Exercices sur les coordonnées dans le plan

1 Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on considère les points A(1 ; – 1), B(5 ; 1), $C\left(0 ; \frac{7}{2}\right)$ et $D\left(-2 ; \frac{5}{2}\right)$.

Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.

1°) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
2°) Soit E le symétrique de D par rapport à l'axe des ordonnées.
Démontrer que E appartient à la droite (BC).

2 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère les points A(– 10 ; 5), B(0 ; – 4), C(– 7 ; – 4) et le vecteur $\vec{u}$ (7 ; 5).
Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2°) Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HA} = \vec{u}$.
3°) Placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme et calculer les coordonnées de D.

3 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(– 1 ; 1), B(1 ; 2) et C(3 ; – 2).
Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.
Prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur.

1°) Calculer les longueurs AB, BC, CA. En déduire la nature du triangle ABC.
2°) Donner les coordonnées du centre Ω et le rayon *R* du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.
3°) Démontrer que le point E(3 ; 1) est un point du cercle $\mathscr{C}$.
4°) Calculer $\cos \widehat{ACB}$; en déduire la valeur arrondie à l'unité de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$.

4 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(5 ; 1), B(3 ; 2), C(1 ; – 3) et D(x_D , y_D).
1°) Calculer les coordonnées des milieux de [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] et [CD].
2°) Pour quelles valeurs de x_D et y_D le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?
3°) Pour quelles valeurs de x_D et y_D le quadrilatère ACDB est-il un parallélogramme ?

5 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(1 ; 3), B(– 3 ; 1) et $C\left(0 ; \sqrt{10}\right)$).
1°) Calculer les distances OA, OB et OC.
2°) Que représente O pour le triangle ABC ?
3°) Calculer le périmètre du triangle ABC.

6 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(1 ; 4), B(5 ; 1), C(1 ; – 2) et D(– 3 ; 1).
1°) Calculer les coordonnées des milieux de [AC] et de [BD].
2°) Calculer AC et BD.
3°) Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

7 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A (6 ; 3), B (– 3 ; 0), C (5 ; 4) et D (– 1 ; 1).
1°) Démontrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.
2°) Les points B, C et D sont-ils alignés ? Justifier.
3°) Déterminer *y* tel que le point M(25 ; *y*) soit aligné avec les points A et B.
4°) Soit $E\left(-\frac{7}{3} ; m\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de *m*, le quadrilatère DOAE est-il un trapèze ?

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(2 ; 5), B(4 ; – 2), C(– 5 ; 1) et D(– 1 ; 6).

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2°) Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?
3°) Soit K le point défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Déterminer les coordonnées du point K.
4°) Déterminer les coordonnées du point L, milieu de segment [BC].
5°) Démonter alors que les points A, K, L sont alignés.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points A(– 2 ; 5), B (2 ; – 1), C(5 ; 1), $D\left(-\frac{15}{4} ; -\frac{1}{2}\right)$.
On note M le milieu de [AC].
L'ensemble des questions (exceptée le 1°)) sera justifié à l'aide de calculs !

Placer les points A, B, C, D et M dans le repère (O, I, J).

1°) Quelles sont les coordonnées du point M ?
2°) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3°) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABCE soit un parallélogramme.
4°) Quelle est la nature exacte de ce parallélogramme ?
5°) Démontrer que les droites (MD) et (BC) sont parallèles.
6°) Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des ordonnées tel que A, B et F soient alignés.
7°) Déterminer les coordonnées du point H appartenant à l'axe des abscisses tel que les droites (AB) et (CH) soient parallèles.
8°) Quelles sont les coordonnées du point K, symétrique de C par rapport à A ?
9°) Déterminer les coordonnées du point G tel que : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{GB}$.

10 Soit ABC un triangle quelconque.
On note P, Q et R les points définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$.
Placer les points P, Q et R.
On se place dans le repère (A, B, C).

1°) Donner sans justification les coordonnées des points A, B et C.
2°) Calculer les coordonnées des points P, Q et R.
3°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
En déduire que les points P, Q et R sont alignés.

11 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère les points A(1 ; 2), B (5 ; – 2), C(– 3 ; 0) et D(5 ; a).
1°) Pour quelle valeur de a les points A, B, D sont-ils alignés ? changer en A, C, D
2°) Existe-t-il une (ou des) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) :
- B et D sont confondus ?
- la droite (BD) est parallèle à un axe du repère ?

12 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Faire un graphique en prenant 1 cm ou 1 « gros » carreau pour unité de longueur.
Placer les points A(– 2 ; 3), M(1,5 ; 1), B(2 ; 5) et T(1 ; – 3).
2°) Démontrer que le triangle ABM est isocèle en M.
3°) Démontrer que M est le milieu du segment [BT].
4°) Calculer les coordonnées du point C, symétrique du point A par rapport au point M.
5°) Déterminer la nature du quadrilatère ABCT.
6°) On appelle N le milieu de [BC] et K le point d'intersection des droites (TN) et (AC).
a) Que représente le point K pour le triangle TBC ?
b) En déduire que la droite (BK) coupe le segment [TC] en son milieu.

13 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points R(2 ; – 2), T(3 ; 3) et M(– 8 ; y) où y est un nombre réel.
1°) Calculer RT^2.
2°) Exprimer MT^2 en fonction de y.
3°) Exprimer MR^2 en fonction de y.
4°) Calculer y pour que le triangle MRT soit rectangle en R.

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points B(0 ; 2) et $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre J et de rayon 1.
1°) Démontrer que M est un point du cercle $\mathscr{C}$.
2°) La droite (BM) coupe la droite (OI) au point D. Soit K le milieu de [OD].
a) Déterminer, par le calcul, une équation de la droite (BM).
b) Calculer les coordonnées du point D.
c) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\sqrt{3};0\right)$.
3°) a) Démontrer que le triangle JMK est rectangle en M.
b) Que représente la droite (KM) pour le cercle $\mathscr{C}$?

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, I, J\right)$, on considère les points $A\left(5;2\right)$, $B\left(-4;-1\right)$ et $C\left(-3;-4\right)$.
Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.
Prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur.
1°) Calculer les distances AB, BC, AC. On donnera les valeurs exactes.
2°) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3°) On note D le point de coordonnées $\left(2;1\right)$. Démontrer que les points A, B, D sont alignés.

16 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, I, J\right)$, on considère les points $E\left(2;1\right)$, $F\left(-3;3\right)$ et $G\left(-1;-4\right)$.
Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.
Prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur.

Déterminer les coordonnées du point K tel que le quadrilatère EFGK soit un parallélogramme.

17 Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, I, J\right)$, on considère les points $A\left(-2;1\right)$, $B\left(3;6\right)$ et $C\left(4;-1\right)$.
Faire graphique en plaçant les points avec les pointillés pour indiquer leurs coordonnées sur les axes.
Prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur.

1°) Démontrer que le triangle ABC est isocèle.
2°) Déterminer les cordonnées du milieu K de $\left[AC\right]$.
3°) Déterminer les coordonnées du symétrique D de B par rapport à K.
4°) Quelle est la nature exacte du quadrilatère ABCD ?

Corrigé

$\boxed{2}$ 1°) $\overrightarrow{AB}(10\,;-9)$; $\overrightarrow{CA}(-3\,;9)$

2°) $H(-17\,;0)$

3°) On écrit l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ou mieux pour éviter les signes – : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.
On traduit en coordonnées cette dernière égalité.

$$\begin{cases} x_D-(-7)=-10 \\ y_D-(-4)=9 \end{cases}$$

$D(-3\,;5)$

$\boxed{3}$

1°)

$AB=\sqrt{5}$; $BC=2\sqrt{5}$; $CA=5$.
On a : $AC^2=25$ et $AB^2+BC^2=20+5=25$.
On constate que $AB^2+BC^2=AC^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2°) Le centre Ω est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$. Ω a pour coordonnées $\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$R=\frac{AC}{2}=\frac{5}{2}$$

3°) Pour savoir si E est sur le cercle, on va calculer la distance ΩE.

$$\Omega E=\frac{5}{2}$$

4°) $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{\sqrt{20}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\boxed{9}$

1°) Les coordonnées du point M sont $\left(\dfrac{3}{2}\,;3\right)$.

2°) D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est un triangle rectangle en B.
Les coordonnées de E sont (1 ; 7).
4°) Nous savons d'après la question 3°) que le quadrilatère ABCE est un parallélogramme.
Nous savons de plus d'après la question 2°) que le triangle ABC est rectangle en B.
Donc on en déduit que le quadrilatère ABCE est un rectangle.
5°) En utilisant la condition analytique de colinéarité, on démontre que (MD) // (BC).
6°) Les coordonnées de F sont (0 ; – 1).
7°) Les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{17}{3}\,;0\right)$.
8°) Les coordonnées de K sont (12 ; – 3).

$\boxed{15}$

$E(2\,;1)$ $\quad$ $F(-3\,;3)$ $\quad$ $G(-1\,;-4)$

Déterminons les coordonnées du point K tel que EFGK soit un parallélogramme.

On fait un graphique.

Soit L le milieu de $[EG]$.

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{x_E+x_G}{2} \\ y_L=\dfrac{y_E+y_G}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{2-1}{2} \\ y_L=\dfrac{1-4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_L=\dfrac{1}{2} \\ y_L=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Comme EFGK est un parallélogramme, le point L est le milieu de $[FK]$ (propriété de 4^e, si un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu).

Par suite, $\begin{cases} x_L=\dfrac{x_F+x_K}{2} \\ y_L=\dfrac{y_F+y_K}{2} \end{cases}$.

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}=\dfrac{-3+x_K}{2} \\ -\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+y_K}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3+x_K=1 \\ 3+y_K=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K=4 \\ y_K=-6 \end{cases}$$

Donc K a pour coordonnées $(4\,;-6)$.

On vérifie que cela coïncide avec le graphique.