TS Les coordonnées dans l'espace

Introduction

Comme dans le plan, on peut repérer les points de l'espace par leurs coordonnées dans un repère.
Il y aura une coordonnée de plus par rapport au plan ; un point aura donc 3 coordonnées : la première s'appellera l'abscisse, la deuxième s'appellera l'ordonnée et la troisième s'appellera **la cote**.
On aura les mêmes règles de calcul que dans le dans le plan sauf qu'il y aura une troisième coordonnée.

Le 7-3-2022

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées

Leur tableau de coordonnées est noté

On appelle déterminants extraits de ce tableau les réels p, q, r.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ces trois déterminants sont nuls

Remarque :
Pour démontrer que deux vecteurs ne sont pas colinéaires, il suffit de trouver un déterminant extrait du tableau de coordonnées qui soit nul.

Peut-on trouver un réel m tel que $\vec{u}\,(1,m,2-m)$ et $\vec{v}\,(m,2m,0)$ soient colinéaires .
On trouve m=0 ou m=2.

Plan du chapitre :

I. Repères et bases de l'espace

1°) Définition

On appelle **repère (cartésien) de l'espace** tout quadruplet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point fixé de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.

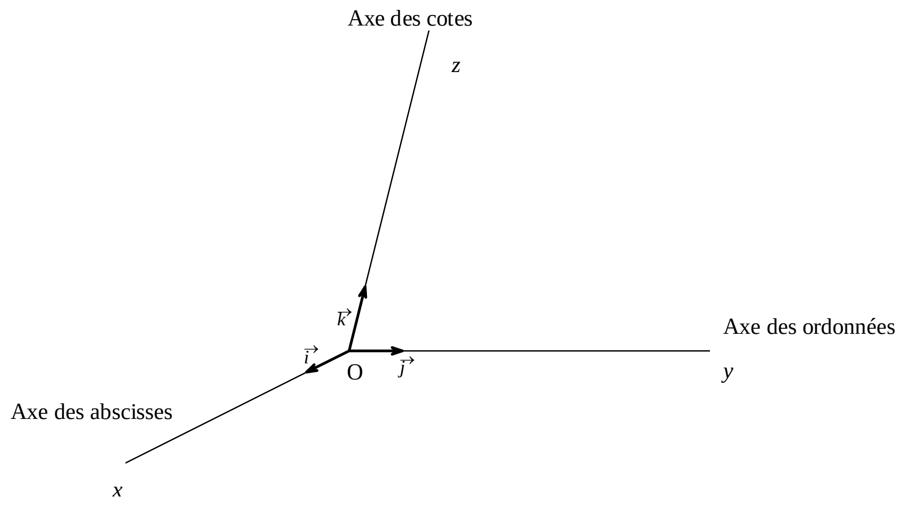
Les droites de repères $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$, $\left(\mathrm{O}, \vec{j}\right)$, $\left(\mathrm{O}, \vec{k}\right)$ sont appelées les axes du repère/

On les note parfois $(\mathrm{O}x)$, $(\mathrm{O}y)$, $(\mathrm{O}z)$. Les lettres x, y, z ne correspondent à rien dans ces notations : elles ne désignent pas des points (ni d'autre objet mathématique).
Il s'agit purement de notations traditionnellement employées, commode d'utilisation.

La représentation en perspective d'un repère de l'espace est souvent faite de la manière suivante.

L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont contenus dans un plan horizontal.

En général, on fait en sorte que l'angle formé par les demi-droites [Ox) et [Oy) sur la représentation en perspective soit obtus. On ne prend jamais un angle droit.



Repère oblique

2°) Vocabulaire

- On dit que O est l'**origine** du repère.
- On dit que le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

On notera que les trois axes du repère sont concourants au point O.

Rappel de définition [droites concourantes] :
On dit que des droites de l'espace (en général, en nombre supérieur ou égal à 3) si elles se coupent en un même point.
Exemple :
Dans un plan,
les médianes d'un triangle sont concourantes.
les hauteurs d'un triangles sont concourantes.
les médiatrices d'un triangle sont concourantes.
les bissectrices intérieures des angles sont concourantes.

Définition [base de l'ensemble des vecteurs de l'espace]

On appelle base de l'ensemble des vecteurs de l'espace tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ formé de vecteurs non coplanaires.

On dit que le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Repères particuliers

- Un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dont les axes sont perpendiculaires deux à deux est dit orthogonal.

- Un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (1 pour l'unité de longueur choisie) est dit orthonormé.

Rappel de définition [vecteur normé] :

On dit qu'un vecteur est normé pour exprimer que sa norme est égale à 1.

On parle aussi de vecteur unitaire.

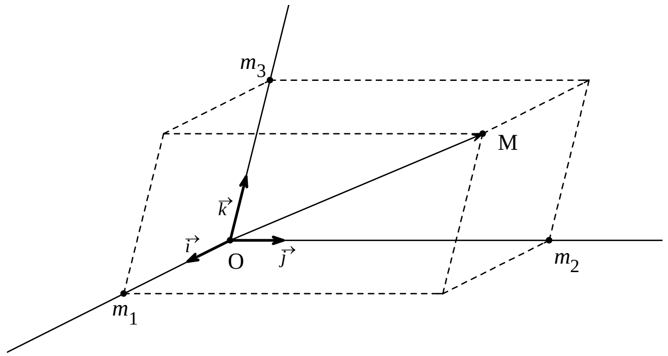
On retiendra « vecteur normé = vecteur de norme 1 ».

Cela justifie l'appellation de repère orthonormé : il est orthogonal et les trois vecteurs de base sont normés.

II. Cordonnées d'un point

1°) Théorème

$\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



2°) Définition

On dit que x, y, z sont les **coordonnées** de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

x : **abscisse** de M
y : **ordonnée** de M
z : **cote** de M

Notations :

$\mathrm{M}\left(x\,;y\,;z\right)$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{M}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$

La droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée axe des abscisses, celle sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée axe des ordonnées et celle sur laquelle on lit les cotes est appelée axe des cotes.

L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ exprime le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
On dit qu'il s'agit de la décomposition du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

3°) Démonstration

Considérons le parallélépipède construit sur les axes du repère tel que (OM) soit une grande diagonale (voir figure).

On a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{O}m_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}m_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}m_3}$ (règle du parallélépipède).

$\overrightarrow{\mathrm{O}m_1}$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_1} = x\vec{i}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_2}$ est colinéaire à $\vec{j}$ donc $\exists! y \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_2} = y\vec{j}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_3}$ est colinéaire à $\vec{k}$ donc $\exists! z \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_3} = z\vec{k}$.
On obtient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$\exists!$: « il existe un unique »

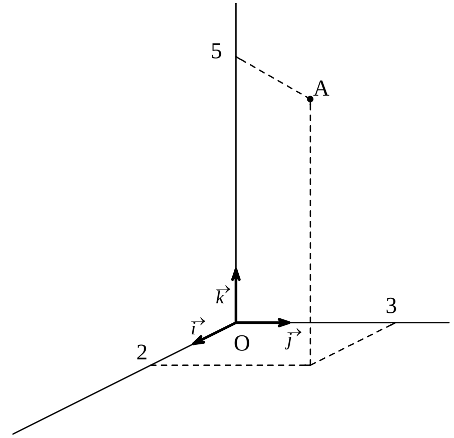
4°) Exemple

$\mathrm{A}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ (décomposition du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$)

Par commodité, nous allons prendre le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthonormé pour effectuer le graphique.

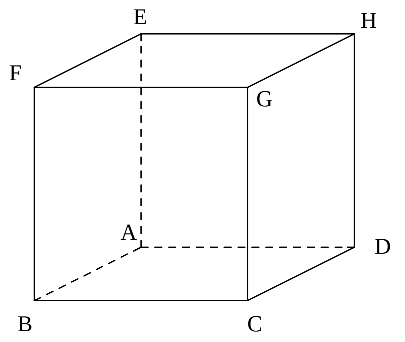
On peut placer le point A par construction vectorielle.
On part de O. On trace un représentant du vecteur $2\vec{i}$ ayant pour origine O.
On arrive en un point a. On trace un représentant du vecteur $3\vec{j}$ ayant pour origine a.
On arrive en un point b. On trace un représentant du vecteur $5\vec{k}$ ayant pour origine b.



Où sont situés les négatifs sur les axes ?

5°) Repère dans un cube

ABCDEFGH est un cube de l'espace.



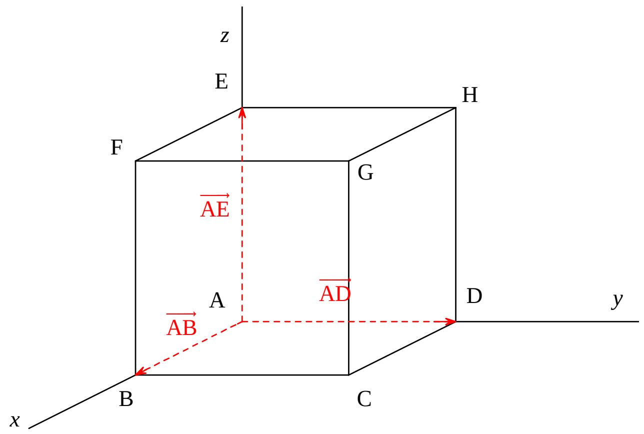
Le quadruplet $\left(\mathrm{A}, \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}}\right)$ est un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ne sont pas coplanaires.

origine vecteurs de base

On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ de l'espace.

On peut prendre BCGF pour face frontale qui redonne la disposition d'un repère de l'espace présentée au début du chapitre.

On peut aussi prendre la face ABFE pour face frontale qui donne une autre disposition du repère, assez commode aussi.



$\mathrm{A}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $\mathrm{B}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $\mathrm{C}\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix}$ $\mathrm{D}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$ $\mathrm{E}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $\mathrm{F}\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ $\mathrm{G}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ $\mathrm{H}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$

Les coordonnées de G se justifient par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ (égalité du parallélépipède).

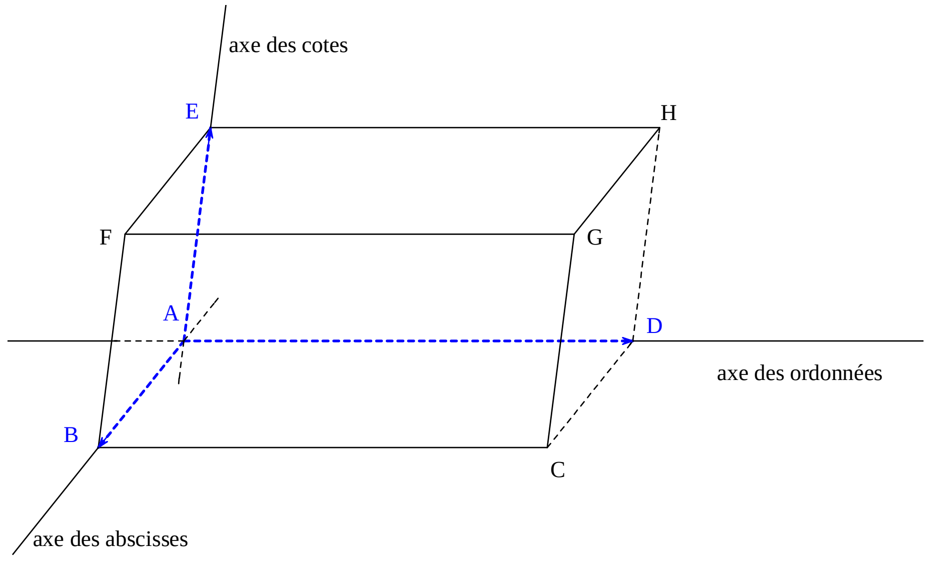
On retrouve très facilement ces coordonnées avec la figure.
Il s'agit d'un exemple fondamental.

Lorsque le cube a pour arête 1, il s'agit d'un repère orthonormé.

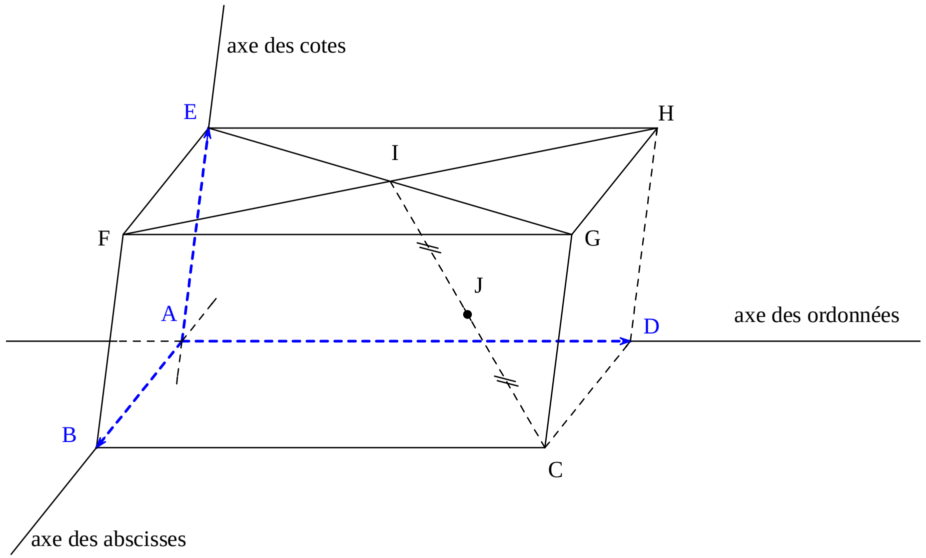
On peut généraliser la situation à un parallélépipède rectangle (solide dont toutes les faces sont des rectangles) ou même pour à un parallélépipède quelconque (solide dont toutes les faces sont des parallélogrammes).

ABCDEFGH est un parallélépipède. On note I le centre de la face EFGH et J le milieu de $[\mathrm{CI}]$.

On se place dans le repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



L'axe des abscisses est la droite (AB).
L'axe des ordonnées est la droite (AD).
L'axe des cotes est la droite (AE).



A est l'origine du repère $\mathcal{R}$ donc ses coordonnées sont $(0\,;0\,;0)$.

$B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$, $J\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$

Les coordonnées de I s'obtiennent très facilement en utilisant une égalité vectorielle ou en utilisant la formule des coordonnées d'un milieu qui sera vue dans le paragraphe **IV**.
On retrouve très facilement ces coordonnées avec la figure.

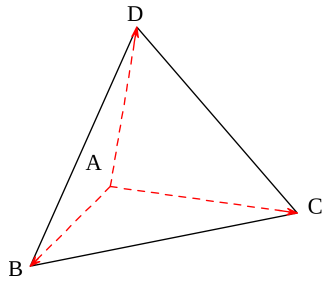
Les coordonnées de J s'obtiennent très facilement en utilisant la formule des coordonnées d'un milieu.
On peut retrouver ces coordonnées avec la figure mais c'est moins évident que pour G et I.

On peut aussi travailler entièrement en coordonnées.

6°) Repère dans un tétraèdre

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires. Ces points forment un tétraèdre ABCD.

Le quadruplet $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.



Les quadruplets $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$, $\left(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$, $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$ sont aussi des repères de l'espace.

III. Cordonnées d'un vecteur

1°) Théorème

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

L'égalité $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ exprime le vecteur $\vec{u}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
On dit qu'il s'agit de la décomposition du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

2°) Définition

On dit que x, y, z sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Démonstration

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
On a vu qu'il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$\vec{u}$ est exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

IV. Propriétés

1°) Propriété 1 (égalité de deux vecteurs)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

• Démonstration

La propriété découle de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.

2°) Propriété 2 (coordonnées de la somme de deux vecteurs)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.
Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x', y+y', z+z')$.

• Démonstration

On écrit les décompositions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (écritures comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
Par addition membre à membre, on obtient : $\vec{u}+\vec{v} = (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j} + (z+z')\vec{k}$.
Cette dernière égalité donne la décomposition du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et permet donc de dire que les coordonnés $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(x+x', y+y', z+z')$.

3°) Propriété 3 (coordonnées du produit d'un vecteur par un réel)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ est un vecteur quelconque de l'espace.
λ est un réel quelconque.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

• Démonstration

On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Par multiplication par λ, on obtient : $\lambda\vec{u} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k}$.

4°) Propriété 4 (coordonnées d'un vecteur défini par deux points)

• Énoncé

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ sont deux points quelconques de l'espace.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}, z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$.

• Démonstration

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_\mathrm{A}\vec{i} + y_\mathrm{A}\vec{j} + z_\mathrm{A}\vec{k}$
$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_\mathrm{B}\vec{i} + y_\mathrm{B}\vec{j} + z_\mathrm{B}\vec{k}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (relation de Chasles sous forme soustractive)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\vec{i} + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\vec{j} + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\vec{k}$

5°) Propriété 5 (coordonnées du milieu d'un segment)

• Énoncé

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ sont deux points quelconques de l'espace.
Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}, \dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}, \dfrac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}\right)$.

• Démonstration

I étant le milieu de $[\mathrm{AB}]$, on peut écrire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

On traduit cette égalité par trois égalités de coordonnées : $\begin{cases} x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{I} - y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{I} - z_\mathrm{A} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{I} \end{cases}$.

D'où

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

6°) Propriété 6 (coordonnées d'un barycentre)

• Énoncé

$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points quelconques de l'espace.
a et b sont deux réels tels que $a+b \neq 0$.
Le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) a pour coordonnées $\left(\dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}, \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}, \dfrac{az_A + bz_B}{a+b}\right)$.

• Démonstration

D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace on a :
$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.
Donc pour $M = O$, on a : $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = (a+b)\overrightarrow{OG}$.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}\vec{i} + \frac{ay_A + by_B}{a+b}\vec{j} + \frac{az_A + bz_B}{a+b}\vec{k}$$

On peut généraliser les coordonnées du barycentre à n points (n étant un entier naturel non nul).

On considère une famille de n points pondérés $(A_1\,;a_1), (A_2\,;a_2), \ldots, (A_n\,;a_n)$ où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$.
Les réel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coefficients de pondération associés aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
On note G son barycentre.
G a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}\,;\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}\,;\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}\right)$.

7°) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient colinéaires (on parle de critère de colinéarité).

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

On voit que la différence par rapport au critère de colinéarité dans le plan est qu'il faut 3 déterminants et non un seul.

Rappel de calcul d'un déterminant :

$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy'$ $\qquad \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = zx' - xz'$ $\qquad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Il s'agit de différences de produits en croix.

Démonstration :

Le sens direct est facile ; la démonstration est identique à celle dans le plan.

Le sens réciproque est admis sans démonstration.

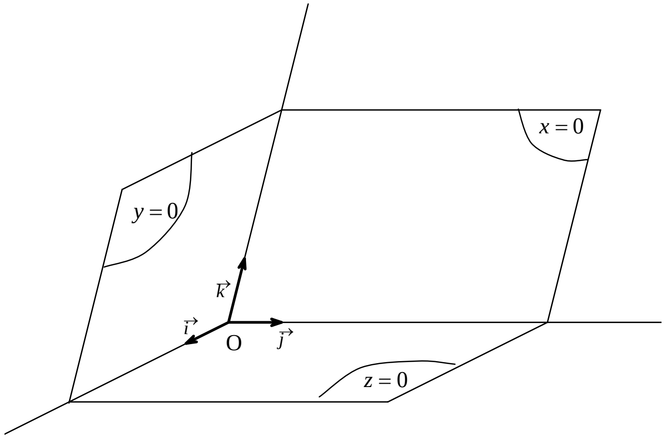
V. Équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

1°) Définition

On appelle **plan de coordonnées** les plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

On les note parfois (xOy), (yOz), (xOz).

2°) Équations des plans de coordonnées



Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace.

$M \in (xOy) \Leftrightarrow z = 0$

$M \in (yOz) \Leftrightarrow x = 0$

$M \in (xOz) \Leftrightarrow y = 0$

On dit que l'égalité $z = 0$ est une équation du plan $M \in (xOy)$

Pareil pour $x = 0$ et $y = 0$.

Par parenthèse, il est important de rappeler que le mot équation employé ici n'a pas le sens ordinaire d'équation une inconnue. Il s'agit d'une relation – comme pour les équations de droites dans le plan – vérifiée par les coordonnées des points d'un plan.

Autre explication :

Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$ (tous les points du plan (xOy) ont une cote nulle).

Le plan (yOz) a pour équation $x = 0$.

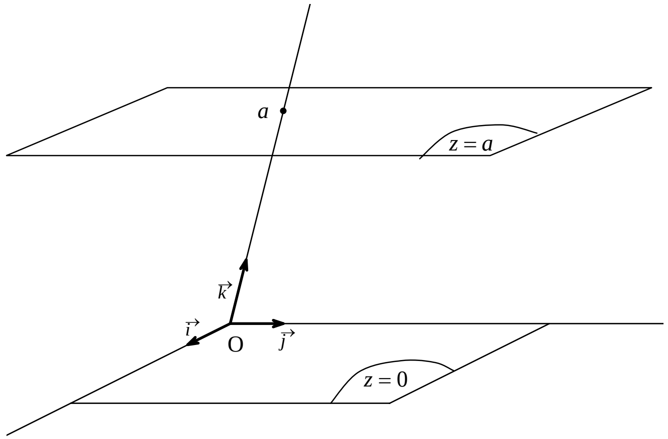
Le plan (xOz) a pour équation $y = 0$.

3°) Équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une équation de la forme $z = a$ $(a \in \mathbb{R})$.

Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ admet une équation de la forme $x = b$ $(b \in \mathbb{R})$.

Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{k}, \vec{i})$ admet une équation de la forme $y = c$ $(c \in \mathbb{R})$.



Sur le graphique, le plan d'équation $z = a$ coupe l'axe des cotes au point de coordonnées $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ a \end{array} \right.$.

Exemple :

Déterminer une équation du plan *P* passant par le point $(2, 1, 3)$ parallèle au plan (xOy).

P a pour équation $z = 3$

4°) Caractérisation des axes de coordonnées

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace.

$M \in (Ox) \Leftrightarrow y = z = 0$

$M \in (Oy) \Leftrightarrow x = z = 0$

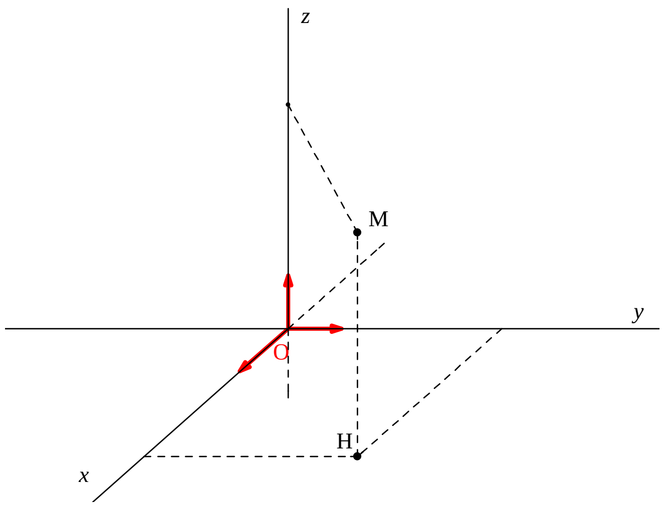
$M \in (Oz) \Leftrightarrow x = y = 0$

5°) Complément : projetés orthogonaux d'un point sur les plans de base dans un repère orthogonal

Dans tout ce paragraphe, on suppose que l'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Propriété [projeté orthogonal d'un point sur le plan défini par l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées]

> Soit $\mathrm{M}\left(x\,;y\,;z\right)$ un point quelconque de l'espace.
> On note H son projeté orthogonal sur le plan (xOy).
> H a pour coordonnées $\left(x\,;y\,;0\right)$.



La propriété s'adapte aisément pour les projetés orthogonaux sur les plans (yOz) et (xOz).

La propriété peut s'énoncer dans le cas d'un repère quelconque, pas forcément orthogonal.
Pour le plan (xOy), on parlera alors du projeté de M sur (xOy) parallèlement à l'axe (Oz).

La propriété s'adapte pour les projetés orthogonaux sur des plans parallèles aux plans de base.

VI. Norme d'un vecteur et distance de deux points dans un repère orthonormé de l'espace

1°) Définition [repère orthonormé de l'espace]

On reprend la définition donnée dans le **I. 3°)**.

> On dit qu'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de $\mathcal{E}$ est un **repère orthonormé** pour exprimer que
> $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$
> $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

graphique

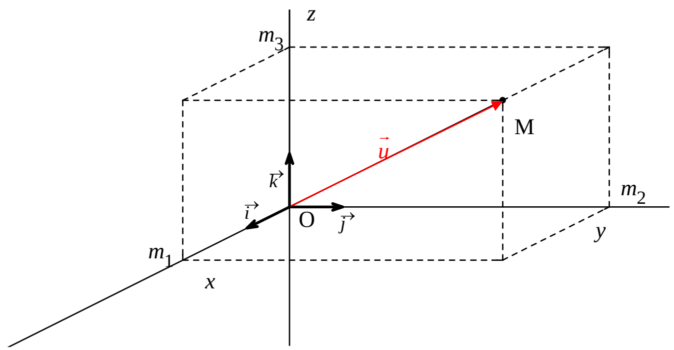
2°) Formule de la norme d'un vecteur

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{E}$ **dans un repère orthonormé** $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace.
On note (x, y, z) ses coordonnées.

On note M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{u}$.

On note m_1, m_2, m_3 les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, l'axe des cotes.

On considère le parallélépipède construit sur les axes.
Comme le repère est orthonormé par hypothèse, les axes sont deux à deux orthogonaux et ce parallélépipède est donc rectangle. Autrement dit, c'est un pavé droit.



On a $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O}m_1{}^2 + \mathrm{O}m_2{}^2 + \mathrm{O}m_3{}^2$ (formule du carré de la longueur de la grande diagonale d'un pavé droit).

$\mathrm{O}m_1 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{O}m_1}\right\| = \left\|x\vec{i}\right\| = |x| \times \left\|\vec{i}\right\| = |x| \times 1 = |x|$
$\mathrm{O}m_2 = |y|$
$\mathrm{O}m_3 = |z|$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3°) Distance de deux points

$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points quelconques de $\mathcal{E}$ **dans un repère orthonormé**.

$\overrightarrow{AB}\left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array} \right.$

Donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Distance d'un point à l'origine du repère

Formule générale

$M(x, y, z)$ est un point quelconque de $\mathcal{E}$ **dans un repère orthonormé d'origine O**.

$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La distance d'un point à l'origine du repère est égale à la racine carrée de la somme des carrés des coordonnées.

Cas particulier d'un point appartenant à l'un des axes

Si $M \in (Ox)$, alors $y = z = 0$.
Dans ce cas, $OM = |x|$.

Si $M \in (Oy)$, alors $x = z = 0$.
Dans ce cas, $OM = |y|$.

Si $M \in (Oz)$, alors $x = y = 0$.
Dans ce cas, $OM = |z|$.

VII. Équations de sphères dans un repère orthonormé

1°) Théorème

Une équation de la sphère S de centre $\Omega\left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$ et de rayon $R > 0$ s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$ ou $(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = R^2$

2°) Exemple

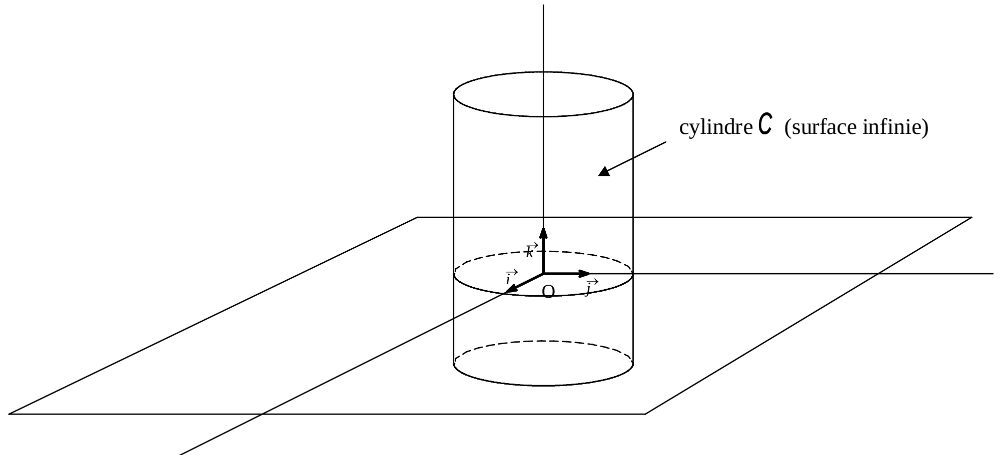
Une équation de la sphère S de centre $\Omega\left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right.$ et de rayon $R = 3$ s'écrit $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

(forme canonique d'une équation de sphère).

VIII. Équations de cylindres de révolution dans un repère orthonormé

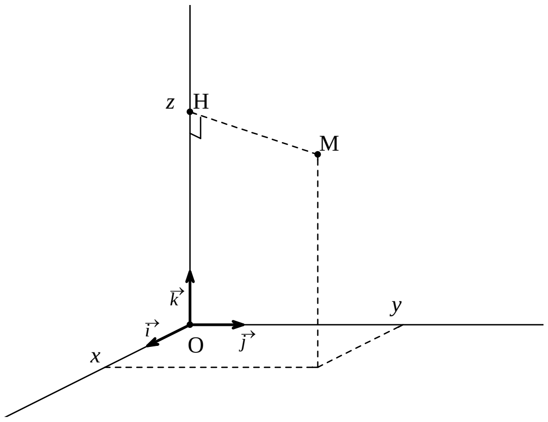
1°) Théorème

Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left| \begin{array}{l} \text{d'axe } (Oz) \\ \text{de rayon } R > 0 \end{array} \right.$ s'écrit $x^2 + y^2 = R^2$.



2°) Démonstration

On utilise un point $M\left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ de l'espace.



On note H son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).

$\mathrm{H}\left|\begin{array}{l}0\\0\\z\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathcal{C} &\Leftrightarrow \mathrm{HM}=R\\ &\Leftrightarrow \mathrm{HM}^2=R^2\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2=R^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2=R^2\end{aligned}$$

3°) Exemples

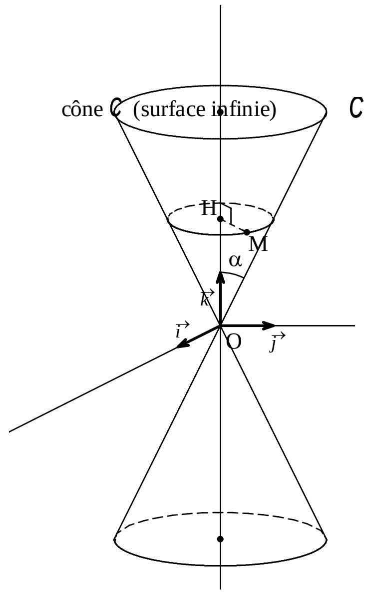
• Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l}\text{d'axe } (\mathrm{O}z)\\ \text{de rayon } R=5\end{array}\right.$ s'écrit $x^2+y^2=25$.

• Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l}\text{d'axe } (\mathrm{O}y)\\ \text{de rayon } R=3\end{array}\right.$ s'écrit $x^2+z^2=9$.

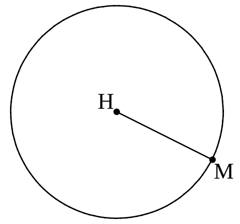
IX. Équations de cônes de révolution dans un repère orthonormé

1°) Théorème

Une équation du cône $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l}\bullet \text{ d'axe } (\mathrm{O}z)\\ \bullet \text{ de sommet O}\\ \bullet \text{ de demi-angle au sommet } \alpha \quad \left(\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right)\end{array}\right.$ s'écrit $x^2+y^2=(\tan\alpha)^2 z^2$.

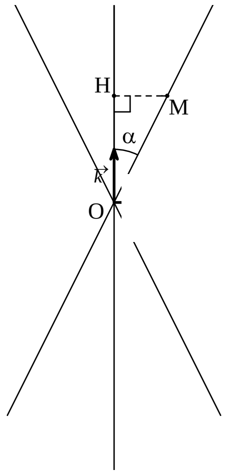


Coupe horizontale :



F(

Coupe verticale par le plan (M, O*z*) :



2°) Démonstration

On utilise un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$.

On note H son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).

$$H\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow HM = OH \times \tan\alpha \\ &\Leftrightarrow HM^2 = OH^2 \times \tan^2\alpha \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = z^2 \times \tan^2\alpha \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 \times \tan^2\alpha \end{aligned}$$

3°) Exemple

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$$

Rappel sur le déterminant de deux vecteurs dans le plan :

On se place dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

$\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Attention : il ne faut pas confondre cette notation utilisant deux barres avec celle de la valeur absolue d'un réel.

Propriété :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Déterminant 3×3 à relier aux matrices 3×3

On se place dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

$\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$ $\quad \vec{w}\begin{vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{vmatrix}$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

On peut appliquer la méthode de Sarrus :

$$A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \begin{matrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{matrix}$$

On a trois diagonales dans un sens et trois diagonales dans l'autre.

$$\det A = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x'yz'' - xy''z' - x''y'z$$

$$A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne.

$$\det A = x \times \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix} + x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne.

$$\det A = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Les formules sont équivalentes.

Application : critère de coplanarité

• Rappel : critère de colinéarité dans le plan

• Critère pour que trois vecteurs soient coplanaires

$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ (déterminant du triplet de trois vecteurs dans une base)

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

Le 26-1-2021

sous-matrice

Utilisation de la calculatrice

On n'apprend pas de formule pour l'inverse

Que représente cette valeur ?

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la valeur absolue du déterminant de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal, la valeur absolue du déterminant de trois vecteurs est égale au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

Dans le supérieur, on voit une formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 ($\dfrac{1}{\det A}\ {}^{t}\mathrm{com}\ A$).

$$A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$$

Bilan sur les plans de coordonnées

Plan	Repère	Équation
(xOy)	$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$	$z = 0$
(yOz)	$\left(O, \vec{j}, \vec{k}\right)$	$x = 0$
(zOx)	$\left(O, \vec{k}, \vec{i}\right)$	$y = 0$

Un plan parallèle au plan de repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $z = a$ $\left(a \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(O, \vec{j}, \vec{k}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $x = b$ $\left(b \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(O, \vec{k}, \vec{i}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $y = c$ $\left(c \in \mathbb{R}\right)$.

Le 13-3-2022

Distance d'un point à un plan de base

Rappel :

La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

On a une propriété qui dit que c'est la plus petite distance entre ce point et un point quelconque du plan.

Dans un repère orthonormé, la distance d'un point au plan (xOy) est égale à la valeur absolue de sa cote.
Il n'y a pas de calcul à faire.

On peut éventuellement faire un graphique en perspective sur lequel on place le point A et son projeté orthogonal H.

On peut écrire $d\left(A, (xOy)\right) = |\ z_A\ |$.

Exemple : $A(3\,;-1\,;-5)$ $\qquad d\left(A, (xOy)\right) = 5$

On généralise pour les autres plans de base.