Exercices sur la dérivation

$\boxed{1}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$, continue sur I et dérivable sur $]a\,;b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
Soit d un réel n'appartenant pas à I.
Démontrer qu'il existe une tangente à $\mathcal{C}$ coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $(d\,;0)$.

Indication : Considérer la fonction g définie sur I par $g(x)=\dfrac{f(x)}{d-x}$.

$\boxed{1 \text{ bis}}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$, continue sur I et dérivable sur $]a\,;b[$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b.
Soit D un point de (AB) n'appartenant pas au segment [AB].
Démontrer qu'il existe une tangente à $\mathcal{C}$ par D.
Indication : On notera d l'abscisse de D. d est un réel n'appartenant pas à I.
Considérer la fonction g définie sur I par $g(x)=\dfrac{f(x)}{d-x}$.

$\boxed{2}$ 1°) Soit f une fonction de classe C^n ($n\in\mathbb{N}^*$) définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note g_n la fonction définie par $g_n(x)=x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout réel x non nul, on a $g_n^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\times f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Indication : On commencera par établir que pour tout réel x non nul, on a
$g_{n+1}^{(n+1)}(x)=xg_n^{(n+1)}(x)+(n+1)g_n^{(n)}(x)$.
2°) **Applications**
Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions $x\mapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $x\mapsto x^{n-1}\ln|x|$.

$\boxed{3}$ Démontrer que $\forall(x\,;y)\in[1\,;+\infty[^2\quad \left|\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-\ln\left(\sqrt{y}+1\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{4}|x-y|$.

$\boxed{4}$ Démontrer que $\forall(x\,;y)\in\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]^2\quad |x-y|\leqslant|\tan x-\tan y|\leqslant 2|x-y|$.

$\boxed{5}$ Soit x et y deux réels strictement positifs tels que l'on ait $x<y$.
Démontrer que l'on a : $\dfrac{y-x}{y}<\ln y-\ln x<\dfrac{y-x}{x}$.

$\boxed{6}$ Démontrer que pour tout couple (x, y) de réels on a : $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

$\boxed{7}$ Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\mathrm{l}$ où l est un réel.
Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\mathrm{l}$. La réciproque est-elle exacte ?

$\boxed{8}$ Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=g(0)$ et, pour tout réel x, on a : $f'(x)\leqslant g'(x)$.
Comparer f et g.

$\boxed{9}$ Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ (a et b étant deux réels tels que $a<b$) telle que $f(a)=f(b)=0$.
Démontrer qu'il existe un réel k positif ou nul tel que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$ on ait $|f(x)|\leqslant k|x-a||x-b|$.

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f: x\mapsto \mathrm{E}(x)\times\sin(\pi x)$.
1°) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2°) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{11}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Démontrer que l'équation $(x-1)(x-2)...(x-n)+x(x-2)...(x-n)+...+x(x-1)(x-2)...(x-n+1)=0$ admet au moins n racines x_1, x_2, …, x_n dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, $x_k\in]k-1\,;k[$.

$\boxed{12}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$, de classe C^1 sur I telle que $f(b)-f(a)=(b-a)\sup\limits_{[a\,;b]}f'$.
Démontrer que la fonction f est affine.

$\boxed{13}$ Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels convergeant vers 0 telles que pour tout entier naturel n, on ait : $-1<a_n<0<b_n<1$.
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0.
Démontrer que $\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}f'(0)$.

$\boxed{14}$ On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(x-1)y''-xy'+y=0$.
1°) Démontrer que, si $f\in E$, alors, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a : $f^{(3)}(x)=f''(x)$.
En déduire que, si $f\in E$, alors $f^{(3)}=f''$.
2°) En déduire l'ensemble E.

$\boxed{15}$ Pour tout réel a, on note f_a la fonction définie par $f_a(x)=\mathrm{e}^{x\,\mathrm{ch}a}\,\mathrm{ch}(x\,\mathrm{sh}a)$.
Calculer la dérivée n-ième de f_a.

16 Soit a et b deux réels tels que $a+\mathrm{i}b$ soit une racine n-ième de l'unité $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$.

Déterminer la dérivée n-ième de f.

17 **Question préliminaire :** Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $\sin x\leqslant x$.

Soit x un réel positif ou nul.

On cherche à comparer $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$.

1°) Étudier la parité et la périodicité de la fonction $f : x\mapsto \cos(\sin x)-\sin(\cos x)$.

2°) Soit $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Démontrer que $\sin(\cos x)\leqslant\cos x$ et $\cos(\sin x)\geqslant\cos x$ (on pourra utiliser le résultat préliminaire).

Conclure.

3°) Soit $x\in\left[\pi\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Démontrer que $\sin(\cos x)\leqslant 0$ et $\cos(\sin x)\geqslant 0$. Conclure.

4°) Quel est le signe de la fonction f ?

18 Soit u, v, w trois fonctions de classe C^2 sur un intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$

vérifiant $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b)\\ u(a) & v(a) & w(a)\\ u'(a) & v'(a) & w'(a)\end{vmatrix}=0$.

Démontrer qu'il existe $c\in\left]a\,;b\right[$ tel que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b)\\ u(a) & v(a) & w(a)\\ u''(c) & v''(c) & w''(c)\end{vmatrix}=0$.

19 Étudier la famille de fonctions $f_\alpha : x\mapsto \alpha\mathrm{e}^{-x}+x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

20 Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle $y'=|y-1|$ (E).

1°) Déterminer le sens de variation des solutions de (E).

2°) On suppose que (E) admet une solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne prend pas la valeur 1.

a) Démontrer que soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)>1$ soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)<1$.

b) Déterminer les solutions dans ce cas.

3°) On suppose que (E) admet une solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en un réel x_0.

a) Démontrer que $\forall x\leqslant x_0\quad f(x)\leqslant 1$ et que $\forall x\geqslant x_0\quad f(x)\geqslant 1$.

b) Déterminer les solutions dans ce cas.

4°) Représenter l'allure des courbes intégrales dans le plan.

21 1°) Soit P un polynôme à coefficients réels. On suppose que $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_p$ $(p\geqslant 2)$ sont solutions de l'équation $P(x)=\mathrm{e}^x$ ($\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_p$).

Démontrer que l'équation $P'(x)=\mathrm{e}^x$ admet au moins $p-1$ solutions.

2°) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout polynôme P non nul à coefficients réels de degré n, l'équation $P(x)=\mathrm{e}^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Rédiger proprement en formulant clairement la propriété sous la forme d'une phrase quantifiée.

Idée :

À l'intérieur de la récurrence, on distinguera deux cas :

- L'équation $P(x)=\mathrm{e}^x$ n'a aucune solution.
- L'équation $P(x)=\mathrm{e}^x$ admet au moins une solution. On notera $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_p$ p solutions distinctes.

Complément :

Notée le mercredi 8 novembre 2023

Justifier que lorsque les coefficients de P sont des nombres rationnels non nuls, les solutions éventuelles non nulles sont irrationnelles.

22 On considère la fonction $f : x\mapsto\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2°) On pose $\mathrm{I}=\left[1\,;+\infty\right[$.

- Démontrer que $\alpha\in\mathrm{I}$.
- Démontrer que I est stable par f.
- Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}$.
- Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $|f(x)-\alpha|\leqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}|x-\alpha|$.

3°) Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in\mathrm{I}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n|u_0-\alpha|$.

b) En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

23 1°) Démontrer que, pour tout réel t, on a : $-1\leqslant\frac{2t}{1+t^2}\leqslant 1$.

2°) On cherche les fonctions f définies et dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$\forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ ($\mathcal{R}$).

a) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

b) Déterminer toutes les fonctions constantes vérifiant la relation ($\mathcal{R}$).

Dans toute la suite, on supposera désormais f non constante.

3°) a) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $-1<f(x)<1$.

b) Calculer $f(0)$ puis démontrer que f est impaire.

4°) On pose $a=f'(0)$.

a) En utilisant la définition de la dérivée, démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=a\left[1-\left(f(x)\right)^2\right]$.

b) Peut-on avoir $a=0$?

c) En déduire que f est strictement monotone.

5°) a) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$, on ait : $\frac{1}{1-t^2}=\frac{\alpha}{1-t}+\frac{\beta}{1+t}$.

b) Déterminer toutes les fonctions f dérivables non constantes vérifiant ($\mathcal{R}$).

24 On cherche une fonction f telle que, pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de son ensemble de définition, on ait : $f(xy)=f(x)+f(y)$ ($\mathcal{R}$).

1°) **Un cas évident**

On suppose que f est définie en 0.

Déterminer $f(x)$ pour tout réel x de son ensemble de définition. Il vaudrait mieux mettre f définie sur $\mathbb{R}$.

Conclure dans ce cas.

2°) **Une solution plus intéressante**

On supposera dorénavant que f n'est pas définie en 0.

Plus précisément, on cherche une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie ($\mathcal{R}$).

a) Déterminer $f(1)$.

b) Soit a un réel strictement positif fixé.

Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)+f(a)$? de la fonction $x \mapsto f(ax)$?

En déduire que si f vérifie ($\mathcal{R}$), alors pour tout réel $x>0$, on a : $f'(ax)=\dfrac{1}{a}f'(x)$, puis que $f'(a)=\dfrac{k}{a}$ où k est une constante.

c) Que peut-on en déduire pour f ?

25 Soit n un entier naturel.

Déterminer l'ensemble E_n des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}=0$.

Indication : On pourra considérer, pour $f\in\mathrm{E}_n$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.

26 Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f''\leqslant 0$.

Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x+1)\leqslant f(x+1)-f(x)\leqslant f'(x)$.

27 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie par $g(x)=2f(x)-xf'(x)$.

Démontrer que si g est paire, alors f est paire.

Indication : Établir une équation différentielle vérifiée par la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)-f(-x)$.

28 1°) Démontrer que pour tout entier naturel non k, on a : $\dfrac{1}{k+1}\leqslant \ln(k+1)-\ln k\leqslant \dfrac{1}{k}$.

2°) Déterminer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

29 1°) Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, on a : $\dfrac{1}{k+1}\leqslant \ln(k+1)-\ln k\leqslant \dfrac{1}{k}$.

2°) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis un équivalent de S_n.

30 Soit α un réel donné tel que $0<\alpha<1$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha}\leqslant (k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}\leqslant \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$.

2°) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ puis un équivalent de S_n.

31 Soit α un réel strictement positif donné.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel non k, on a : $(\alpha+1)k^\alpha\leqslant (k+1)^{\alpha+1}-k^{\alpha+1}\leqslant(\alpha+1)(k+1)^\alpha$.

2°) Déterminer un équivalent de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^\alpha$ lorsque $n\to+\infty$.

32 Soit α un réel donné tel que $\alpha>1$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $k\geqslant 2$, on a : $\dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.

2°) Étudier la convergence de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

33 Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a\,;\,b]$ ($a<b$) telles que $f(a)=g(a)$ et $f(b)=g(b)$.

Démontrer qu'il existe au moins un point d'abscisse comprise entre a et b pour lequel les tangentes aux graphes de f et g sont parallèles.

Illustrer le résultat à l'aide d'un graphique.

34 Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;\,b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

(H_1) : f est dérivable en a et en b.

(H_2) : pour tout réel $x\in\mathrm{I}$ on a $f(x)\geqslant 0$.

(H_3) : $f(a)=f(b)=0$.

Démontrer, en utilisant la définition du nombre dérivé en un réel, que $f'(a)\geqslant 0$ et $f'(b)\leqslant 0$.

35 Le but de l'exercice est de démontrer que les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple $(a\,;\,b)$ de réels on ait : $f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ sont les fonctions polynômes de degré au plus 2.

1°) Démontrer que pour tout couple $(x\,;\,h)$ de réels on a : $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$.

2°) Dériver la relation précédente par rapport à x d'une part et par rapport à h d'autre part en justifiant à chaque fois que cela est possible.

En déduire alors que pour tout réel h, on a : $f'(h)=f'(0)+hf''(0)$.

3°) Conclure.

36 En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, déterminer les fonctions *f* dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (*a* ; *b*) de réels on ait : $f(b)-f(a)=\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

37 Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur un intervalle $[a\,;b]$ où *a* et *b* sont deux réels tels que $a<b$, continues sur $[a\,;b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$.
On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$.
Démontrer que $g(a)\neq g(b)$.
Démontrer qu'il existe $c\in\,]a\,;b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

38 Soit *f* une fonction appartenant à $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x)=xf(x)$ pour tout *x* appartenant à $\mathbb{R}$.
On suppose que $1\leqslant g'\leqslant 2$.
1°) Démontrer que *g* est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2°) Démontrer que $1\leqslant f\leqslant 2$.

39 Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[0,a[$ (où *a* désigne un réel strictement positif ou $+\infty$) et dérivable telle que $f(0)=0$.
1°) On suppose qu'il existe un réel *k* tel que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, $|f'(x)|\leqslant k|f(x)|$.
Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x\mapsto [f(x)]^2\mathrm{e}^{-2kx}$.
En déduire que *f* est identiquement nulle sur I.
2°) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle $\begin{cases} y'=\frac{\sin y}{1+y^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$.

40 Soit *P* un polynôme non constant à coefficients réels.
Démontrer que l'équation $P(x)=\cos x$ admet un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.
Commencer par restreindre l'intervalle.

41 On considère la fonction $f : x\mapsto 1+\frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}$.
1°) On pose $\mathrm{I}=\left[\frac{3}{4}\,;\frac{5}{4}\right]$.
a) Démontrer que I est stable par *f*.
b) Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $|f'(x)|\leqslant\frac{4}{9}$.
c) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans I.
d) Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $|f(x)-\alpha|\leqslant\frac{4}{9}|x-\alpha|$.
2°) Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0\in\mathbb{R}^*$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel *n*. Démontrer que (u_n) est bien définie et que tous les termes sont dans I à partir de l'indice 1.
Démontrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

42 Soit *P* un polynôme à coefficients réels admettant *p* racines dans $\mathbb{R}$ deux à deux distinctes.
Démontrer que pour tout réel $\lambda>0$ le polynôme $P'+\lambda P$ admet au moins *p* racines dans $\mathbb{R}$.
Indication : Considérer la fonction $f : x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

43 Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=\,]a\,;b[$ où *a* et *b* sont deux réels tels que $a<b$.
On suppose que *f* est de classe C^1 sur I et que $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$.
Démontrer que $f'(\mathrm{I})=\mathbb{R}$.

44 Soit *f* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout réel *x*, $f'(x)\leqslant 0$ et α un réel strictement positif fixé.
Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=\alpha x$.

45 Soit *f* la fonction définie par $f(x)=x^2+\ln x$.
1°) Démontrer que *f* réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2°) Dresser le tableau de variation de f^{-1} ; étudier la dérivabilité de f^{-1}.
3°) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 1.
4°) Démontrer que $f^{-1}(x)$ est équivalent à $\sqrt{x}$ en $+\infty$ et que $(f^{-1})'(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

46 1°) Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto (x^2+1)\sin x$.
2°) Démontrer que l'équation $(x^2+1)\cos x+2x\sin x=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$.

47 1°) Soit *P* un polynôme non nul à coefficients réels de degré *n*.
Démontrer que l'équation $P(x)=\ln x$ admet au plus $n+1$ solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.
1°) On considère la fonction $\varphi : x\mapsto P(x)-\ln x$.
Combien l'équation $\varphi'(x)=0$ admet-elle au plus de solutions ?
2°) Conclure.

48 Soit *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$

$g(x)=\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

1°) Démontrer que *f* et *g* vérifient le théorème des valeurs intermédiaires.
2°) Démontrer que l'une des deux fonctions *f* ou *g* n'est pas la dérivée d'une fonction dérivable.
Indication : Considérer la fonction $f-g$.

49 Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose : $u_n=\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n}$.
Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque *n* tend vers $+\infty$ en utilisant la formule ou l'inégalité des accroissements finis.
Retrouver cet équivalent par une autre méthode.

50 Déterminer les fonctions *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f^2+(1+f')^2\leqslant 1$.

$\boxed{51}$ On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

- f admet une limite finie en $+\infty$;
- f' admet une limite finie en $+\infty$.

Démontrer que $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{52}$ Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$, continue sur $[0 ; 1]$, dérivable sur $]0 ; 1[$ telle que $f(0)=f(1)=0$.

On suppose de plus qu'il existe un réel $x_0\in\left]0;1\right[$ tel que $f(x_0)=1$.

Démontrer qu'il existe un réel $c\in\left]0;1\right[$ tel que $|f'(c)|\geqslant 2$.

$\boxed{53}$ Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle de la forme $[x_0\,;x_0+2h]$ où x_0 et h sont deux réels fixés avec $h>0$.

Démontrer qu'il existe un réel $\theta\in\left]0;1\right[$ tel que $f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)=h^2f''(x_0+2\theta h)$.

Indication : On pourra introduire la fonction $\varphi : t\mapsto f(x_0+t+h)-f(x_0+t)$.

$\boxed{54}$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période $T>0$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f s'annule en p points distincts de $[0 ; T[$.
Démontrer que f' s'annule en au moins p points de $[0 ; T[$ distincts de ceux de f.

$\boxed{55}$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un singleton et a un élément fixé de I.

Soit f, m, M trois fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- $m(x)\leqslant f(x)\leqslant M(x)$;
- $m(a)=f(a)=M(a)$;
- $m'(a)=M'(a)$.

Démontrer qu'alors f est dérivable en a et que $f'(a)=m'(a)=M'(a)$.
Ce résultat est parfois appelé le *théorème du sandwich*.

$\boxed{56}$ Soit $f : [0,a]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 $(a>0)$ telle que $f(0)=0$ et $f(a)f'(a)<0$.

Démontrer que f s'annule sur l'intervalle $]0,a[$.

$\boxed{58}$ Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{2\operatorname{ch} x}$.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution ℓ dans $\mathbb{R}$.

Justifier que $\ell\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$.

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $|f'(x)|\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1}-\ell|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\ell|$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$\boxed{59}$ Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
On pose $I=[a,b]$. Soit x_1, x_2, …, x_n n réels $(n\in\mathbb{N}^*)$ de I deux à deux distincts.
On pose $X=\{x_1,\dots,x_n\}$.

On considère une fonction f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en x_1, x_2, …, x_n.

1°) On suppose que f est dérivable sur I.

a) Démontrer que la fonction g définie sur $I\setminus X$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)}$ est prolongeable par continuité sur I.

b) En déduire qu'il existe un réel M tel que pour tout $x\in I$ on ait $|f(x)|\leqslant M\prod\limits_{i=1}^{n}|x-x_i|$ (1).

2°) On suppose que $n=1$ et que f est de classe C^1 sur I.
Proposer une valeur de M telle que (1) soit vérifiée.

3°) Cas général
On suppose que f est de classe C^n sur I.
Soit $t\in I\setminus X$ fixé. On pose $M_n=\sup\limits_{x\in I}\left|f^{(n)}(x)\right|$.

a) Déterminer la fonction polynomiale L de degré n telle que $L(t)=1$ et pour tout $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $L(x_i)=0$.

b) On considère la fonction h définie par $h(x)=f(x)-f(t)L(x)$.

Démontrer que $h^{(n)}$ s'annule en un point a de I.

c) Démontrer que $f(t)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\prod\limits_{i=1}^{n}(t-x_i)$.

d) En déduire que pour tout réel $x\in I$, on a : $|f(x)|\leqslant\dfrac{M_n}{n!}\prod\limits_{i=1}^{n}|x-x_i|$.

$\boxed{60}$ Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels on ait : $f(b)-f(a)=\dfrac{b^2-a^2}{2}f''\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Indication : Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f''(x)$.

$\boxed{61}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

Démontrer qu'il existe un réel $c\in\left]a;b\right[$ tel que $\dfrac{f(b)}{f(a)}=\mathrm{e}^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

62 **Généralisation du théorème de Rolle**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ (a réel fixé), à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ admettant une limite en $+\infty$, égale à $f(a)$.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(x) = f\left(a - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ $x \in]0,1]$ et $g(0) = f(a)$.

Démontrer que l'on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g ; on démontrera en particulier avec soin que g est continue sur l'intervalle [0, 1].
En déduire qu'il existe un point c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

63 Soit P un polynôme à coefficients réels admettant au moins n racines dans $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et a un réel non nul fixé.

Démontrer que le polynôme $P' + aP$ admet au moins n racines dans $\mathbb{R}$.

Indication : Considérer la fonction f définie par $f(x) = e^{ax}P(x)$.

Autre méthode :

On considère la fraction rationnelle $H = \dfrac{P'}{P}$.

1°) Déterminer la décomposition en éléments simples de H.
2°) Faire le tableau de variations de H.
3°) Conclure.

64

65 Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer qu'il existe des réels x_1, x_2, … x_n deux à deux distincts dans $[0,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n$.

Indication : Considérer une subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$.

66 Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [a,b]$ $(a < b)$ de classe C^2 telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ et $f'' \leqslant g''$.
Comparer f et g.

67 Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 $(a < b)$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Indication : Considérer la fonction g définie par $g(x) = \big(f(x) - f'(x)\big)e^{x}$.

68 Soit a_0, a_1, …, a_n des réels tels que $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$.

Démontrer que le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ admet au moins une racine réelle dans l'intervalle $]0,1[$.

69 Soit P un polynôme de degré n.

Démontrer que si P ne prend que des valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même du polynôme $Q = P + P' + \ldots + P^{(n)}$. **Indication :** On utilisera la fonction $f : x \mapsto e^{-x}Q(x)$.

70 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Démontrer par récurrence que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel n, on a :

$f^{(n)}(x) = \dfrac{\widetilde{P_n}(x)}{x^{3n}} \times f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f^{(n)}(0) = 0$ où P_n est un polynôme réel qu'on n'explicitera pas. En déduire le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

71 Question préliminaire : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, continue en 0 telle que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$.

1°) On pose $\varphi(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \frac{f(x)}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

2°) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On sait qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $0 < |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit x un réel tel que $0 < |x| \leqslant \alpha$.

a) Démontrer qu'il existe un entier naturel n tel que $\left|\dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) Démontrer que $\left|\dfrac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3°) En déduire que f est dérivable en 0.

72

73 On considère l'équation différentielle $y^2 - y'^2 = 4$ (E).

Déterminer les solutions constantes de (E).

Démontrer que si f est une solution (E) définie sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel h, la fonction $g : t \mapsto f(t+h)$ est aussi solution de (E).

74 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en un réel a.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

75 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f''(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

1°) Démontrer que $f(x+1)-f(x)-f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

2°) En déduire que si f a une limite finie en $+\infty$ alors $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

3°) Exhiber une fonction g dérivable, ayant une limite finie en $+\infty$ mais dont la dérivée n'est pas bornée en $+\infty$.

76 **Dérivée symétrique**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a.

1°) Démontrer que si f est dérivable à gauche et à droite en un point a de I, distinct des extrémités, alors elle admet une dérivée symétrique en a.

Remarques :

Le résultat est en particulier valable dans le cas d'une fonction dérivable en a.

Un certain nombre de calculatrices utilise cette méthode pour calculer un nombre dérivé ; le rapport tend alors plus vite vers ce nombre que celui de la définition.

Par ailleurs, la dérivée symétrique intervient dans l'étude des séries de Fourier.

2°) La réciproque est-elle exacte ?

77 Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0)=0$. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose

$$u_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que $\left(\min\limits_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} f'\right)\times S_n\leqslant u_n\leqslant\left(\max\limits_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} f'\right)\times S_n$.

En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

78 À tout couple (a,b) de réels on associe la fonction $f_{a,b}: x\mapsto ax+b\ln x$ définie sur l'intervalle $I=]0\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}_{a,b}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) On note E et F les points de $\mathcal{C}_{a,b}$ d'abscisses respectives 2 et 4.

Démontrer que E est le milieu de $[\mathrm{OF}]$.

2°) Démontrer que la tangente à $\mathcal{C}_{a,b}$ au point A d'abscisse e passe par O.

3°) Par quelle transformation du plan la courbe $\mathcal{C}_{-a,-b}$ se déduit-elle de la courbe $\mathcal{C}_{a,b}$? Expliquer.

Corrigé

1 $g(a)=g(b)=0$; $g'(x)=\dfrac{f'(x)(d-x)+f(x)}{(d-x)^2}$

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c\in\,]a\,;b[$ tel que $g'(c)=0$ soit $f'(c)(d-c)+f(c)=0$.

La tangente $\mathcal{C}$ au point d'abscisse c passe par le point de coordonnées $(d\,;0)$.

2 1°) On a $g_{n+1}(x)=xg_n(x)$. On applique ensuite la formule de Leibniz.

$$g_{n+1}(x)=x\times\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\times f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]'+(n+1)\times\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\times f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

12 $\exists c\in[a\,;b]$ tel que $f'(c)=\sup\limits_{[a\,;b]} f'$.

$$g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

$g(a)=0$ et $g(b)=0$

$g(x)=f(x)-f(a)-f'(c)(x-a)$

$g(x)=\underbrace{(x-a)}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(f'(\xi)-f'(c)\right)}_{\leqslant 0}$

$g'(x)=f'(x)-f'(c)$

x	a	b
$g(x)$	0 ↘	0

13

$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x)$

$f(a_n)=f(0)+a_nf'(0)+a_n\varepsilon(a_n)$

$f(b_n)=f(0)+b_nf'(0)+b_n\varepsilon(b_n)$

$$\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}=f'(0)+\frac{a_n\varepsilon(a_n)-b_n\varepsilon(b_n)}{a_n-b_n}$$

$$\frac{a_n\varepsilon(a_n)-b_n\varepsilon(b_n)}{a_n-b_n}=\frac{(a_n-b_n)\varepsilon(a_n)+b_n\varepsilon(a_n)-b_n\varepsilon(b_n)}{a_n-b_n}$$ (on introduit des termes « croisés »)

$$=\varepsilon(a_n)+\frac{b_n}{a_n-b_n}\left[\varepsilon(a_n)-\varepsilon(b_n)\right]$$

$$=\varepsilon(a_n)+\frac{b_n}{b_n-a_n}\left[\varepsilon(b_n)-\varepsilon(a_n)\right]$$

$0 \leqslant \dfrac{b_n}{b_n - a_n} \leqslant 1$ et $\varepsilon(b_n) - \varepsilon(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{a_n \varepsilon(a_n) - b_n \varepsilon(b_n)}{a_n - b_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0)

$\boxed{14}$ $E = \left\{ x \mapsto ax + b\mathrm{e}^x, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$\boxed{15}$ $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{x \,\mathrm{ch}(na)} \,\mathrm{ch}\big(x \,\mathrm{sh}(na)\big)$

Mieux : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x\left(\mathrm{e}^{a}\right)} + \mathrm{e}^{x\left(\mathrm{e}^{-a}\right)}}{2}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^{x\left(\mathrm{e}^{a}\right)} + \mathrm{e}^{-na} \times \mathrm{e}^{x\left(\mathrm{e}^{-a}\right)}}{2}$$

$\boxed{18}$ $\alpha \begin{pmatrix} u(b) \\ u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v(b) \\ v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} w(b) \\ w(a) \\ w'(a) \end{pmatrix} = 0$

$f = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$f(a) = f(b)$ donc $\exists d \in \left]a\,;b\right[\quad f'(d) = 0$.

$f'(a) = f'(b)$ donc $\exists c \in \left]a\,;b\right[\quad f''(c) = 0$.

$\boxed{21}$ **Version initiale de l'exercice :**

> Soit P un polynôme à coefficients réels.
> Démontrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - P(x)$.

On pose $n = \deg P$.

Si f s'annule une infinité de fois,
f' ’’ ’’ ’’ ,

$f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$. Absurde.

Ancienne version écrite à la main sur une feuille et tapée le samedi 19-12-2015 :

1°) Soit P un polynôme à coefficients réels.
On se propose de démontrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet un nombre fini de solutions.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et l'on considère la fonction $f : x \mapsto P(x) - \mathrm{e}^x$.
a) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.
b) Conclure.
2°) On suppose que P est non constant.
Démontrer que l'équation $P(x) = \cos x$ admet un nombre fini de solutions.
Commencer par restreindre l'intervalle en considérant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \left| P(x) - \cos x \right|$.

Pour le 2°), voir ex. sur les dérivées Christophe Bertault (je l'ai vu le 18-12-2015).

$\boxed{22}$ 1°) $\alpha = 1{,}1477576\ldots$ d'où $1 < \alpha < 1{,}1$.

$\boxed{25}$ $g^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \right)$

$\boxed{27}$ But : $\varphi(x) = 0$.

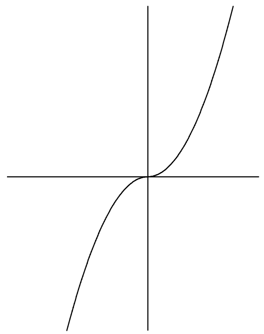
$\varphi'(x) = f'(x) + f'(-x)$

$2f(x) - xf'(x) = 2f(-x) + xf'(-x) \Leftrightarrow 2\left[f(x) - f(-x)\right] = x\left[f'(x) + f'(-x)\right]$

$\Leftrightarrow 2\varphi(x) = x\varphi'(x)$

On résout l'équation différentielle $xy' = 2y$.
On distingue deux cas :
1) Sur $\left]0\,;+\infty\right[\quad \varphi(x) = k_1 \mathrm{e}^{2\ln|x|} = k_1 x^2$
2) Sur $\left]-\infty\,;0\right[\quad \varphi(x) = k_2 \mathrm{e}^{2\ln|x|} = k_2 x^2$

La fonction φ est impaire d'où $k_1 = -k_2$.



Démontrons que $k_1 = 0$.

$\varphi'(x) = \begin{cases} 2kx \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ -2kx \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

La fonction φ' est paire et impaire donc nulle.

$\boxed{35}$ 2°) $f'(x+h) - f'(x-h) = 2hf''(x)$; $f'(x+h) + f'(x-h) = 2f'(x)$.
On fait $x = 0$ et on ajoute les égalités précédentes.
On obtient : $f'(h) = f'(0) + hf''(0)$.
Donc f' est affine.
3°) Conclure. Il faut faire la réciproque.

36 On s'inspire de l'exercice précédent.

$f'(x+h)+f'(x-h)=f'(x)$

On fait $h=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=0$ d'où f est constante sur $\mathbb{R}$.

43 Le résultat reste valable si l'on suppose seulement que f est dérivable sur I (en utilisant le théorème de Darboux).

Commencer par faire un graphique.

L'image d'un intervalle est un intervalle donc $\mathrm{J}=f'(\mathrm{I})$ est un intervalle.

On va démontrer que J n'est pas borné.

Soit c un élément fixé de I. Par exemple, on a : $c=\dfrac{a+b}{2}$.

On a : $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\xrightarrow[x\to b^-]{}+\infty$.

Soit A un réel.

Il existe donc un réel X tel que $\dfrac{f(X)-f(c)}{X-c}>\mathrm{A}$.

Or d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel Y tel que $\dfrac{f(X)-f(c)}{X-c}=f'(Y)$.

D'où $f'(Y)>\mathrm{A}$. Donc J n'est pas borné à droite.

On démontre de même que J n'est pas borné à gauche.

Le mieux est de faire un graphique. On trace la corde joignant les points d'abscisses respectives c et X puis on trace la tangente parallèle à cette corde.

45 On pose : $g(x)=f(x)-\alpha x$.

La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
On procède par comparaison.

Si $x\geqslant 0$, alors $f(x)\leqslant f(0)$.

Si $x\leqslant 0$, alors $f(x)\geqslant f(0)$.

g établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Autre méthode :

Comme f est décroissante, on sait que f admet soit une limite finie soit une limite infinie.

46 3°) $3y-x-2=0$

48 On peut aussi regarder le sujet de CAPES 2011 (session de novembre ou décembre 2010).

50 On démontre que f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

On démontre d'abord que f est bornée.

On démontre ensuite une f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour tout entier naturel n, il existe $c_n\in\,]n\,;n+1[$ tel que $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad [f(c_n)]^2+[1+f'(c_n)]^2\leqslant 1$.

On fait tendre n vers $+\infty$: $f'(c_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Donc $f(c_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Par conséquent, la limite de f en $+\infty$ est nulle.

On démontre de même en considérant les intervalles $[-n-1\,;-n]$ que la limite de f en $-\infty$ est nulle.

51 Idée : appliquer le TAF sur les intervalle $[n\,;n+1]$.

Pour tout entier naturel n, il existe $c_n\in\,]n\,;n+1[$ tel que $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$).

On fait tendre n vers $+\infty$: $f'(c_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

52 On distingue deux cas.

1er cas : $x_0\in\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$

On applique le TAF sur $[0\,;x_0]$: $\exists c\in\,]0\,;x_0[\,\subset[0\,;1]$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

Or $0<x_0<\dfrac{1}{2}$ d'où $\dfrac{1}{x_0}>2$. Par suite, $|f'(c)|>2$.

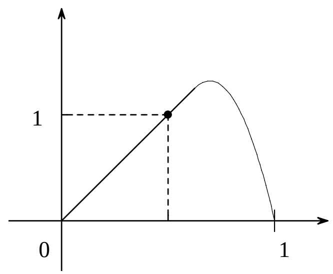
2e cas : $x_0\in\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$

On applique le TAF sur $[x_0\,;1]$: $\exists c\in\,]x_0\,;1[\,\subset[0\,;1]$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=-\dfrac{1}{1-x_0}$.

Or $\dfrac{1}{2}<x_0<1$ d'où $\dfrac{1}{1-x_0}>2$. Par suite, $|f'(c)|>2$.

3e cas : $x_0=\dfrac{1}{2}$

On peut avoir



$\boxed{54}$

$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p < T \quad \forall i \in [\![1,\ p]\!] \quad f(x_i) = 0$

On applique le théorème de Rolle dans tous les $]x_i\ ;\ x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1\ ;\ p-1[\![$:

$\exists (y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}) \in]0\ ;T[^{p-1}$ tel que $0 \leqslant x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_{p-1} < x_p < T$ et $f'(y_i) = 0$.

Faire deux schémas (droite réelle, marquer 0 et T, puis $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p$).

1[er] cas : $x_1 = 0$

Comme f est périodique de période T, alors $f(\mathrm{T}) = 0$.

Il existe alors $y_p \in]x_p\ ;T[$ tel que $f'(y_p) = 0$.

2[e] cas : $x_1 \neq 0$

On considère l'intervalle $[x_p\ ;\ x_1 + \mathrm{T}]$ (placer $x_1 + \mathrm{T}$ sur le schéma).

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $y_p \in]x_p\ ;\ x_1 + \mathrm{T}[$.

Si $y_p \in]x_p\ ;\mathrm{T}[$, alors c'est fini ; il n'y a rien à faire.

Si $y_p \in [x_p\ ;\mathrm{T}[$, alors on considère $y_p' = y_p - \mathrm{T}$.

On a : $y_p' \in [0\ ;\ x_1[$ et $f'(y_p') = f'(y_p) = 0$.

Conclusion : f' admet au moins p zéros distincts dans $]0\ ;T[$.

$\boxed{55}$ On procède par encadrement.

On part de l'encadrement : $m(x) - m(a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant M(x) - M(a)$.

On divise ensuite par $x - a$ en distinguant deux cas suivant que $x > a$ ou $x < a$ (on démontre ainsi que f est dérivable à gauche et à droite en a).

$\boxed{66}$ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [a,b]$ $(a < b)$ de classe C^2 telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ et $f'' \leqslant g''$.

Comparer f et g.

Solution : $f' - g'$ s'annule en au moins un réel x_0 de I.

$\boxed{74}$ On observe que $\dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a} = f(a) - a\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$.

$\boxed{75}$ Le professeur a indiqué à Henri Baillon de choisir une fonction f de la forme $f(x) = \dfrac{\cos u(x)}{x}$.

En cherchant un peu, il a trouvé $u(x) = x^3$.

$\boxed{78}$ 2°) $y = \left(a + \dfrac{b}{\mathrm{e}}\right)(x - \mathrm{e}) + a\mathrm{e} + b$ soit $y = \left(a + \dfrac{b}{\mathrm{e}}\right)x - \cancel{a\mathrm{e}} - \cancel{b} + \cancel{a\mathrm{e}} + \cancel{b}$

Questions de cours

$\boxed{1}$ Condition nécessaire d'extremum pour une fonction dérivable (énoncé et démonstration).

$\boxed{2}$ Théorème de Rolle (énoncé et démonstration)

$\boxed{3}$ Principe de Lagrange (sens de variation d'une fonction dérivable)

$\boxed{4}$ Dérivée d'un produit (énoncé et démonstration)

$\boxed{5}$ TAF (énoncé avec hypothèses précises et démonstration) ; illustration graphique.
Préciser la valeur de c lorsque l'on prend la fonction inverse sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ où a et b sont deux réels de même signe.
Préciser la valeur de c lorsque l'on prend la fonction carré sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ où a et b sont deux réels.

$\boxed{6}$ TPLD (théorème de prolongement dans une fonction dérivée) : énoncé et démonstration.

$\boxed{7}$ Dérivée d'une composée (formule avec hypothèses et démonstration).

$\boxed{8}$ Formule de Leibniz (formule et démonstration).

$\boxed{9}$ Fonctions de classe C^n. Définition et propriétés.

$\boxed{10}$ Dérivée d'une fonction réciproque (formule).

$\boxed{11}$ La dérivabilité d'une fonction f en un réel a entraîne la continuité de f en ce réel.

$\boxed{12}$ IAF

$\boxed{13}$ Définition de la dérivabilité d'une fonction f en un réel a et définition du nombre dérivé de f en a.
Définition équivalente avec la notation de Landau (avec les o).
Équivalence des deux définitions.
Intérêt de la deuxième définition ?

Le dimanche 25 février 2018

Questions de cours :

- dérivée n-ième des fonctions exp, cos, sin, $\dfrac{1}{x}$
- $g(x) = f(ax+b)$
  $g^{(n)}(x)$?
- dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x^2-1}$