}{2(-2+h)^2+8(-2+h)+9}=\ldots=\frac{h^2-1}{2h^2+1}$$

Méthode : on développe tout sans se poser de question en utilisant les identités remarquables pour développer les carrés.
Pour ce genre de calcul assez technique, un logiciel de calcul formel serait tout à fait indiqué.

$$f(-2-h)=\frac{(-2-h)^2+4(-2-h)+3}{2(-2-h)^2+8(-2-h)+9}=\ldots=\frac{h^2-1}{2h^2+1}$$

(on refait le calcul ou méthode de fainéant, mais néanmoins astucieuse : on remplace h par $-h$ dans le calcul de $f(-2+h)$).

$\forall h \in \mathbb{R} \quad f(-2+h) = f(-2-h)$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $x=-2$ pour axe de symétrie.

$\boxed{\textbf{18}}$ $f(x) = 1 - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ (évident, inutile de détailler la recherche ; ne pas modifier l'expression de f pour trouver son ensemble de définition)

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2 \} \quad f'(x) = 0 - 3 \times \left(-\dfrac{2 \times 1}{(x-2)^3} \right) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$ (traits de fractions à la règle)

Formule : $\left(\dfrac{1}{u^n} \right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $(x-2)^3$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	1

3°)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{(x-2)^2} \right) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

De même, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} (-3) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 2} \left(-\dfrac{3}{(x-2)^2} \right) = -\infty.$$

De plus $\lim\limits_{x \to 2}(1) = 1$, donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en + ∞ et en – ∞ et la droite Δ' d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad f(x) < 1$

(On peut éventuellement procéder par différence, $f(x) - 1 = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$ et l'on voit alors que cette différence est strictement négative).

Donc la courbe $\mathcal{C}$ est toujours située au-dessous de la droite Δ.

4°) Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe (O*x*) sont solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On résout cette équation dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$1 - \dfrac{3}{(x-2)^2} = 0$

$1 = \dfrac{3}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2 = 3$

(surtout ne pas développer le carré, sinon on est obligé de considérer un polynôme du 2nd degré, de calculer Δ etc. ce qui conduit évidemment aux mêmes solutions mais de manière plus compliquée)

$x - 2 = \sqrt{3}$ ou $x - 2 = -\sqrt{3}$

$x = 2 + \sqrt{3}$ ou $x = 2 - \sqrt{3}$

Conclusion :

$\mathcal{C} \cap (\mathrm{O}x) = \{\mathrm{I} ; \mathrm{J}\}$ avec $\mathrm{I}\,(2+\sqrt{3} ; 0)$ et $\mathrm{J}\,(2-\sqrt{3} ; 0)$.

5°)

x	– 1	0	0,5	1	1,5	2,5	3	3,5	4	5
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	–2	– 11	– 11	– 2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

$f\left(2-\sqrt{3}\right) = f\left(2+\sqrt{3}\right) = 0$

L'équation de la tangente au point I d'abscisse 0 s'écrit $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

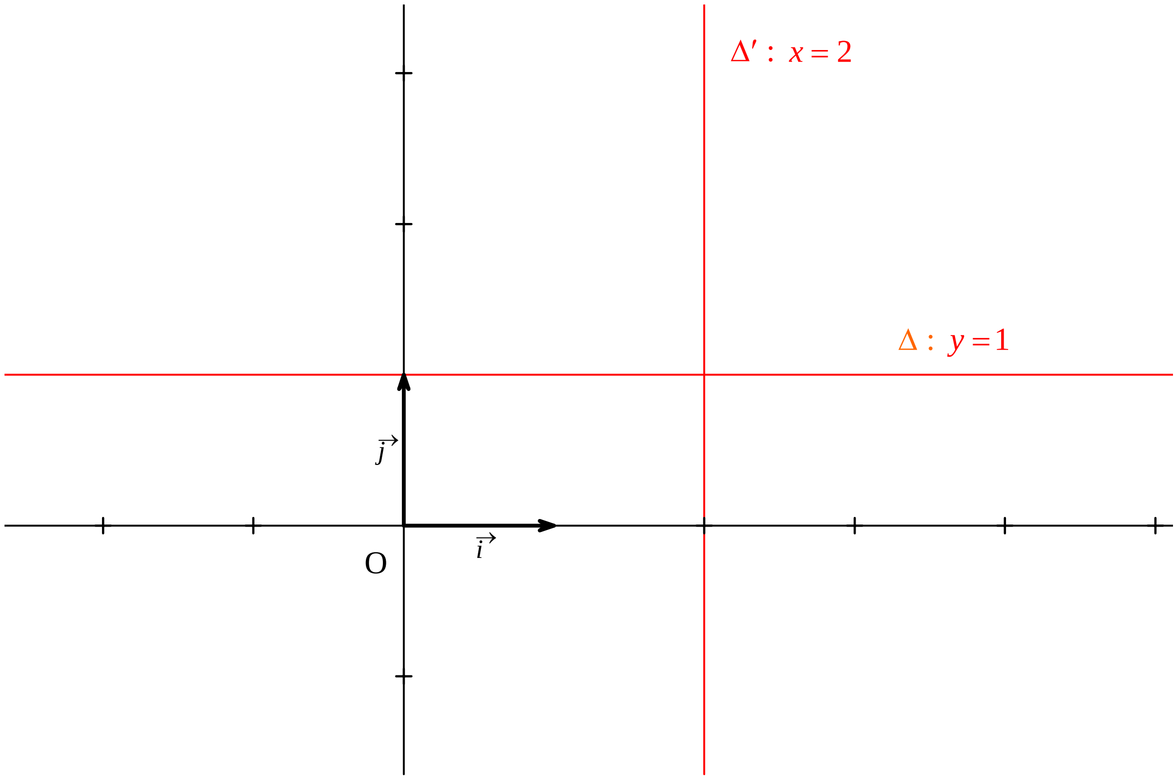
Tracé de la courbe $\mathcal{C}$

Il n'y a pas de points en lesquels la tangente soit horizontale car la dérivée ne s'annule jamais.
La mise en place consiste essentiellement à tracer les asymptotes et à placer les points correspondants au tableau de valeurs précédents.

On commence par mettre en place le repère en respectant les unités (2 cm en abscisse et en ordonnée).

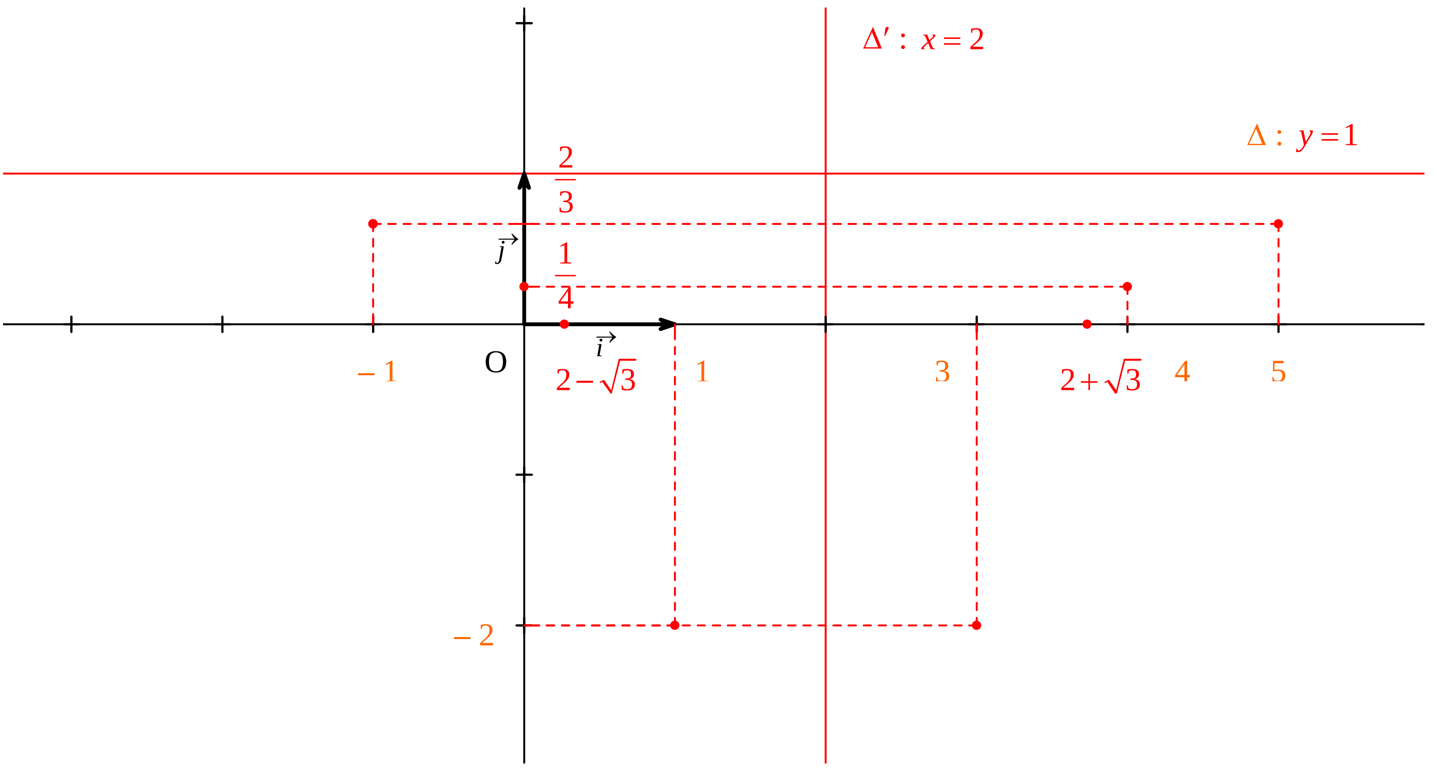
1$^{\text{ère}}$ étape :

On trace les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.



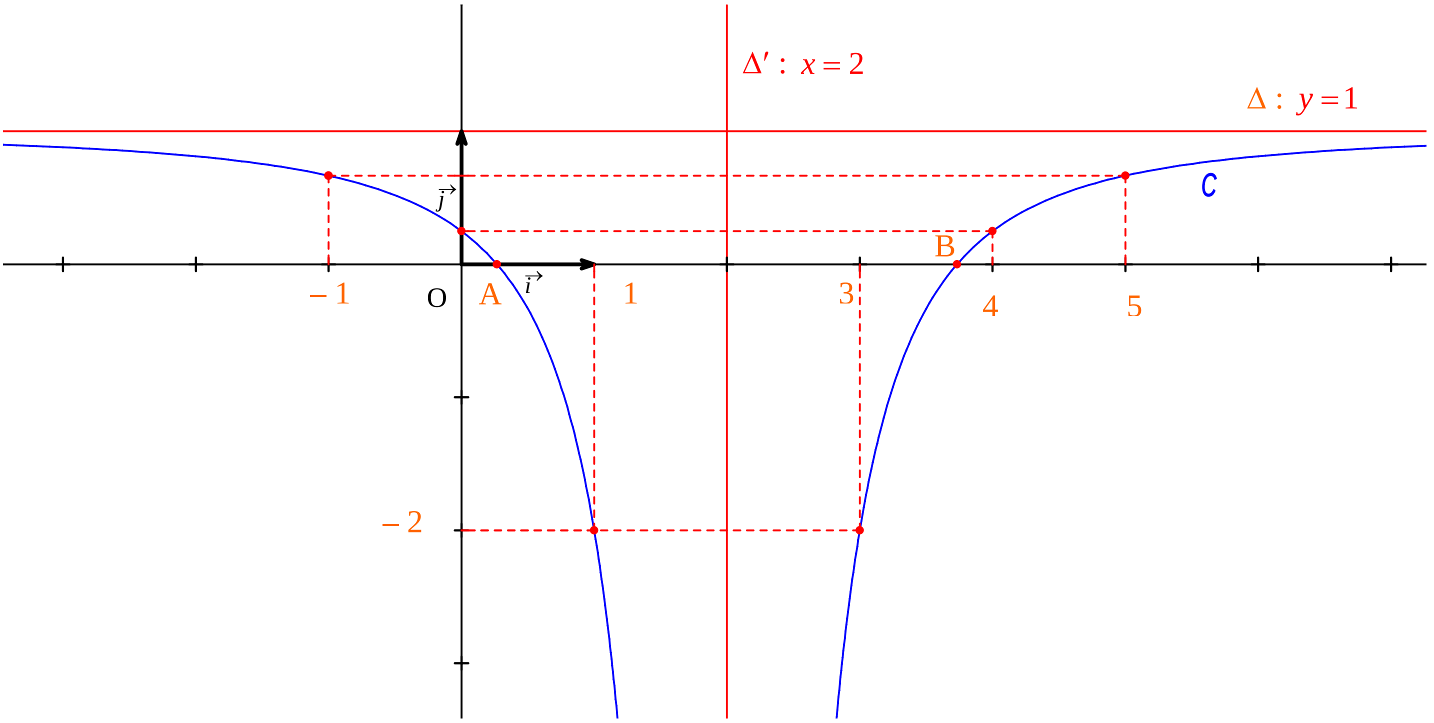
2^e étape :

On place les points correspondants au tableau de valeurs.
On trace les pointillés à la règle et l'on met les valeurs sur les axes.

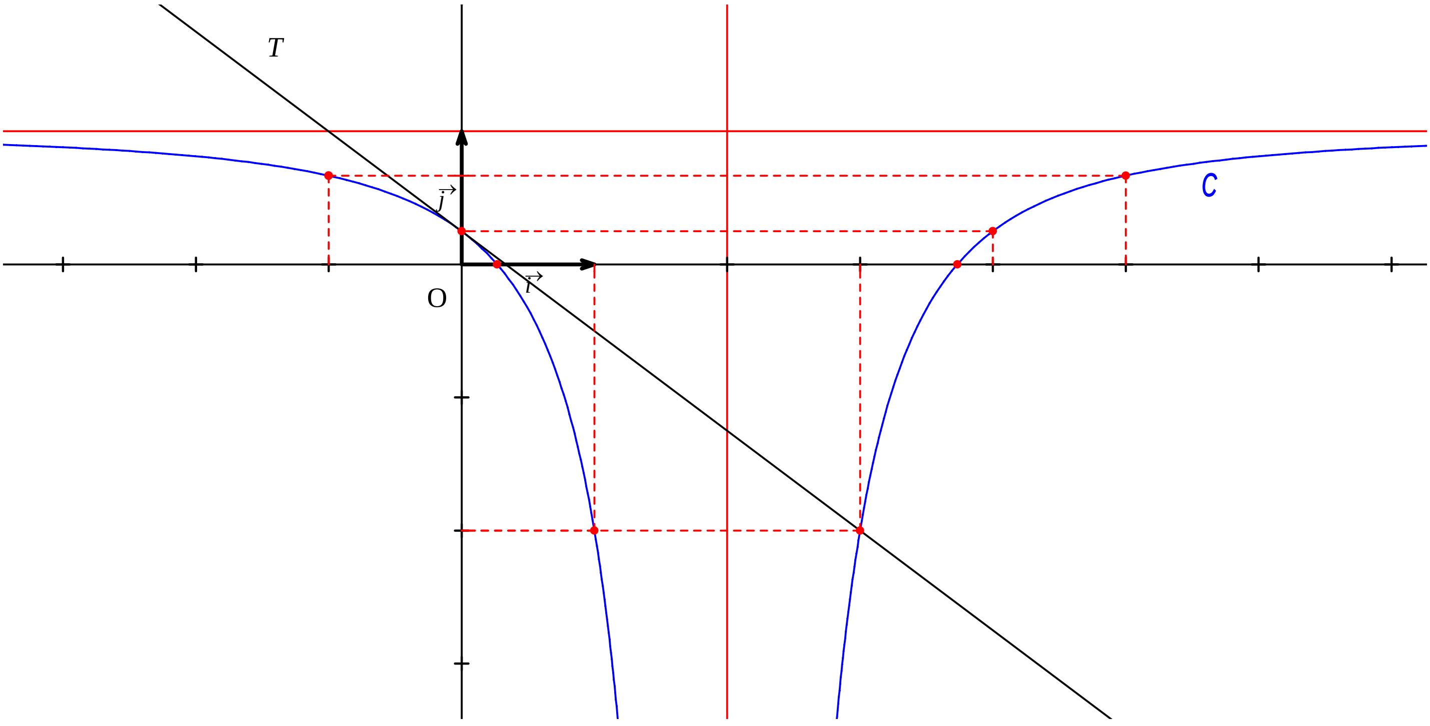


3^e étape :

On trace la courbe $\mathcal{C}$ en soignant l'allure au voisinage de 2, $+\infty$ et $-\infty$.



On trace la tangente au point d'abscisse 0.



On observe que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 recoupe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

6°) **Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' pour axe de symétrie.**

On utilise la règle du cours pour démontrer qu'une droite est axe de symétrie.
On vérifie que pour tout réel h non nul, on a $f\left(2+h\right)=f\left(2-h\right)$.

Soit h un réel tel que $2+h \in \mathcal{D}_f$ et $2-h \in \mathcal{D}_f$.

$2+h \in \mathcal{D}_f \iff 2+h \neq 2 \iff h \neq 0$

$2-h \in \mathcal{D}_f \iff 2-h \neq 2 \iff h \neq 0$

Donc finalement, on obtient $h \neq 0$.

$$f\left(2+h\right)=1-\frac{3}{\left(2+h-2\right)^2}=1-\frac{3}{h^2}$$

$$f\left(2-h\right)=1-\frac{3}{\left(2-h-2\right)^2}=1-\frac{3}{h^2}$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad f\left(-2+h\right)=f\left(-2-h\right)$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $x=2$ pour axe de symétrie.