TS spé

La division euclidienne

Plan du chapitre :

Introduction :

La division euclidienne permet de répondre à des questions du type :

• distribution équitable : *Comment distribuer équitablement 30 billes entre 7 personnes ?*
On donne 1 bille à chacune des 7 personnes. On a alors distribué 7 billes. Il reste 23 billes.
On recommence en distribuant encore 1 bille à chacune des 7 personnes. Celles-ci possèdent alors chacune 2 billes et il en reste 16 dans le sac.

À la dernière étape, chaque personne possède 4 billes et il en reste 2 dans le sac.

• nombre de parts de taille donnée :
Combien de règles de longueur 7 peut-on placer dans une règle de longueur 30 ?
Selon le même raisonnement, on conclut que l'on peut placer 4 règles et qu'il reste 2 cases.

On dispose de 45 bonbons. On désire fabriquer des paquets de 6 bonbons. Combien peut-on fabriquer de paquets ?
On peut fabriquer 7 paquets (avec 42 bonbons). Il reste 3 bonbons.
La situation 1 est une division partage ; la situation 2 est une division groupement.

I. Théorème

1°) Énoncé

$a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$
Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

2°) Définition

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, **effectuer la division euclidienne** de a par b c'est trouver le couple (q, r) d'entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
q est le **quotient**, r est le **reste**, a le **dividende**, b le **diviseur**.

3°) Commentaires

Dans une division euclidienne, le reste doit toujours être **strictement inférieur au diviseur**.

Le signe de q dépend de celui de a.

Lorsque a est positif ou nul, alors q est positif ou nul.
Lorsque a est négatif ou nul, alors q est négatif ou nul.

4°) Exemples

● Exemple 1 :

On prend $a = 72$ et $b = 7$.

On a : $72 = 7 \times 10 + 2$ et $0 \leqslant 2 < 7$.

Dans la division euclidienne de 72 par 7, le quotient est 10 ; le reste est 2.

● Exemple 2 :

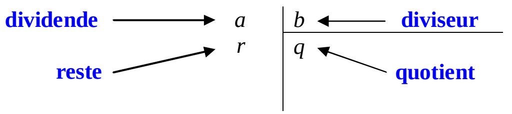
On prend $a = -356$ et $b = 17$.

On a : $-356 = -21 \times 17 + 1$ avec $0 \leqslant 1 < 17$.

Dans la division euclidienne de – 356 par 17, le quotient est – 21 ; le reste est 1.

5°) Présentation traditionnelle pour les entiers naturels

• Pour effectuer à la main, une division euclidienne d'entiers naturels (positifs), on utilise la présentation habituelle en « potence ».



• On ne peut utiliser cette présentation que lorsque a est positif (cas de l'exemple 1) mais pas lorsque a est négatif.

• Nous ne reviendrons pas cette année sur la technique de division euclidienne « à la main ».

II. Démonstration du théorème de la division euclidienne

Les hypothèses sont : $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

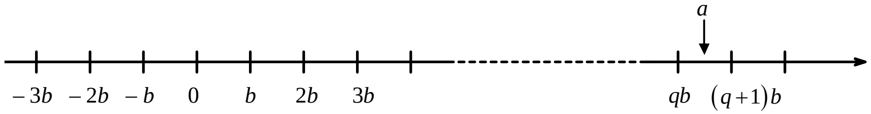
On effectue la démonstration en deux temps : on démontre d'abord l'existence puis on démontre l'unicité.
Il faut comprendre la démonstration et, si possible, savoir la refaire.
La partie existence est intéressante à comprendre.
La partie unicité, plus technique, est intéressante à comprendre et à savoir refaire.

1°) Existence du couple (q, r)

Les multiples de b sont les entiers relatifs de la forme kb, k décrivant $\mathbb{Z}$.

Ces entiers définissent une graduation régulière de la droite réelle.

On obtient une graduation régulière de la droite des réels en multiples de b.



le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a

On note q l'entier relatif tel que qb soit le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a.

On a donc $qb \leqslant a < (q+1)b$.

En retranchant qb à chaque membre de cette inégalité, on obtient : $0 \leqslant a - bq < b$.

Posons $r = a - bq$. On alors $0 \leqslant r < b$ et $a = bq + r$.

Nous avons bien trouvé un couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème (il appartient à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $r < b$).

2°) Unicité du couple (q, r)

On effectue un raisonnement classique pour démontrer une unicité (c'est un raisonnement qui s'apparente au raisonnement par l'absurde, mais ce n'est pas exactement un raisonnement par l'absurde).

Supposons qu'il existe deux couples (q, r) et (q', r') d'entiers tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$ et $\begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leqslant r' < b \end{cases}$.

On en déduit que $bq + r = bq' + r'$ (1).

(1) donne alors $r - r' = bq' - bq$ soit $r - r' = b(q' - q)$ $(1')$.

$(1')$ permet d'affirmer que $r - r'$ est un multiple de b.

Comme $0 \leqslant r' < b$, alors $-b < -r' \leqslant 0$.

Par addition membre à membre des encadrements de r et de $-r'$, on obtient : $-b < r - r' < b$.

$r - r'$ est donc un multiple de b compris entre $-b$ et b (au sens strict).
On a donc nécessairement $r - r' = 0$ d'où $r = r'$.

On reprend l'égalité (1) qui s'écrit $bq + r = bq' + r$.

En simplifiant par r les deux membres, on obtient $bq = bq'$.

Or $b \neq 0$, donc $q = q'$.

On en déduit que $(q, r) = (q', r')$, ce qui permet d'affirmer que le couple (q, r) est unique.

3°) Complément : expression du quotient et du reste à l'aide de la partie entière

La démonstration permet de donner une expression du quotient à l'aide de la partie entière.
En effet, on a : $qb \leqslant a < (q+1)b$ d'où $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q+1$.

Comme $q \in \mathbb{Z}$, la dernière inégalité permet d'affirmer que q est la partie entière de $\dfrac{a}{b}$.

> a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul.
> Le quotient q de la division euclidienne de a par b est égal à la partie entière de $\dfrac{a}{b}$.
>
> Autrement dit, avec la notation de la partie entière, on a : $\boldsymbol{q = \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)}$.

L'égalité $a = bq + r$ permet d'écrire $r = a - bq$.

Par conséquent, on a : $\boldsymbol{r = a - b \times \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)}$.

Il faut connaître cette expression sinon par cœur, du moins suffisamment bien pour pouvoir la retrouver rapidement.

Ces expressions servent assez rarement en pratique mais peuvent servir en programmation.

On retiendra que le reste de la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel non nul b est égal à $a-bq$ où q désigne le quotient.

III. Cas particuliers de restes et quotients nuls

1°) Cas d'un quotient nul

• Hypothèses :

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b non nul.

• Exemple :

On prend $a=3$ et $b=5$.

Écrire l'égalité de la division euclidienne de 3 par 5.

On a : $3=5\times0+3$.
De plus, $(0\,;3)\in\mathbb{N}^2$ et $3<5$.
Donc il s'agit bien de la division euclidienne de 3 par 5.

• Propriété générale :

Soit a et b deux entiers naturels tels que b soit non nul.

Si $a<b$, l'égalité de la division euclidienne de a par b s'écrit $a=b\times0+a$.
Le quotient est 0 et le reste est a.

2°) Cas d'un reste nul

• Hypothèses :

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel b non nul.

• Exemple :

On prend $a=12$ et $b=3$.

Écrire l'égalité de la division euclidienne de 12 par 3.

On a : $12=3\times4+0$.
De plus, $(4\,;0)\in\mathbb{N}^2$ et $0<4$.
Donc il s'agit bien de la division euclidienne de 12 par 4.

• Propriété générale :

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

On suppose que a est un multiple de b.
Il existe alors un entier relatif q tel que $a=bq$.
L'égalité de la division euclidienne de a par b s'écrit $a=b\times q+0$.
Le quotient est q et le reste est 0.

Ce cas a été évoqué dans la démonstration du théorème de la division euclidienne.

• Réciproquement :

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

Si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0, alors a est un multiple de b.

• Propriété de caractérisation (qui découle des deux propriétés précédentes) :

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

a est un multiple de b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Cette propriété sera redonnée dans le cours dans le cadre plus général de deux entiers relatifs.

3°) Cas d'un quotient et d'un reste nul

C'est le cas où l'on effectue la division euclidienne de 0 par un entier naturel $b\neq0$.

En effet, on a : $0=0\times b+0$. Cette égalité traduit la division euclidienne de 0 par b.
Dans cette division euclidienne, le quotient et le reste sont égaux à 0.

Exemple :

Cas particulier division euclidienne d'un entier relatif par 2

La division euclidienne d'un entier relatif par 2 donne un reste égal à 0 si l'entier est pair et un reste égal à 1 s'il est impair.

Cas particulier de la division euclidienne :

Lorsque l'on effectue la division euclidienne d'un entier naturel par 10, le reste est égal au chiffre des unités, le quotient est égal au nombre obtenu en barrant le chiffre des unités.
Cette propriété se démontre très facilement en utilisant la décomposition en base dix.
La propriété n'est valable que pour les entiers naturels c'est-à-dire positifs.

Exemple :

On effectue la division euclidienne de 3271 par 10.
Le quotient est 327 et le reste est 1.

2354 DE par 10 ↗ quotient
↘ reste

Lorsque l'on effectue la division euclidienne d'un entier naturel par 100, le reste est égal au nombre formé par les deux derniers chiffres, le quotient est égal au nombre obtenu en barrant les deux derniers chiffres des unités.

Exemple :

On effectue la division euclidienne de 3271 par 100.
Le quotient est 32 et le reste est 71.

On peut généraliser pour la division euclidienne d'un entier naturel quelconque par une puissance de 10 d'exposant entier naturel.

IV. Utilisation de la calculatrice et commandes Python

1°) Calculatrice de collège (pour mémoire)

La calculatrice Casio fx-92 possède une touche de division euclidienne $\boxed{\vdash}$ qui marche pour deux entiers positifs mais qui ne marche pas lorsque l'un des deux entiers est négatif.

Exemple :

356 $\boxed{\vdash}$ 17

On obtient l'affichage : $\text{Q} = 20$; $\text{R} = 16$.

Attention, lorsque l'on tape – 356 $\boxed{\vdash}$ 17 on obtient l'affichage $-\dfrac{356}{17}$ ou – 10,94117647…

2°) Calculatrices TI (TI-83 Plus.fr (noire) ou TI-83 Premium CE)

Il n'y a pas de touche de division euclidienne sur la calculatrice TI 83.

• Cas de la division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel non nul

On peut obtenir le reste grâce à une commande de la calculatrice.

Appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$; sélectionner NUM ou NBRE puis choisir 0 : remainder(ou 0 : reste(

: remainder(75,4 ou : reste(75,4 donne le reste de la division euclidienne de 75 par 4.

On obtient uniquement le reste et pas le quotient.
Le quotient s'obtient facilement. En effet, l'égalité de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b non nul s'écrit $a = bq + r$ où q désigne le quotient et r le reste. On obtient $q = \dfrac{a-r}{b}$.
Attention, cette commande ne marche que pour des entiers positifs.

• Cas de la division euclidienne d'un entier négatif par un entier naturel non nul

On utilise la partie entière. Si on tape reste(– 10, 3), on obtient un message d'erreur.

Calculatrice Numworks

Division euclidienne sur Numworks (rédigé par Vicente Seixas en décembre 2021)

Avec les mises à jour, la calculatrice Numworks possède de nouvelles fonctionnalités comme l'affichage d'une division euclidienne.

Dans « calculs », effectuer une division avec la touche $\boxed{\div}$ (la division doit être faite avec des nombres qui ne peuvent pas se diviser ; exemple : $\dfrac{8}{3}$). Ensuite, aller sur le résultat avec la flèche du haut puis aller tou à droite sur les « … ». Ensuite, appuyer sur la touche $\boxed{\text{OK}}$ ou $\boxed{\text{EXE}}$. Vous verrez alors une fenêtre montrant une fraction mixte et la division euclidienne sous la forme $a = bq + r$, très pratique. Cela ne marche pas quand les nombres se divisent comme $\dfrac{12}{2}$ car on a un résultat précis où le résultat est égal au quotient.
On devine donc que le reste est égal à 0 et qu'il n'y a donc pas besoin d'avoir le résultat affiché sous forme de division euclidienne.

Pour la calculatrice Numworks, on a les fonctions rem(p,q) et quo(p,q) [Boîte à outils, rubrique Arithmétique] qui renvoient respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de deux entiers naturels.
On peut les utiliser pour la division euclidienne d'entiers relatifs de signes quelconques.

3°) Utilisation d'une calculatrice rudimentaire n'ayant aucune fonctionnalité permettant de faire des divisions euclidiennes

C'est le cas des anciennes calculatrices TI ou des calculatrices ne permettant de faire que les 4 opérations.

On calcule le quotient au sens de fraction c'est-à-dire que l'on effectue la division décimale. On se débrouille en utilisant d'abord la touche de division.

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de 169 204 par 37 en utilisant la calculatrice.

① $169\,204 : 37 = 4\,573{,}081\,08\ldots$ (il s'agit d'une division décimale)
La partie entière est égale à 4 573. C'est donc le quotient de la division euclidienne.

② $4\,573 \times 37 = 169\,201$

③ Le reste est égal à $169\,204 - 169\,201 = 3$.

$$\begin{array}{r|l} 169\,204 & 37 \\ \cline{2-2} -\,169\,201 & 4\,573 \\ 3 & \end{array}$$

On peut écrire l'égalité de la division euclidienne : $69\,204 = 37 \times 4\,573 + 3$.

Remarques :

• On peut aussi directement calculer la partie entière de $\dfrac{169\,204}{37}$.

• Cette méthode permet d'effectuer la division euclidienne d'entiers positifs ou négatifs par un entier naturel non nul.

4°) Commandes Python

a est un entier relatif, b est un entier naturel non nul pour que ça fonctionne.

a//b donne le quotient de la division euclidienne de a par b

a%b donne le reste de la division euclidienne de a par b

Exemples :

`30//7`	`-30//7`	`-30//-7`	`-30%7`	`30%7`	`-30%-7`
`4`	`-5`	`4`	`5`	`2`	`-2`

divmod(a, b) donne le quotient et le reste de la division euclidienne sous forme d'un couple.
Le résultat est le même que (a // b, a % b).

V. Exercices-types

1°) Exercice 1

Le reste de la division euclidienne de 557 par un entier naturel $b \neq 0$ est 89.
Déterminer les valeurs possibles de *b*.

Solution :

Soit q le quotient de la division euclidienne de 557 par b.

On a donc : $557 = b \times q + 89$ (1) ; $q \in \mathbb{N}^*$; $0 \leqslant 89 < b$.

(1) donne donc $bq = 557 - 89$ soit $bq = 468$ $(1')$.

Comme $89 < b$ et $q > 0$, on a : $89q < bq$ d'où, d'après $(1')$, $89q < 468$ ce qui donne finalement $q < \dfrac{468}{89}$.

D'après la calculatrice, $\dfrac{468}{89} = 5{,}25842696\ldots$ (on notera que c'est le seul moment avec la ligne précédente où l'on va écrire un quotient).

> Dans ce type d'exercice, c'est le seul endroit où l'on se permette d'écrire un quotient.

Comme $q \in \mathbb{N}^*$, les valeurs possibles de q sont : 1, 2, 3, 4, 5.

Par ailleurs, d'après l'égalité $(1')$, q divise 468 d'où $q \neq 5$ (en effet, si q était égal à 5, alors 468 serait un multiple de 5 ce qui n'est pas).

Si $q = 1$, $b = 468$.

Si $q = 2$, $b = 234$.

Si $q = 3$, $b = 156$.

Si $q = 4$, $b = 117$.

On en déduit qu'il y a 4 valeurs possibles pour b : 117, 156, 234, 468.

2°) Exercice 2

Soit *n* un entier naturel non nul.
Quel est le reste de la division euclidienne
a) de $(n+2)^2$ par $n+4$?
b) de $7n+16$ par $2n+3$?

Solution :

> • Dans ce type d'exercice où on cherche à déterminer une division euclidienne avec des expressions littérales, on ne peut évidemment pas utiliser la technique de division euclidienne selon la présentation usuelle rappelée dans le paragraphe **I**.
> On travaille avec des égalités de division euclidienne.
>
> • Pour conjecturer les résultats, on peut faire des essais en étudiant ce qui se passe lorsque $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et ainsi de suite jusqu'à avoir une idée.
> Pour gagner du temps, on peut utiliser la calculatrice afin d'obtenir les restes et les quotients.
> Nous reviendrons dans la suite du cours.

a) On s'intéresse à la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$.

On peut donc écrire $(n+2)^2 = n(n+4)+4 \quad (1)$.

Dans l'égalité (1), le couple $(n\,;4)$ est formé d'entiers naturels.

De plus, comme $n > 0$, on a : $4 < n+4$.

On peut donc affirmer que (1) est l'égalité de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$.

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$ est 4 (et le quotient est *n*).

On constate que le reste ne dépend pas de *n*.

Il est possible de poser la division euclidienne comme si l'on avait des valeurs numériques.
Cela permet d'avoir une idée du résultat mais cela n'est pas une justification du résultat.
On justifie grâce à une égalité en vérifiant qu'elle traduit bien une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} n^2+4n+4 & n+4 \\ \cline{2-2} & n \\ 4 & \end{array}$$

b) On s'intéresse à la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $7n+16 = 3(2n+3)+n+7 \quad (2)$.

Dans l'égalité (2), le couple $(3\,;n+7)$ est formé d'entiers naturels.

Pour que l'égalité (2) traduise la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ il faut et il suffit que $n+7 < 2n+3$ c'est-à-dire $4 < n$.

Nous allons donc distinguer deux cas :

1[er] cas : $n > 4$ soit $n \geqslant 5$

Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est $n+7$ (et le quotient est 3).

2[e] cas : $n \leqslant 4$

Comme il y a un petit nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 4, on peut étudier chaque cas pour les différentes valeurs de *n*.

Pour $n=1$, $7n+16=23$ et $2n+3=5$.
Le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est 3.

Pour $n=2$, $7n+16=30$ et $2n+3=7$.
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est 2.

Pour $n=3$, $7n+16=37$ et $2n+3=9$.
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est 1.

Pour $n=4$, $7n+16=44$ et $2n+3=11$.
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est 0.

Une autre méthode dans ce cas consiste à travailler de manière littérale en écrivant une égalité dont on vérifie ensuite qu'elle traduit bien une division euclidienne.

On a : $7n+16 = 4(2n+3)+4-n \quad (3)$.
On a : $4-n \geqslant 0$ (car $n \leqslant 4$).

On vérifie que $4-n < 2n+3$ car ceci équivaut à $1 < 3n$ ce qui est vrai ($n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geqslant 1$).

Ainsi, l'égalité (3) traduit bien la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$.
Le reste est égal à $4-n$ (et le quotient est égal à 4).

VI. Généralisation

1°) Énoncé

Le théorème de la division euclidienne donné dans le **I.** s'étend au cas où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.
On dit qu'il s'agit de la division euclidienne de *a* par *b*.

2°) Démonstration

1[er] cas : *b* est un entier relatif strictement positif

Dans ce cas, la propriété a déjà été démontrée.

2[e] cas : *b* est un entier relatif strictement négatif

On peut effectuer la division euclidienne de *a* par – *b*.
Il existe un unique couple (q', r') d'entiers tels que $a = (-b)q' + r'$ et $0 \leqslant r' < -b$.
Or dans ce cas, $|b| = -b$.
En posant $q = -q'$ et $r = r'$, on a bien $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$

On peut noter que dans ce cas, $q = -\mathrm{E}\left(-\dfrac{a}{b}\right)$.

3°) Exemples

• **Effectuons la division euclidienne de 19 par – 5.**

$19=-5\times(-3)+4$ avec $0\leqslant 4<|-5|$

• **Effectuons la division euclidienne de – 27 par – 4.**

On cherche un petit peu « à la main ».
On sait que le reste est un entier positif et qu'il est strictement inférieur à $|-4|$.
On trouve : $-27=-4\times 7+1$ avec $0\leqslant 1<|-4|$.

> Attention quand on écrit une égalité e division euclidienne à la condition sur le reste.
> Par exemple, on peut écrire $19=-5\times(-4)-1$ et $19=-5\times(-3)+4$ mais ces égalités ne correspondent pas à la division euclidienne de 19 par – 5.

3°) Lien avec la divisibilité (propriété)

• **Énoncé**

> $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}^*$.
> $b\mid a$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

• **Démonstration :** évidente

VII. Écriture d'un entier relatif quelconque

1°) Propriété

> Dans la division euclidienne par un entier naturel $b\neq 0$, il y a b restes possibles : 0, 1, 2, …, $b-1$.
> Donc tout entier relatif a peut s'écrire : kb, $kb+1$, $kb+2$, …, $kb+(b-1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire sous l'une de ces b formes.

2°) Cas particuliers

• ***b* = 2**
Tout entier *a* peut s'écrire sous la forme $2k$ ou $2k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$.

$2k$ avec k entier relatif est la forme générale d'un entier pair, $2k+1$ avec k entier relatif est la forme générale d'un entier impair.

• ***b* = 3**
Tout entier *a* peut s'écrire sous la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ $(k\in\mathbb{Z})$.

$$\underbrace{-6,\,-5,\,-4}_{k=-2},\ \underbrace{-3,\,-2,\,-1}_{k=-1},\ \underbrace{0,\,1,\,2}_{k=0},\ \underbrace{3,\,4,\,5}_{k=1},\ \underbrace{6,\,7,\,8}_{k=2}$$

On peut noter qu'un entier relatif non multiple de 3 est de la forme $3k+1$ avec k entier relatif ou $3k+2$ avec k entier relatif.

3°) Conséquence importante

> Soit b un entier naturel non nul.
> Parmi b entiers consécutifs, il y a toujours un multiple de b.

Exemples :

• Parmi 2 entiers consécutifs, il y en a toujours un qui est pair.

• Parmi 3 entiers consécutifs, il y en a toujours un qui est un multiple de 3.

4°) Exemple de mise en œuvre

On pose $A=n(n^2+5)$ $(n\in\mathbb{N})$.
Démontrer que A est divisible par 3.

Solution :

Dans la division euclidienne par 3, il y a 3 restes possibles : 0, 1 ou 2.
Tout entier naturel n s'écrit sous l'une des formes $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$.
D'où 3 cas à étudier :

• 1[er] cas : $n=3k$ $(k\in\mathbb{N})$

Dans ce cas, $A=3k(9k^2+5)$.
Comme $k(9k^2+5)$ est un entier, on en déduit que 3 | A.

• 2[e] cas : $n=3k+1$ $(k\in\mathbb{N})$

Dans ce cas,
$$\begin{aligned}A&=(3k+1)\left[(3k+1)^2+5\right]\\&=(3k+1)(9k^2+6k+6)\\&=3(3k+1)(3k^2+2k+2)\end{aligned}$$

Comme $(3k+1)(3k^2+2k+2)$ est un entier, on en déduit que 3 | A.

• 3[e] cas : $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$

Dans ce cas,
$$\begin{aligned}A&=(3k+1)\left[(3k+2)^2+5\right]\\&=(3k+2)(9k^2+12k+9)\\&=3(3k+2)(3k^2+4k+3)\end{aligned}$$

Comme $(3k+2)(3k^2+4k+3)$ est un entier, on en déduit que 3 | A.

Conclusion :

Dans tous les cas, A est divisible par 3.
La proposition est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) Reprise du 1°)

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Tout entier relatif a s'écrit sous l'une des formes kb, $kb+1$, $kb+2$, …, $kb+(b-1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ces différentes classes de nombres sont non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à $\mathbb{Z}$.

On dit qu'elles forment une partition de $\mathbb{Z}$.

VIII. Nombres pairs – nombres impairs

1°) Propriétés sur la somme et le produit

• Énoncés

P_1 : La somme de deux nombres pairs est un nombre **pair**.

P_2 : La somme de deux nombres impairs est un nombre **pair.**

P_3 : La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre **impair**.

P_4 : Le produit d'un nombre pair par un entier quelconque est un nombre **pair**.

P_5 : Le produit de deux nombres impairs est un nombre **impair**.

• Démonstrations

On utilise la forme générale d'un entier pair et d'un nombre impair (calcul littéral).

• Conséquences

La somme de deux entiers de même parité est un nombre **pair**.
La somme de deux entiers de parités différentes est un nombre **impair**.

Il en est de même pour la différence.

Le 14-11-2022

$2p+2p'=2(p+p')$

$(2p+1)+(2p'+1)=2(p+p'+1)$

Le mardi 19-1-2022

$$\begin{aligned}(2p+1)(2p'+1)&=4pp'+2p+2p'+1\\&=4pp'+2(p+p')+1\\&=2(2pp'+p+p')+1\end{aligned}$$

2°) Propriétés sur les carrés

• Énoncés

P_6 : Si n est un nombre pair, alors n^2 est un nombre pair.

P_7 : Si n est un nombre impair, alors n^2 est un nombre impair.

• Démonstrations

1ère méthode :

On applique les propriétés P_4 et P_5.

2e méthode :

On utilise la forme générale d'un entier pair et d'un nombre impair (calcul littéral).

• Énoncé de propriété sous la forme d'une équivalence

n^2 est pair si et seulement si n est pair.

Autrement dit, un entier et son carré ont toujours la même parité.

Démonstration :

C'est une conséquence des propriété P_6 et P_7. On peut éventuellement dire que c'est un corollaire de ces deux propriétés.

• Généralisation

La propriété reste valable pour le cube d'un entier et plus généralement pour la puissance de n'importe quel entier naturel.

3°) Utilisation de la parité

Voir exercices.

IX. Point-méthode

1°) Dans les exercices sur la division euclidienne, on travaille toujours avec l'égalité de la division euclidienne. On évite d'écrire des quotients.

Dès qu'un énoncé parle de division euclidienne, on traduit par une égalité sans oublier la condition sur le reste (le reste doit être strictement inférieur au diviseur).

2°) Une situation type

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.

On suppose que l'on a une égalité de la forme $a = bq + r$ (1) où q et r sont des réels.

Pour justifier que l'égalité (1) traduit la division euclidienne de a par b, il faut vérifier les 3 conditions :

$q \in \mathbb{Z}$;
$r \in \mathbb{Z}$;
$0 \leqslant r < |b|$.

Mieux (fait le 26-10-2015)

Pour affirmer qu'une égalité de la forme $a = bq + r$ correspond à la division euclidienne de a par b, on doit s'assurer que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :
1) $q \in \mathbb{Z}$;
2) $r \in \mathbb{Z}$;
3) $0 \leqslant r < |a|$.

3°) Mise en garde

Lorsque l'on travaille avec des expressions littérales, on n'utilise (quasiment) jamais la présentation pratique de la division euclidienne (disposition pratique pour effectuer une division euclidienne de deux entiers naturels « à la main »).
On travaille avec des égalités (sans écrire d'expressions littérales sous forme de quotients).

X. Clefs de contrôle

Il s'agit d'une application pratique de la division euclidienne.

1°) Principe général

On utilise fréquemment des codages dans différentes situations : N°INSEE (c'est-à-dire numéro de sécurité sociale), code ISBN pour les publications, codes-barres…

Ces codes sont composés d'un matricule (grand nombre formé selon certains critères) et d'une clef.

MATRICULE (grand nombre)	CLEF (petit nombre)

Le mot matricule peut être féminin ou masculin avec un sens différent dans chaque cas.

Ces clefs sont calculées à partir du reste de la division euclidienne du matricule selon un procédé propre à chaque type de code.
D'un point de vue pratique, si l'on veut calculer la clef de contrôle à partir du matricule, la division euclidienne « à la main » peut être fastidieuse.
De plus, on ne peut pas utiliser la calculatrice car le matricule comporte souvent un nombre de chiffres qui dépasse les capacités d'affichage de la calculatrice.
Il faut utiliser d'autres moyens de calculs (tels que la calculatrice scientifique sur ordinateur) ou une autre technique (les « congruences »).

La clef de contrôle sert à détecter d'éventuelles erreurs de saisie du matricule (telles que l'inversion de deux chiffres).

2°) Cas du numéro de sécurité sociale

Principe

Le numéro sécurité sociale est constitué d'un matricule M constitué de 13 chiffres et d'une clef de contrôle C constituée de deux chiffres.

Le calcul de C à partir de M s'effectue comme suit :
On calcule le reste R de la division euclidienne de M par 97 et l'on pose $\text{C} = 97 - \text{R}$.

Le numéro de matricule propre à chaque individu tient compte de son sexe, de son année de naissance, de son mois de naissance, de son département de naissance, de sa commune de naissance et du numéro d'inscription au registre communal.

La clef de contrôle est constituée de deux chiffres et est comprise entre 01 et 97.
Ainsi les clefs de contrôle possibles des numéros de sécurité sociale sont 01, 02, 03 … 96, 97.

Pourquoi a-t-on choisi 97 ?

97 est le plus grand nombre premier inférieur ou égal à 100.

Exemple :

$\mathrm{M} = 2421013028006$

Le reste de la division euclidienne de M par 97 est $\mathrm{R} = 91$.

Donc la clef de contrôle de ce numéro de sécurité sociale est donné par $\mathrm{C} = 97 - \mathrm{R} = 6$.
La clef de contrôle sera écrite 06 et le numéro complet est donc 2 421 013 028 006 06.

Nous y reviendrons dans le chapitre sur les congruences.

XI. Appendice : qui est Euclide ?

L'adjectif « euclidien » vient du nom d'un mathématicien grec de l'antiquité : Euclide (vers 300 avant J.-C.).

Euclide est l'auteur des *Éléments*, traité mathématique constitué de 13 livres organisés thématiquement.
Il comprend une collection de définitions, axiomes, théorèmes et leurs démonstrations. *Les Éléments* sont le plus ancien exemple connu d'un traitement de la géométrie et son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit probablement du recueil qui a rencontré le plus de succès au cours de l'histoire : *Les Éléments* furent l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482) et n'est précédé que par la Bible pour le nombre d'éditions publiées (largement plus de 1 000). Pendant des siècles, il faisait partie du cursus universitaire standard.

Abraham Lincoln (1809-1865), qui fut président des États-Unis, disait que *Les Éléments* d'Euclide était son livre de chevet car il y voyait le moyen d'apprendre la logique.