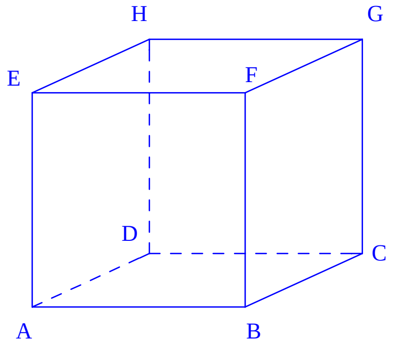
TS

Exercices sur l'orthogonalité de l'espace

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$, on considère un cube ABCDEFGH (figures à faire à la règle).
On placera les points supplémentaires éventuels précisés dans chaque exercice.



$\boxed{1}$ 1°) Les droites (AB) et (FG) sont-elles sécantes ?
Quelles sont leurs parallèles passant par E ?
Dans quel plan ces parallèles sont-elles contenues ?
Dans ce plan, que peut-on en dire ?
2°) Reprendre le 1°) avec les mêmes droites en remplaçant E par C.
3°) Reprendre le 1°) en remplaçant E par A.

$\boxed{2}$ 1°) Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ? de (AE) et (GH) ?
2°) La propriété : « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est vraie dans le plan mais reste-t-elle vraie dans l'espace ?

$\boxed{3}$ Soit *P* le plan contenant les points B, C, E, H.
Citer deux droites contenues dans le plan *P* qui sont orthogonales à (BF).
La droite (BF) est-elle orthogonale à *P* ?

$\boxed{4}$ Démontrer que (BF) ⊥ (AC).
Méthode : Chercher un plan contenant (AC) orthogonal à (BF).

$\boxed{5}$ 1°) Que peut-on dire des droites (EB) et (EH) ? Justifier.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère EBCH ? Justifier.
3°) Que peut-on dire de (EB) et (CH) ? Pourquoi ?
4°) Que peut-on dire de (EB) et (AF) ? (AF) et (CH) ?

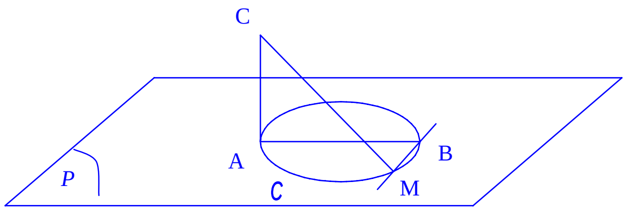
$\boxed{6}$ Dans chaque cas, indiquer si les droites sont orthogonales non coplanaires ou perpendiculaires (justifier) :
(AB) et (CG) ; (EB) et (AF) ; (AE) et (BD) ; (AC) et (CG).

$\boxed{7}$ 1°) Démontrer que (BD) ⊥ (AE).
2°) Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? Justifier.
3°) À l'aide des questions précédentes, que peut-on dire de la droite (BD) et du plan (AEC) ?

$\boxed{8}$ Dans chaque cas, trouver une droite perpendiculaire à chacune des deux droites (faire une figure dans chaque cas sur laquelle on tracera les deux droites en bleu et la perpendiculaire commune en rouge) :
(AE) et (BC) ; (AB) et (FH) ; (EF) et (BG) ; (AF) et (CH).

$\boxed{9}$ Soit O le centre de la face EFGH et *P* le plan contenant les points D, B, F, O, H.
1°) Démontrer que (HF) ⊥ (EG).
2°) Démontrer que (BF) ⊥ (EG).
3°) Que représente le plan *P* pour le segment [EG] ?
4°) Démontrer que (DF) ⊥ (EG) et que (BH) ⊥ (EG).

$\boxed{10}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.



Reproduire la figure.

1°) Démontrer que (AC) ⊥ (MB). Citer le théorème utilisé.
2°) Démontrer que (MB) ⊥ (AMC). Citer le théorème utilisé.
3°) En déduire que (MB) ⊥ (MC). Citer le théorème utilisé.
4°) Démontrer que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

$\boxed{11}$ Soit ABCD un tétraèdre régulier c'est-à-dire dont toutes les arêtes ont la même longueur (et par conséquent dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux).
On note I le milieu de [AB].
Faire une figure en perspective cavalière.
1°) Démontrer que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).
2°) En déduire que (AB) ⊥ (CD).
3°) On note J le milieu de [CD].
Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
On dit que c'est la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Dans un tétraèdre quelconque, la droite (ou le segment) joignant les milieux de deux arêtes opposées est appelée une bimédiane.
On démontre que les trois bimédianes d'un tétraèdre quelconque sont concourantes en leur milieu (propriété de parallélogrammes définis par les milieux des arêtes).
Ce point de concours est le centre de gravité du tétraèdre.

Dans un tétraèdre régulier, le point de concours des bimédianes est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

4°) Question supplémentaire
On note *a* la longueur commune à toutes les arêtes du tétraèdre ABCD.
Exprimer IJ en fonction de *a*.

Variante écrite le 3-12-2020

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$, $C \neq D$, $CA = CB$ et $DA = DB$.
Démontrer que $(AB) \perp (CD)$.

$\boxed{12}$ Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.

1°) Le but de cette question est de démontrer que $(DF) \perp (ACH)$.
On propose deux méthodes indépendantes l'une de l'autre.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
a) Démontrer que $(DF) \perp (AH)$. Il y a plusieurs méthodes possibles.
b) Démontrer que $(DF) \perp (CH)$.
c) En déduire que $(DF) \perp (ACH)$.

2$^{\text{e}}$ méthode :
a) Démontrer que D est équidistant des points A, C, H.
b) Démontrer que D est équidistant des points A, C, H.
c) En déduire que $(DF) \perp (ACH)$.

2°) Démontrer que $(DF) \perp (BEG)$.

3°) Que peut-on en déduire pour les plans (ACH) et (BEG) ?

$\boxed{13}$ Soit S une sphère de centre O et de rayon 3.
Soit P un plan tel que $d(O, P) = 2$.
Que peut-on dire de l'intersection de S et P ?

$\boxed{14}$ Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[EH]$, $[AE]$.
1°) On note P le plan médiateur de $[BH]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N appartiennent à P.
2°) Justifier que O est le milieu des segments $[IL]$, $[JM]$, $[KN]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N sont situés sur un même cercle du plan P.
3°) Déterminer la nature du triangle OIJ.
4°) Déduire des questions précédentes la nature de l'hexagone IJKLMN.

$\boxed{15}$ Calcul du volume d'un tétraèdre régulier
Soit ABCD un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont pour longueur a.
Exprimer le volume de ABCD en fontion de a.
Indication :
Soit O le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
O est le centre du triangle équilatéral ABC.

$\boxed{16}$ Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BJ} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK} = \lambda\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DL} = \lambda\overrightarrow{DA}$ où λ est un réel quelconque.
Démontrer que I, J, K, L sont coplanaires et déterminer la nature du quadrilatère IJKL en utilisant les vecteurs.

On suppose A, B, C, D deux à deux distincts.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un losange.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un rectangle.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un carré.

Cas particulier :
On suppose que ABCD est un un tétraèdre régulier et que I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$.
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

Réponse : IJKL est un carré.
On retiendra que la section d'un tétraèdre régulier par un plan peut être un carré.

$\boxed{17}$ Soit OAB un triangle rectangle en O.
Soit Δ la perpendiculaire en O au plan (OAB) et soit C un point de Δ distinct de O.
Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).
Démontrer que (CH) est orthogonale à (AB).

$\boxed{18}$ Soit ABCDEFGH un pavé droit et M un point quelconque de (FG).
Déterminer le projeté orthogonal de M sur (AB).

$\boxed{19}$ Soit ABCD un tétraèdre régulier.
Soit M un point quelconque intérieur au tétraèdre.
On note I, J, K, L ses projetés orthogonaux respectifs sur les plans (ABC), (BCD), (ACD), (BAD).
Démontrer que la somme $MI + MJ + MK + ML$ est constante (indépendante de la position de M à l'intérieur du tétraèdre).

On retiendra :

La somme des distances d'un point quelconque intérieur à un tétraèdre régulier aux quatre faces est constante.

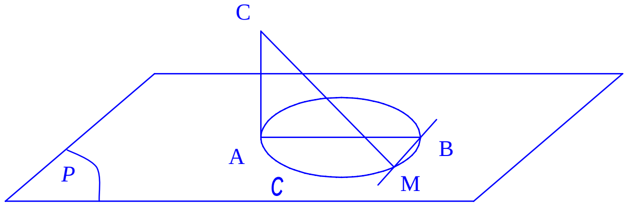
La somme des distances d'un point quelconque intérieur à un triangle équilatéral aux trois côtés est constante.
On peut faire des essais en mesurant.

$\boxed{20}$ Soit ABCD un tétraèdre.
On note h_A, h_B, h_C, h_D les longueurs des hauteurs issues respectivement de A, B, C, D.
Démontrer que l'on a $\mathcal{A}_{ABC} \times h_D = \mathcal{A}_{BCD} \times h_A = \mathcal{A}_{CDA} \times h_B = \mathcal{A}_{DAB} \times h_C$.

$\boxed{21}$ idée notée le 20 février 2021
Formule de Héron dans l'espace

Version plus courte de l'exercice **10** :

10 Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.



Reproduire la figure.

1°) Démontrer que (MB) ⊥ (MC).
2°) Démontrer que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

Version plus courte de l'exercice **12** :

12 Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.
Démontrer que (DF) ⊥ (ACH).

Solutions

On peut utiliser le symbole // pour désigner :
- deux droites parallèles
ou
- deux plans parallèles.

On peut utiliser le symbole ⊥ pour désigner :
- deux droites orthogonales
ou
- une droite et un plan orthogonal à cette droite
ou
- deux plans perpendiculaires.

On rappelle que l'on ne dit pas qu'une droite appartient à un plan ou fait partie d'un plan.
On dit qu'une droite est contenue ou est incluse dans un plan.

On rappelle que, pour des droites, on réserve l'adjectif perpendiculaire dans le cas de deux droites sécantes.

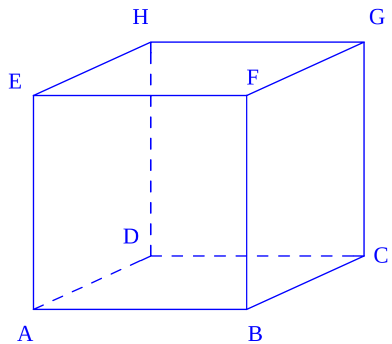
On commencera par chercher les exercices au brouillon en respectant les notations et en employant les symboles correctement (surtout pas de symboles utilisés comme des abréviations !).

Exemple de ce qu'il ne faut pas faire : Hugo Eremeef (noté le 3-12-2020)
(BC) et (EH) ⊂ (BCE) et ⊥ (BF)

1 **Énoncé**

1°) Les droites (AB) et (FG) sont-elles sécantes ?
Quelles sont leurs parallèles passant par E ?
Dans quel plan ces parallèles sont-elles contenues ?
Dans ce plan, que peut-on en dire ?
2°) Reprendre le 1°) avec les mêmes droites en remplaçant E par C.
3°) Reprendre le 1°) en remplaçant E par A.

Solution :



1°) (AB) et (FG) ne sont pas sécantes.

La parallèle à (AB) passant par E est la droite (EF).
La parallèle à (FG) passant par E est la droite (EH).

(EH) et (EF) sont contenues (ou incluses) dans le plan (EFG).

On peut dire que (EH) et (EF) sont perpendiculaires car EFGH est un carré.

On peut donc dire que les droites (AB) et (FG) sont orthogonales. Ce n'est cependant pas demandé dans l'énoncé.

2°) (AB) // (DC)
(FG) // (BC)

(DC) et (BC) sont contenues dans le plan (ABC).
(DC) ⊥ (BC)

3°) (AB) et (FG) ne sont pas sécantes.

La parallèle à (AB) passant par A est confondue avec elle-même c'est-à-dire (AB).
La parallèle à (FG) passant par A est la droite (AD).

(AB) et (AD) sont contenues dans le plan (ABC).

On peut dire que (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

Donc (AB) et (FG) sont orthogonales.

2 Énoncé

1°) Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ? de (AE) et (GH) ?
2°) La propriété : « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est vraie dans le plan mais reste-t-elle vraie dans l'espace ?

Solution :

1°)

On va démontrer que (AE) ⊥ (BC) (les deux droites sont orthogonales).
Comment le démontrer ?
On fait la parallèle à (AE) passant par B.
L'une des parallèles est confondue avec elle-même.

La parallèle à (AE) passant par B est la droite (BF).
La parallèle à (BC) passant par B est la droite (BC).

Les droites (BF) et (BC) sont perpendiculaires donc (AE) et (BC) sont orthogonales.

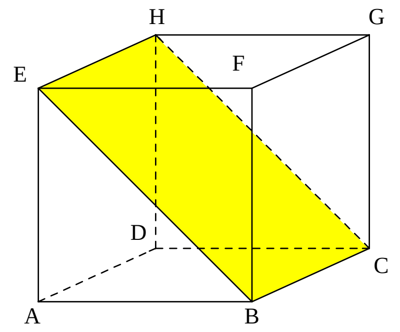
On démontre de même que (AE) et (GH) sont orthogonales.

2°) La propriété « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est fausse dans l'espace.
En effet, (BC) et (GH) sont toutes les deux orthogonales à (AE) mais ne sont pas parallèles entre elles.

3 Énoncé

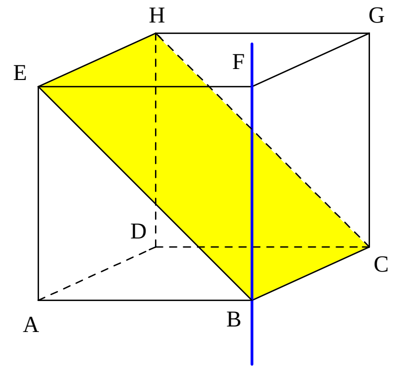
Soit *P* le plan contenant les points B, C, E, H.
Citer deux droites contenues dans le plan *P* qui sont orthogonales à (BF).
La droite (BF) est-elle orthogonale à *P* ?

Solution :



(BC) et (EH) sont deux droites contenues dans le plan *P* orthogonales à (BF).

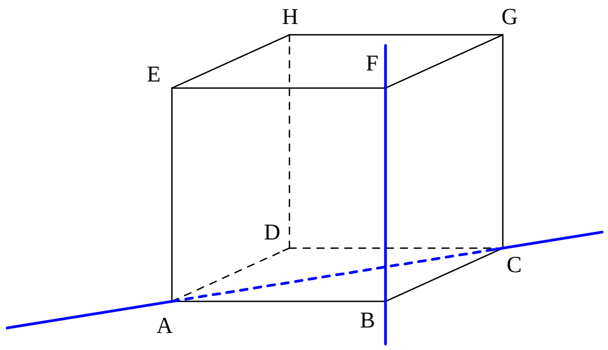
La droite (BF) n'est pas orthogonale au plan *P* (on le voit sur la figure).



4 Énoncé

Démontrer que (BF) ⊥ (AC).
Méthode : chercher un plan contenant (AC) orthogonal à (BF).

Solution :



Démontrons que la droite (BF) est orthogonale à la droite (AC).

La droite (BF) est orthogonale au plan (ABC) [on a le droit de le dire directement, cf. exemple du cours].
Or la droite (AC) est incluse dans le plan (ABC).
Donc (AC) et (BF) sont orthogonales.

$\boxed{5}$ **Énoncé**

1°) Que peut-on dire des droites (EB) et (EH) ? Justifier.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère EBCH ? Justifier.
3°) Que peut-on dire de (EB) et (CH) ? Pourquoi ?
4°) Que peut-on dire de (EB) et (AF) ? (AF) et (CH) ?

Solution :

1°) (EH) $\perp$ (EAB)

(EB) $\subset$ (EAB)

Donc (EB) $\perp$ (EH)

2°) EBCH est un parallélogramme avec un angle droit.

Dans un parallélépipède, on a le droit de dire directement que EBCH est un parallélogramme [accepté comme ça, sans plus de détail].

Donc EBCH est un rectangle.

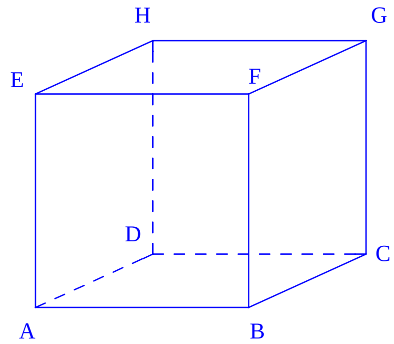
3°) On sait que EBCH est un rectangle
Donc (EB) / / (CH).

4°)
(EB) $\perp$ (AF) (diagonales d'un carré)

(AF) $\perp$ (CH) car (CH) / / (EB)

$\boxed{6}$ **Énoncé**

Dans chaque cas, indiquer si les droites sont orthogonales non coplanaires ou perpendiculaires. Justifier.
(AB) et (CG) ; (EB) et (AF) ; (AE) et (BD) ; (AC) et (CG).



Solution :

• Les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires. Les droites (CG) et (BF) sont parallèles. Donc les droites (AB) et (CG) sont orthogonales non coplanaires.

• Les droites (AF) et (EB) sont les diagonales du carré ABFE, toutes deux incluses dans le plan (ABE), donc elles sont perpendiculaires.

• La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC). Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan. La droite (BD) est incluse dans le plan (ABC). Donc les droites (AE) et (BD) sont orthogonales non coplanaires.

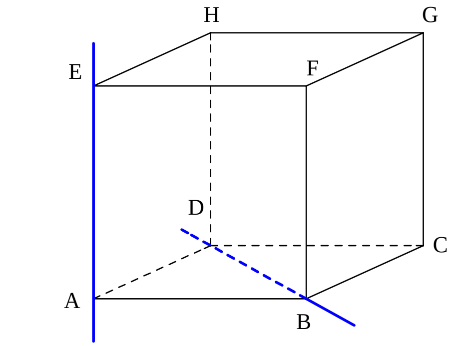
• La droite (CG) est orthogonale au plan (ABC) alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan. La droite (AC) est incluse dans le plan (ABC). Donc les droites (CG) et (AC) sont orthogonales.
Comme de plus, elles sont sécantes en C, on peut dire qu'elles sont perpendiculaires.

$\boxed{7}$ **Énoncé**

1°) Démontrer que (BD) $\perp$ (AE).
2°) Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? Justifier.
3°) À l'aide des questions précédentes, que peut-on dire de la droite (BD) et du plan (AEC) ?

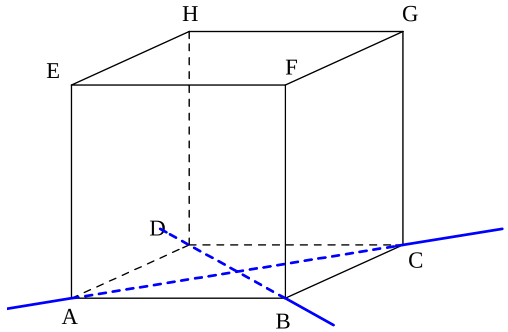
Solution :

1°) On a déjà répondu dans l'exercice précédent.

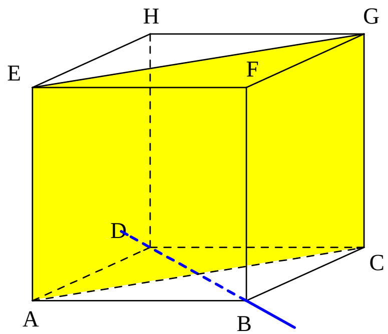


La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).
Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
Or la droite (BD) est incluse dans le plan (ABC).
On peut donc affirmer que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales non coplanaires.

2°) Les droites (AC) et (BD) sont les diagonales du carré ABCD. Nous pouvons dire d'une part, qu'elles sont incluses dans le même plan (ABC) ; d'autre part, qu'elles sont perpendiculaires.



3°)

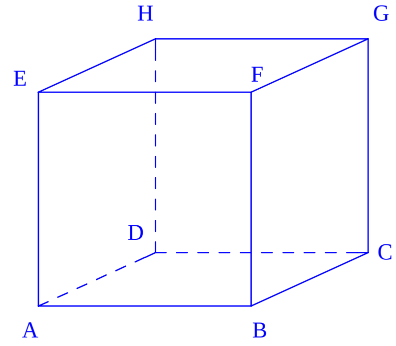


On a démontré que la droite (BD) est orthogonale aux droites (AE) et (AC). De plus, les droites (AE) et (AC) sont sécantes au point A et incluses dans le plan (AEC). Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan. Nous en concluons que la droite (BD) est orthogonale au plan (AEC).

Nous pouvons aller plus loin en disant que *P* est le plan médiateur de [EG].

8 Énoncé

Dans chaque cas, trouver une droite perpendiculaire à chacune des deux droites :
(AE) et (BC) ; (AB) et (FH) ; (EF) et (BG).

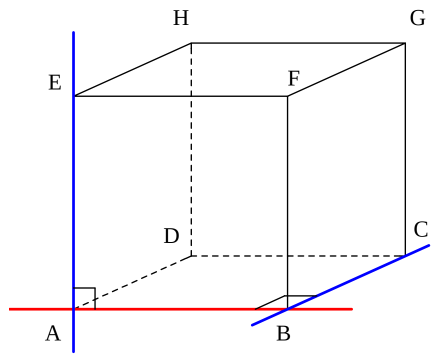


Solution :

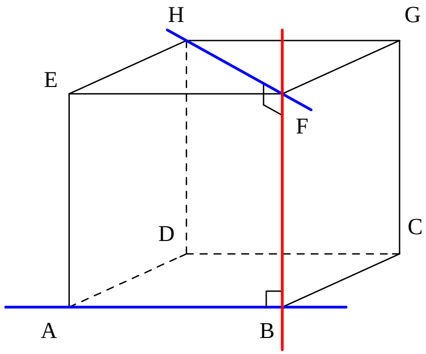
Il s'agit de la recherche de perpendiculaires communes à deux droites non coplanaires.

Dans chaque cas, on fait une figure.
On doit respecter les conventions de pointillés.
On peut éventuellement marquer le codage des angles droits.

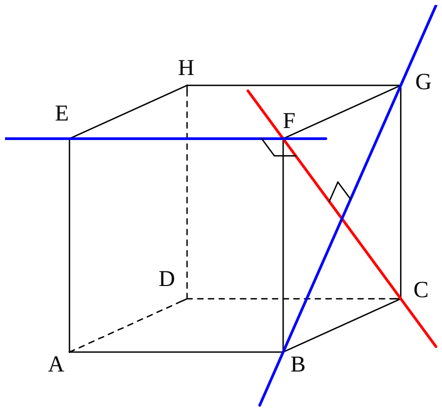
• Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires car ABCD est un carré.
De même, les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.
La droite (AB) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (BC) et (AE).



• Les droites (BF) et (AB) sont perpendiculaires car ABFE est un carré.
De même, les droites (BF) et (FH) sont perpendiculaires (résultat du cours à détailler éventuellement).
La droite (BF) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (AB) et (FH).



● Les droites (FC) et (EF) sont perpendiculaires (résultat du cours à détailler éventuellement).
De même, les droites (FC) et (BG) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré BCGF.
La droite (FC) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (EF) et (BG).



● On peut remarquer que les droites (AF) et (CH) sont orthogonales non coplanaires.
La perpendiculaire commune au deux droites est la droite (IJ) où I est le centre de la face ABFE et J le centre de la face CGHD.

On peut ne pas trop justifier l'orthogonalité.

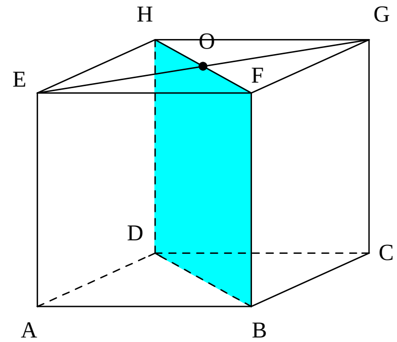
9 **Énoncé**

Soit O le centre de la face EFGH et *P* le plan contenant les points D, B, F, O, H.
1°) Démontrer que (HF) $\perp$ (EG).
2°) Démontrer que (BF) $\perp$ (EG).
3°) Que représente le plan *P* pour le segment [EG] ?
4°) Démontrer que (DF) $\perp$ (EG) et que (BH) $\perp$ (EG).

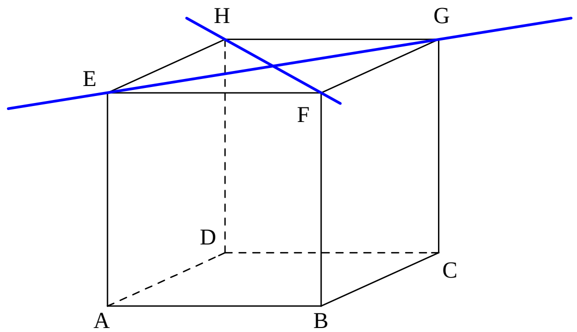
Solution :

ABCDEFGH : cube
O : centre de la face EFGH
P : plan contenant les points D, B, F, O, H

On fait une figure en plaçant notamment le point O.



1°) Les droites (HF) et (EG) sont les diagonales du carré EFGH. Donc les droites (HF) et (EG) sont perpendiculaires.



2°) La droite (BF) est orthogonale au plan (EFG) d'où la droite (BF) est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan (EFG).

La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG). Donc les droites (BF) et (EG) sont orthogonales.

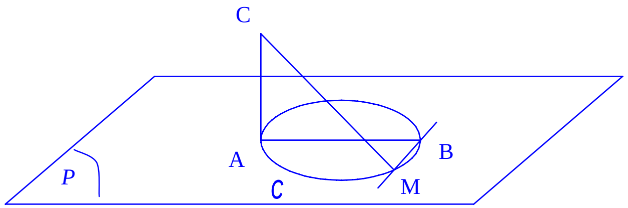
3°) (EG) $\perp$ (FH)
O est le milieu de [EG].
Or $O \in P$.
Donc *P* coupe [EG] en son milieu.
On en déduit que *P* est le plan médiateur de [EG].

4°) La droite (DF) est incluse dans le plan *P*. De plus, la droite (EG) est orthogonale au plan *P* et par suite à toutes les droites incluses dans le plan *P*. Donc les droites (EG) et (DF) sont orthogonales.
La droite (BH) est incluse dans le plan *P*. De manière analogue, nous démontrons que les droites (EG) et (BH) sont orthogonales.

10 **Énoncé**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.
1°) Démontrer que (AC) $\perp$ (MB). Citer le théorème utilisé.

2°) Démontrer que (MB) ⊥ (AMC). Citer le théorème utilisé.
3°) En déduire que (MB) ⊥ (MC). Citer le théorème utilisé.



En perspective cavalière, le cercle est représenté par une ellipse.

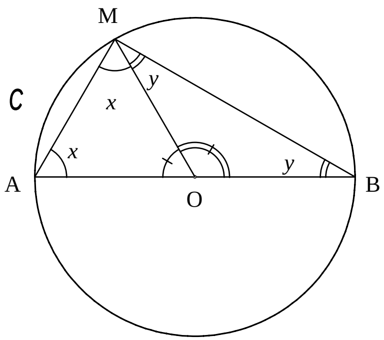
Solution :

1°) $M \in P$ et $B \in P$ donc la droite (MB) est incluse dans le plan *P*.
De plus, on sait que la droite (AC) est orthogonale au plan *P*.
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan (théorème 2).
Nous en concluons que les droites (AC) et (MB) sont orthogonales.

2°) On utilise la propriété du plan d'angle droit inscrit dans un cercle.

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.

On démontre aisément ce résultat en utilisant les angles.
La démonstration est calquée sur celle de la propriété de l'angle inscrit (notre propriété en est d'ailleurs un cas particulier).



Comme $OA = OB = OM$, les triangles OAM et OBM sont isocèles en O.
Les angles $\widehat{OAM}$ et $\widehat{AMO}$ d'une part et $\widehat{OBM}$ et $\widehat{BMO}$ d'autre part ont la même mesure.

On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{OAM}$ et y la mesure en radians de l'angle $\widehat{OBM}$.

On a $\widehat{AOM} = \pi - 2x$ et $\widehat{BOM} = \pi - 2y$.

Comme les points A, O, B sont alignés dans cet ordre, on a $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = \pi \quad (1)$.

(1) donne donc $\pi - 2x + \pi - 2y = \pi$ soit $2x + 2y = \pi$ d'où $x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre le segment [AB] et $M \in \mathcal{C}$ donc le triangle ABM est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.
Donc nous en déduisons que le triangle ABM est rectangle en M, et par suite, que les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.

Il est intéressant de coder alors la figure (codage de l'angle droit en perspective).

De plus, nous avons démontré que les droites (AC) et (MB) sont orthogonales. Les droites (AC) et (MA) sont sécantes au point A et sont incluses dans le plan (AMC).
Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan (théorème 1).
Nous en concluons que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMC).

3°) La droite (MB) est orthogonale au plan (AMC).
La droite (MC) est incluse dans le plan (AMC).
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan (théorème 2).
Nous en concluons que les droites (MC) et (MB) sont orthogonales.

4°) Démontrons que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

D'après la question 2°), (MB) ⊥ (MAC).

Or (MB) ⊂ (MBC).

Donc les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires (propriété du cours : si un plan *P* contient une droite *D* orthogonale à *Q*, alors les plans *P* et *Q* sont perpendiculaires).

Le mot « inscrit » s'applique aux polygones dans un cercle.
On dit qu'un polygone est « inscriptible » pour exprimer que les sommets appartiennent à un même cercle.

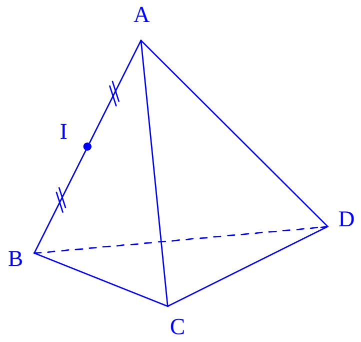
$\boxed{11}$ Énoncé

Soit ABCD un tétraèdre régulier.
On note I le milieu de [AB].
1°) Démontrer que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).
2°) En déduire que (AB) ⊥ (CD).
3°) On note J le milieu de [CD].
Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
On dit que c'est la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Étude du tétraèdre régulier

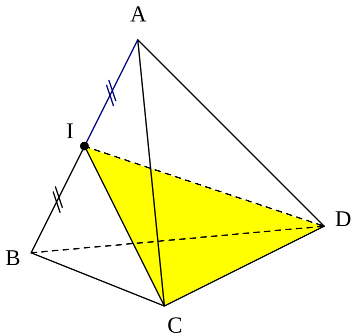
Solution :

Cet exercice est l'occasion de parler de la confection d'un tétraèdre régulier à l'aide d'une feuille de papier.



ABCD est un tétraèdre régulier donc toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

1°) **Démontrons que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).**



On peut tracer les segments $[IC]$ et $[ID]$ sur la figure pour faire apparaître le plan (ICD).

(AB) $\perp$ (ID) (car dans le triangle équilatéral ABD, la droite (ID) est la hauteur issue du point D) et (AB) $\perp$ (IC) (car dans le triangle équilatéral ABC, la droite (IC) est la hauteur issue du point C).

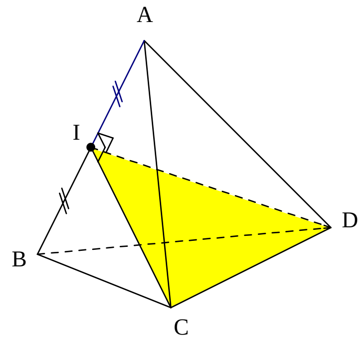
Or (IC) $\subset$ (ICD) et (ID) $\subset$ (ICD).

Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

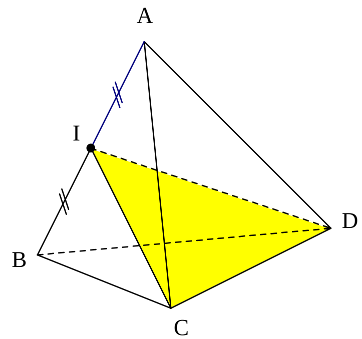
Donc (AB) $\perp$ (ICD).

Or le point I est le milieu du segment [AB].
Donc (ICD) est le plan médiateur du segment [AB].

Autre méthode : $AD = BD$, $AC = BC$, I est le milieu de [AB].



2°) **Déduisons-en que (AB) $\perp$ (CD).**



Il est difficile de visualiser l'orthogonalité des droites (AB) et (CD).

Le plan (ICD) est le plan médiateur du segment [AB]. Or (CD) $\subset$ (ICD).

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses (ou contenues) dans ce plan.

Donc (AB) $\perp$ (CD).

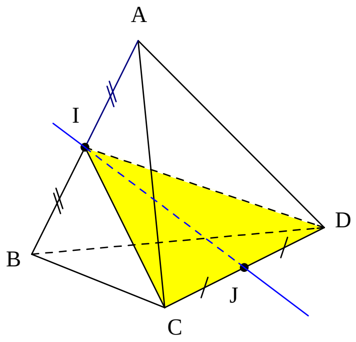
On retiendra la propriété suivante :

« Dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux. »

3°)

J : milieu de [CD]

Démontrons que (IJ) est perpendiculaire à (AB) et (CD).



$1^{\text{ère}}$ méthode :

On a $\text{IC}=\text{ID}$ (simple à démontrer) donc ICD est isocèle en I.
La droite (IJ) est donc la hauteur issue de I dans le triangle ICD.
Par suite, (IJ) $\perp$ (CD).

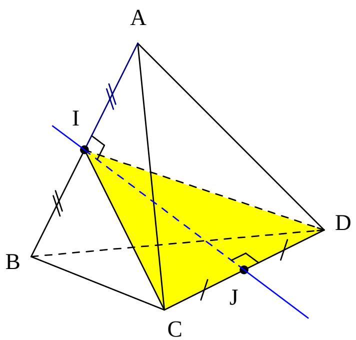
On démontre de même que (IJ) $\perp$ (AB).

2^{e} méthode :

D'une part, (IJ) est contenue dans le plan (CDI).
D'autre part, le plan médiateur de [AB] est le plan (CDI) d'après la question 1°).
Par conséquent, (AB) $\perp$ (CDI).

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.

On en déduit que (AB) $\perp$ (IJ).



4°) Question supplémentaire
On note a la longueur commune à toutes les arêtes du tétraèdre ABCD.
Exprimer IJ en fonction de a.

4°) Calculons IJ en fonction de a.

On se place dans le triangle CIJ rectangle en I.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\text{IJ}^2=\text{IC}^2-\text{CJ}^2$.
On a $\text{CJ}=\dfrac{a}{2}$ car J est le milieu de $[\text{CD}]$ et $\text{IC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (formule de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a, on retrouve cette formule de manière évidente par le théorème de Pythagore).

On reprend le calcul de IJ^2.

$$\text{IJ}^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{IJ}^2=\frac{3a^2-a^2}{4}$$

$$\text{IJ}^2=\frac{2a^2}{4}$$

$$\text{IJ}^2=\frac{a^2}{2}$$

On en déduit que $\text{IJ}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Il est possible d'utiliser le résultat d'un exercice vu plus loin sur le carré inscrit dans un tétraèdre régulier.

Variante écrite le 3-12-2020

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $\text{A}\neq\text{B}$, $\text{C}\neq\text{D}$, $\text{CA}=\text{CB}$ et $\text{DA}=\text{DB}$.
Démontrer que (AB) $\perp$ (CD).

Soit P le plan médiateur de [AB].

On a $\text{CA}=\text{CB}$ donc $\text{C}\in P$.
On a $\text{DA}=\text{DB}$ donc $\text{D}\in P$.
On en déduit que la droite (CD) est contenue dans P.
Par définition d'un plan médiateur, la droite (AB) est orthogonale à P.
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
On en déduit que (AB) $\perp$ (CD).

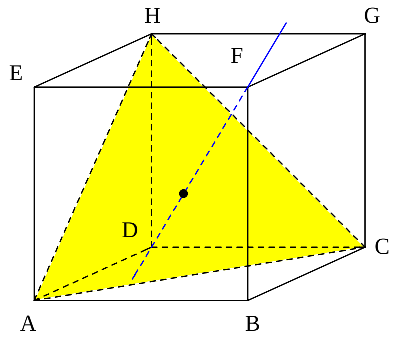
12

Ancienne version. La nouvelle version sera corrigée en classe.

Énoncé

Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.
1°) Démontrer que (DF) $\perp$ (AH).
2°) Démontrer que (DF) $\perp$ (CH).
3°) En déduire que (DF) $\perp$ (ACH).

Solution :



Le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (ACF) s'obtient en traçant la droite (DF) et la droite (OH) où O est le centre de la face ABCD.

1°) **Démontrons que (DF) ⊥ (AH).**

Indication :

1ère méthode : On commence par démontrer que (AH) ⊥ (DEF).

Les droites (AH) et (DE) sont les diagonales du carré ADHE donc elles sont orthogonales (même perpendiculaires).
De plus, (EF) ⊥ (AEH) donc (EF) ⊥ (AH).

Par suite : (AH) ⊥ (DEF).

Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2e méthode : On utilise les plans médiateurs.

Le plan médiateur de [AH] est (DEF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2°) **Démontrons que (DF) ⊥ (CH).**

Les droites (CH) et (DG) sont les diagonales du carré CDHG donc elles sont orthogonales.
De plus, (FG) ⊥ (CGH) donc (FG) ⊥ (CH).

Par suite : (CH) ⊥ (DFG).

Or (DF) ⊂ (DFG). Donc (DF) ⊥ (CH).

3°) **Déduisons-en que (DF) ⊥ (ACH).**

Il est difficile – voire impossible – de visualiser cette orthogonalité sur la figure (représentation en perspective cavalière).
Il est normal de ne pas arriver à visualiser cette orthogonalité.

D'après la question 1°), (DF) ⊥ (AH).

D'après la question 2°), (DF) ⊥ (CH).

Or (AH) ⊂ (ACH) et (CH) ⊂ (ACH).

(DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ACH) donc (DF) ⊥ (ACH).

2e méthode :

On note a la longueur de toutes les arêtes du tétraèdre.

On a $DA = DC = DH = a$ et $FA = FC = FH = a\sqrt{2}$ (formule de la diagonale d'un carré)

Le D est équidistant des points A, C, H
De même, F est équidistant des points A, C, H.

Les points D et F appartiennent donc à l'axe du cercle circonscrit au triangle ACH (qui est un triangle équilatéral).

On en déduit que (DF) ⊥ (ACH).

2°) $DB = DE = DG = a\sqrt{2}$ (formule de la diagonale d'un carré) et $FB = FE = FG = a$.

Les points D et F appartiennent donc à l'axe du cercle circonscrit au triangle BEG (qui est un triangle équilatéral).

On en déduit que (DF) ⊥ (BEG).

3°) D'après les questions, (DF) ⊥ (ACH) et (DF) ⊥ (BEG).
Or si une droite est orthogonale à deux plans, alors les deux plans sont parallèles.

On en déduit que (ACH) // (BEG).

Complément important :

D'après un résultat vu en exercice dans le chapitre sur les vecteurs de l'espace, le point d'intersection I de la droite (DF) avec le plan (ACH) vérifie $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

On démontre aisément que le triangle ACH est équilatéral.
Le point I est le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit.

La droite (DF) est donc l'axe du cercle circonscrit au triangle ACH.

Autre version :

1°) **Démontrons que (DF) ⊥ (AH).**

Le plan médiateur de [AH] est (DEF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2°) **Démontrons que (DF) ⊥ (CH).**

Le plan médiateur de [CH] est (DAF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DFA). Donc (DF) ⊥ (CH).

3°) **Déduisons-en que (DF) $\perp$ (ACH).**

(DF) $\perp$ (AH) et (DF) $\perp$ (CH).

Or (AH) $\subset$ (ACH) et (CH) $\subset$ (ACH).

(AH) et (CH) sont deux droites sécantes du plan (ACH).

Donc (DF) $\perp$ (ACH).

Nouvelle version :

2°)

Le 14-1-2021

Ex. sur vecteurs de l'espace / orthogonalité

(DF) $\perp$ (BEG)

Le point d'intersection de (DF) et (BEG) est le point d'intersection I de (BD) et (DF).
I est le centre de gravité du triangle BEG.
BEG est un triangle équilatéral.

13

On commence par faire une figure (voir figure de l'intersection d'une sphère et d'un plan dans les cours).

On sait que $\mathrm{d}(\mathrm{O}, P) = 2$ et que le rayon de S est égal à 3.

On a donc $\mathrm{d}(\mathrm{O}, P) < 3$.

Par conséquent, l'intersection de S et P est le cercle de centre H, projeté orthogonal de O sur P, et de rayon $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.