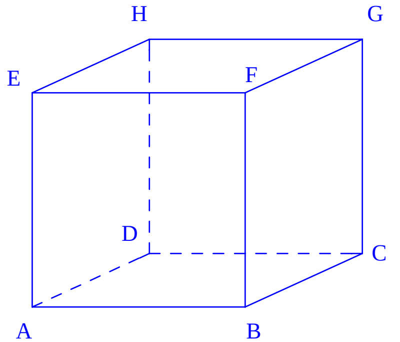
TS

Exercices sur l'orthogonalité dans l'espace

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$, on considère un cube ABCDEFGH (figures à faire à la règle).
On placera les points supplémentaires éventuels précisés dans chaque exercice.



$\boxed{1}$ 1°) Les droites (AB) et (FG) sont-elles sécantes ?
Quelles sont leurs parallèles passant par E ?
Dans quel plan ces parallèles sont-elles contenues ?
Dans ce plan, que peut-on en dire ?
2°) Reprendre le 1°) avec les mêmes droites en remplaçant E par C.
3°) Reprendre le 1°) en remplaçant E par A.

$\boxed{2}$ exercice à ne pas faire

1°) Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ? des droites (AE) et (GH) ?
2°) La propriété : « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est vraie dans le plan mais reste-t-elle vraie dans l'espace ?

On peut prendre un exemple plus simple.
(AE) avec (AB) et (AC) par exemple

$\boxed{3}$ Soit *P* le plan contenant les points B, C, E, H.
Citer deux droites contenues dans le plan *P* qui sont orthogonales à (BF).
La droite (BF) est-elle orthogonale à *P* ?

$\boxed{4}$ Démontrer que (BF) ⊥ (AC).
Méthode : Chercher un plan contenant (AC) orthogonal à (BF).

$\boxed{5}$ 1°) Que peut-on dire des droites (EB) et (EH) ? Justifier.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère EBCH ? Justifier.
3°) Que peut-on dire des droites (EB) et (CH) ? Pourquoi ?
4°) Que peut-on dire des droites (EB) et (AF) ? des droites (AF) et (CH) ?

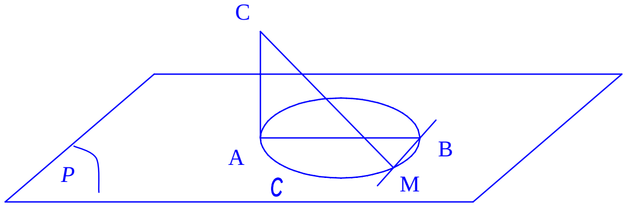
$\boxed{6}$ Dans chaque cas, indiquer si les droites sont orthogonales non coplanaires ou perpendiculaires (justifier) :
(AB) et (CG) ; (EB) et (AF) ; (AE) et (BD) ; (AC) et (CG).

$\boxed{7}$ 1°) Démontrer que (BD) ⊥ (AE).
2°) Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? Justifier.
3°) À l'aide des questions précédentes, que peut-on dire de la droite (BD) et du plan (AEC) ?

$\boxed{8}$ Dans chaque cas, trouver une droite perpendiculaire à chacune des deux droites (faire une figure dans chaque cas sur laquelle on tracera les deux droites en bleu et la perpendiculaire commune en rouge) :
(AE) et (BC) ; (AB) et (FH) ; (EF) et (BG) ; (AF) et (CH).
Dans chaque cas, on cherche une droite perpendiculaire aux deux droites c'est-à-dire orthogonale et sécante aux deux droites.

$\boxed{9}$ Soit O le centre de la face EFGH et *P* le plan contenant les points D, B, F, O, H.
1°) Démontrer que (HF) ⊥ (EG).
2°) Démontrer que (BF) ⊥ (EG).
3°) Que représente le plan *P* pour le segment [EG] ?
4°) Démontrer que (DF) ⊥ (EG) et que (BH) ⊥ (EG).

$\boxed{10}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.



Reproduire la figure.

1°) Démontrer que (AC) ⊥ (MB). Citer le théorème utilisé.
2°) Démontrer que (MB) ⊥ (AMC). Citer le théorème utilisé.
3°) En déduire que (MB) ⊥ (MC). Citer le théorème utilisé.
4°) Démontrer que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

$\boxed{11}$ Soit ABCD un tétraèdre régulier, c'est-à-dire dont toutes les arêtes ont la même longueur (et par conséquent dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux).
On note I le milieu de [AB].
Faire une figure assez grande en perspective cavalière.
1°) Démontrer que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).
2°) En déduire que (AB) ⊥ (CD).
3°) On note J le milieu de [CD].
Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
On dit que c'est la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Dans un tétraèdre quelconque, la droite (ou le segment) joignant les milieux de deux arêtes opposées est appelée une bimédiane.
On démontre que les trois bimédianes d'un tétraèdre quelconque sont concourantes en leur milieu (propriété de parallélogrammes définis par les milieux des arêtes).
Ce point de concours est le centre de gravité du tétraèdre.

Dans un tétraèdre régulier, le point de concours des bimédianes est aussi le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

4°) Question supplémentaire
On note a la longueur commune à toutes les arêtes du tétraèdre ABCD.
Exprimer IJ en fonction de a.

Variante écrite le 3-12-2020

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$, $C \neq D$, $CA = CB$ et $DA = DB$.
Démontrer que (AB) ⊥ (CD).

$\boxed{12}$ Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.

1°) Le but de cette question est de démontrer que (DF) ⊥ (ACH).
On propose deux méthodes indépendantes l'une de l'autre. Il est demandé de traiter les deux méthodes.

1ère méthode :
a) Démontrer que (DF) ⊥ (AH). Il y a plusieurs méthodes possibles.
b) Démontrer que (DF) ⊥ (CH).
c) En déduire que (DF) ⊥ (ACH).

2e méthode :
a) Démontrer que D est équidistant des points A, C, H.
b) Démontrer que F est équidistant des points A, C, H.
c) En déduire que (DF) ⊥ (ACH).

2°) Démontrer que (DF) ⊥ (BEG).

3°) Que peut-on en déduire pour les plans (ACH) et (BEG) ?

$\boxed{13}$ Soit S une sphère de centre O et de rayon 3.
Soit P un plan tel que $d(O, P) = 2$.
Que peut-on dire de l'intersection de S et P ?

$\boxed{14}$ Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[EH]$, $[AE]$.
1°) On note P le plan médiateur de $[DF]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N appartiennent à P.
2°) Justifier que O est le milieu des segments $[IL]$, $[JM]$, $[KN]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N sont situés sur un même cercle du plan P.
3°) Déterminer la nature du triangle OIJ.
4°) Déduire des questions précédentes la nature de l'hexagone IJKLMN.

$\boxed{15}$ Calcul du volume d'un tétraèdre régulier
Soit ABCD un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont pour longueur a.
Exprimer le volume de ABCD en fonction de a.
Indication :
Soit O le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
O est le centre du triangle équilatéral ABC.

$\boxed{16}$ Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BJ} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK} = \lambda\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DL} = \lambda\overrightarrow{DA}$ où λ est un réel quelconque.
1°) Démontrer que I, J, K, L sont coplanaires et déterminer la nature du quadrilatère IJKL en utilisant les vecteurs.
2°) On suppose A, B, C, D deux à deux distincts.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un losange.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un rectangle.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que IJKL soit un carré.

Cas particulier :
On suppose que ABCD est un tétraèdre régulier et que I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$.
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

$\boxed{17}$ Soit OAB un triangle rectangle en O.
Soit Δ la perpendiculaire en O au plan (OAB) et soit C un point de Δ distinct de O.
Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).
Démontrer que (CH) est orthogonale à (AB).

$\boxed{18}$ Soit ABCDEFGH un pavé droit et M un point quelconque de (FG).
Déterminer le projeté orthogonal de M sur (AB).

Soit O le centre de la face BCGF.
Déterminer le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

$\boxed{19}$ Soit ABCD un tétraèdre régulier.
Soit M un point quelconque intérieur au tétraèdre.
On note I, J, K, L ses projetés orthogonaux respectifs sur les plans (ABC), (BCD), (ACD), (BAD).
Démontrer que la somme $MI + MJ + MK + ML$ est constante (indépendante de la position de M à l'intérieur du tétraèdre).

On retiendra :

La somme des distances d'un point quelconque intérieur à un tétraèdre régulier aux quatre faces est constante.

La somme des distances d'un point quelconque intérieur à un triangle équilatéral aux trois côtés est constante.
On peut faire des essais en mesurant.

Il s'agit du théorème de Viviani. Il porte le nom du mathématicien italien Vincenzo Viviani qui l'a publié en 1649.
Voir article Wikipedia.

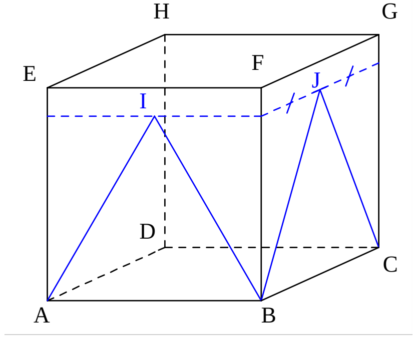
$\boxed{20}$ Soit ABCD un tétraèdre.
On note h_A, h_B, h_C, h_D les longueurs des hauteurs issues respectivement de A, B, C, D.
Démontrer que l'on a $\mathcal{A}_{ABC} \times h_D = \mathcal{A}_{BCD} \times h_A = \mathcal{A}_{CDA} \times h_B = \mathcal{A}_{DAB} \times h_C$.

$\boxed{21}$ Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O de côté 4 cm.
On suppose que $SO = 6$ cm.
1°) Calculer le volume de SABCD.
2°) Calculer la longueur SA.

$\boxed{22}$ Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.
Déterminer le volume du tétraèdre ABDE en fonction de a.
Calculer l'aire totale du tétraèdre.

23 Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.
On considère les sphères S et S' respectivement sphère inscrite et sphère circonscrite au cube.
Calculer leurs aires et les volumes des boules associées.

24 Soit ABCDEFGH un cube représenté en perspective cavalière tel que ABFE soit une face frontale.
1°) Soit J le point de la face BCGF tel que le triangle soit équilatéral.
Le but est de construire le point J sur la représentation en perspective.
Comprendre et reproduire la figure ci-dessous.



2°) En s'inspirant de la méthode du 1°), construire sur une nouvelle figure en perspective cavalière le point L de la face EFGH tel que le triangle EHL soit équilatéral.

25 Soit ABCDEFGH un cube représenté en perspective cavalière tel que ABFE soit une face frontale.
Soit M un point quelconque du segment $]\mathrm{EF}[$.
Construire le projeté orthogonal F' de F sur la droite (MG).

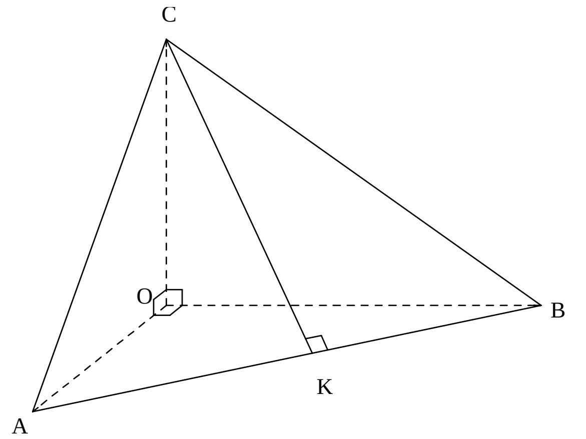
26 Soit ABCDEF un prisme droit dont les bases horizontales sont les triangles ABC et DEF rectangles respectivement en B et E avec D au-dessus de A.
On suppose que $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{BC}=3$, $\mathrm{AD}=6$.
On note I, J, K les points appartenant respectivement aux arêtes [AD], [BE], [CF] tels que $\mathrm{AI}=5$, $\mathrm{BJ}=4$, $\mathrm{CK}=4{,}5$.
Calculer le volume du tronc de prisme ABCIJK.

27 **Théorème de Gua de Malves**

Jean-Paul de Gua de Malves, né le 16 avril 1710 à Carcassonne et mort le 2 juin 1786 à Paris, est un savant français, initiateur de l'*Encyclopédie*.

Une extension du théorème de Pythagore à la géométrie dans l'espace. Il a été énoncé par René Descartes et Johann Faulhaber dès 1622. Jean-Paul de Gua le démontre en 1783 en utilisant les formules de Héron d'Alexandrie.

Soit OABC un tétraèdre trirectangle en O. Cela signifie que (OA) est perpendiculaire à (OB), (OB) est perpendiculaire à (OC) et (OC) est perpendiculaire à (OA).
On note K le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.



Reproduire la figure.

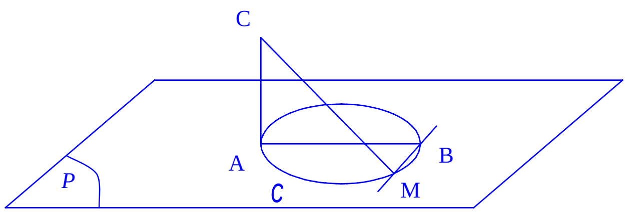
1°) Démontrer que la droite (OK) est perpendiculaire à la droite (AB).
Indication : On commencera par démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (OCK).
2°) Démontrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces c'est-à-dire $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}{}^2=\mathcal{A}_{\mathrm{OAB}}{}^2+\mathcal{A}_{\mathrm{OBC}}{}^2+\mathcal{A}_{\mathrm{OAC}}{}^2$.

On pose $\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OB}=b$, $\mathrm{OC}=c$.
Exprimer l'aire de ABC en fonction de a, b, c.
3°) On note h la distance de O au plan (ABC).
En exprimant de deux manières le volume de OABC, exprimer h en fonction de a, b, c.

28 Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{AD}=b$, $\mathrm{AE}=c$.
Exprimer le volume du tétraèdre ACFH en fonction de a, b, c (tétraèdre contenu à l'intérieur du pavé droit).

Version plus courte de l'exercice $\boxed{10}$:

$\boxed{\textbf{10}}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.



Reproduire la figure.

1°) Démontrer que (MB) ⊥ (MC).
2°) Démontrer que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

Version plus courte de l'exercice $\boxed{12}$:

$\boxed{\textbf{12}}$ Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.
Démontrer que (DF) ⊥ (ACH).

Corrigés à faire :

$\boxed{\textbf{14}}$

2°) Justifier que O est le milieu des segments $[IL]$, $[JM]$, $[KN]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N sont situés sur un même cercle du plan *P*.

3°) Déterminer la nature du triangle OIJ.

4°) Déduire des questions précédentes la nature de l'hexagone IJKLMN.

$\boxed{\textbf{17}}$

$\boxed{\textbf{19}}$

Solutions

Une justification possible (il y en a d'autres) :
On dit que les droites (BC) et (AD) sont parallèles, les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires (car ADHE est un carré).
D'après l'un des théorèmes (BC) et (AE) sont orthogonales.
On peut noter que ces deux droites sont non coplanaires

On peut utiliser le symbole // pour désigner :
- deux droites parallèles
ou
- deux plans parallèles.

On peut utiliser le symbole ⊥ pour désigner :
- deux droites orthogonales
ou
- une droite et un plan orthogonal à cette droite
ou
- deux plans perpendiculaires.

On rappelle que l'on ne dit pas qu'une droite appartient à un plan ou fait partie d'un plan.
On dit qu'une droite est contenue ou est incluse dans un plan.

On rappelle que, pour des droites, on réserve l'adjectif perpendiculaire dans le cas de deux droites sécantes.

On commencera par chercher les exercices au brouillon en respectant les notations et en employant les symboles correctement (surtout pas de symboles utilisés comme des abréviations !).

Exemple de ce qu'il ne faut pas faire : Hugo Eremeef (noté le 3-12-2020)
(BC) et (EH) ⊂ (BCE) et ⊥ (BF)

Le 9 décembre 2022

$\boxed{\textbf{12}}$ D et F sont équidistants de A, C, H donc D et F appartiennent à l'axe du cercle circonscrit au triangle ACH (propriété du cours sur l'axe d'un cercle).
D et F sont distincts donc (DF) ⊥ (ACH).

$\boxed{\textbf{13}}$
voir cours intersection d'une sphère et d'un plan
d(O, *P*)=2 Distance du point O au plan *P* est égale à 2
Il s'agit de la distance du point O à son projeté orthogonal sur *P*.

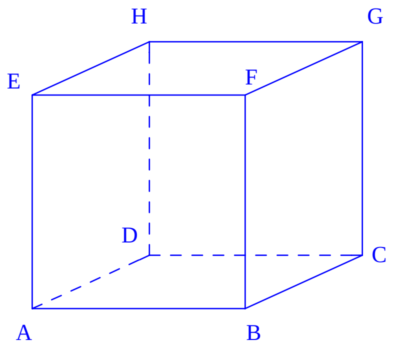
$\boxed{\textbf{18}}$ On se réfère à la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
Autre méthode qui revient un peu au même :
On démontre que (AB) ⊥ (BM).
Pour cela, on démontre que (AB) ⊥ (BCG).

$\boxed{\textbf{21}}$ On commence par faire une figure assez grande à la règle.

$\boxed{1}$ **Énoncé**

1°) Les droites (AB) et (FG) sont-elles sécantes ?
Quelles sont leurs parallèles passant par E ?
Dans quel plan ces parallèles sont-elles contenues ?
Dans ce plan, que peut-on en dire ?
2°) Reprendre le 1°) avec les mêmes droites en remplaçant E par C.
3°) Reprendre le 1°) en remplaçant E par A.

Solution :



1°) (AB) et (FG) ne sont pas sécantes.

La parallèle à (AB) passant par E est la droite (EF).
La parallèle à (FG) passant par E est la droite (EH).

(EH) et (EF) sont contenues (ou incluses) dans le plan (EFG).

On peut dire que (EH) et (EF) sont perpendiculaires car EFGH est un carré.

On peut donc dire que les droites (AB) et (FG) sont orthogonales. Ce n'est cependant pas demandé dans l'énoncé.

2°) (AB) // (DC)
(FG) // (BC)

(DC) et (BC) sont contenues dans le plan (ABC).
(DC) ⊥ (BC)

3°) (AB) et (FG) ne sont pas sécantes.

La parallèle à (AB) passant par A est confondue avec elle-même c'est-à-dire (AB).
La parallèle à (FG) passant par A est la droite (AD).

(AB) et (AD) sont contenues dans le plan (ABC).

On peut dire que (AB) et (AD) sont perpendiculaires car ABCD est un carré.

Donc (AB) et (FG) sont orthogonales.

$\boxed{2}$ **Énoncé**

1°) Que peut-on dire des droites (AE) et (BC) ? de (AE) et (GH) ?
2°) La propriété : « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est vraie dans le plan mais reste-t-elle vraie dans l'espace ?

Le 8 décembre 2021

J'avais noté exercice $\boxed{2}$ orthogonalité dans l'espace détailler peut-être.

Solution :

1°)
Une justification possible (il y en a d'autres) :
Les droites (BC) et (AD) sont parallèles (car ABCD est un carré).
Les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires (car ADHE est un carré).
D'après le théorème 2 (« Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre »), les droites (BC) et (AE) sont orthogonales.
On peut noter que ces deux droites sont non coplanaires.

On peut aussi utiliser des symboles :
(BC) // (AD)
(AD) ⊥ (AE)
Donc d'après le théorème 2, (BC) ⊥ (AE).

On va démontrer que (AE) ⊥ (BC) (les deux droites sont orthogonales).
Comment le démontrer ?
On fait la parallèle à (AE) passant par B.
L'une des parallèles est confondue avec elle-même.

On peut aussi utiliser la définition de deux droites orthogonales :

La parallèle à (AE) passant par B est la droite (BF).
La parallèle à (BC) passant par B est la droite (BC).

Les droites (BF) et (BC) sont perpendiculaires donc (AE) et (BC) sont orthogonales.

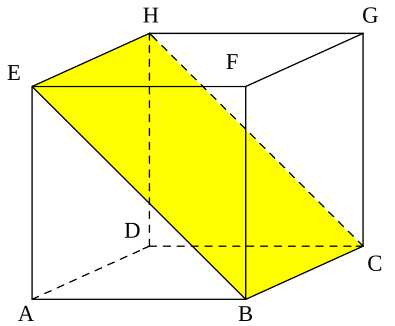
On démontre de même que (AE) et (GH) sont orthogonales.

2°) La propriété « Si deux droites sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles » est fausse dans l'espace.
En effet, (BC) et (GH) sont toutes les deux orthogonales à (AE) mais ne sont pas parallèles entre elles.

$\boxed{3}$ **Énoncé**

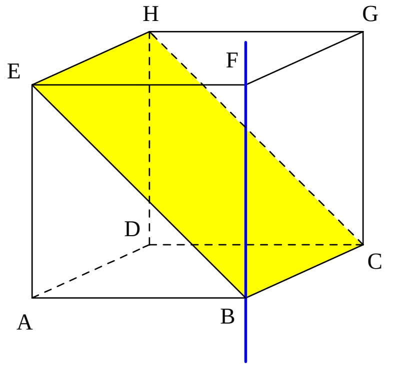
Soit *P* le plan contenant les points B, C, E, H.
Citer deux droites contenues dans le plan *P* qui sont orthogonales à (BF).
La droite (BF) est-elle orthogonale à *P* ?

Solution :



(BC) et (EH) sont deux droites contenues dans le plan *P* orthogonales à (BF).

La droite (BF) n'est pas orthogonale au plan *P* (on le voit sur la figure).

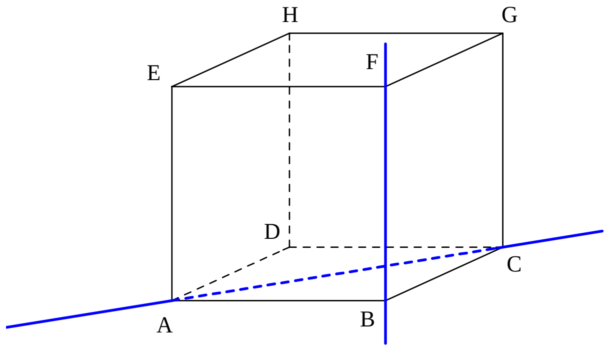


$\boxed{4}$ **Énoncé**

Démontrer que (BF) $\perp$ (AC).

Méthode : chercher un plan contenant (AC) orthogonal à (BF).

Solution :



Démontrons que la droite (BF) est orthogonale à la droite (AC).

La droite (BF) est orthogonale au plan (ABC) [on a le droit de le dire directement, cf. exemple du cours].
Or la droite (AC) est incluse dans le plan (ABC).
Donc (AC) et (BF) sont orthogonales.

$\boxed{5}$ **Énoncé**

1°) Que peut-on dire des droites (EB) et (EH) ? Justifier.
2°) Quelle est la nature du quadrilatère EBCH ? Justifier.
3°) Que peut-on dire de (EB) et (CH) ? Pourquoi ?
4°) Que peut-on dire de (EB) et (AF) ? (AF) et (CH) ?

Solution :

1°) On a (EH) $\perp$ (EAB) (on peut écrire directement cette orthogonalité car on est dans un cube)

De plus, (EB) $\subset$ (EAB).

Donc (EB) $\perp$ (EH).

2°) EBCH est un parallélogramme avec un angle droit.

Dans un parallélépipède, on a le droit de dire directement que EBCH est un parallélogramme [accepté comme ça, sans plus de détail].

Donc EBCH est un rectangle.

3°) On sait que EBCH est un rectangle
Donc (EB) / / (CH).

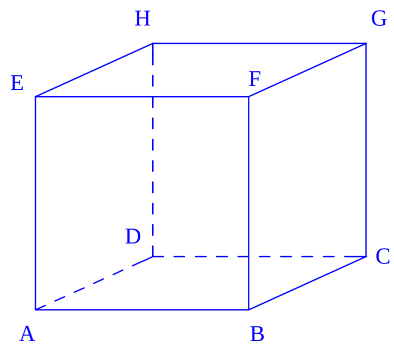
4°)

(EB) $\perp$ (AF) (diagonales d'un carré)

(AF) $\perp$ (CH) car (CH) / / (EB)

$\boxed{6}$ **Énoncé**

Dans chaque cas, indiquer si les droites sont orthogonales non coplanaires ou perpendiculaires. Justifier.
(AB) et (CG) ; (EB) et (AF) ; (AE) et (BD) ; (AC) et (CG).



Solution :

• Les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires. Les droites (CG) et (BF) sont parallèles. Donc les droites (AB) et (CG) sont orthogonales non coplanaires.

On peut rédiger avec des symboles :
On a (AB) $\perp$ (BF) et (CG) // (BF) donc …..

• Les droites (AF) et (EB) sont les diagonales du carré ABFE, toutes deux incluses dans le plan (ABE), donc elles sont perpendiculaires.

• La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC). Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan. Or la droite (BD) est incluse dans le plan (ABC). Donc les droites (AE) et (BD) sont orthogonales non coplanaires.

• La droite (CG) est orthogonale au plan (ABC). Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan. Or la droite (AC) est incluse dans le plan (ABC). Donc les droites (CG) et (AC) sont orthogonales.
Comme, de plus, elles sont sécantes en C, on peut dire qu'elles sont perpendiculaires.

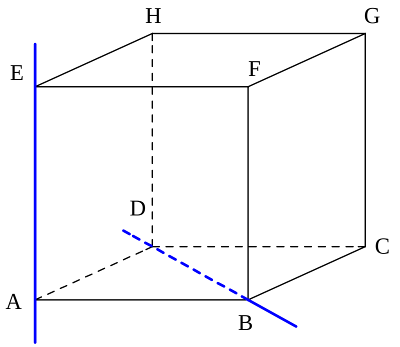
Autre méthode :
Le quadrilatère ACGE est un rectangle (résultat du cours).
Donc (AC) et (CG) sont perpendiculaires.

$\boxed{7}$ **Énoncé**

1°) Démontrer que (BD) $\perp$ (AE).
2°) Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? Justifier.
3°) À l'aide des questions précédentes, que peut-on dire de la droite (BD) et du plan (AEC) ?

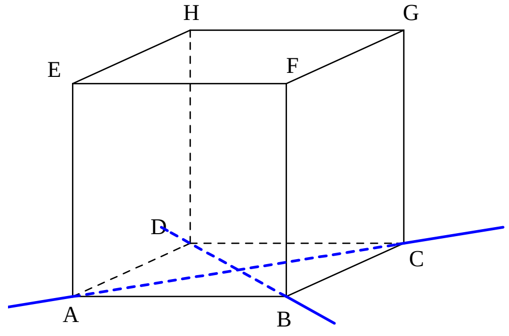
Solution :

1°) On a déjà répondu dans l'exercice précédent.

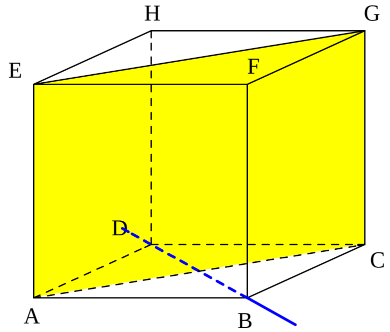


La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).
Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
Or la droite (BD) est incluse dans le plan (ABC).
On peut donc affirmer que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales non coplanaires.

2°) Les droites (AC) et (BD) sont les diagonales du carré ABCD. Nous pouvons dire d'une part, qu'elles sont incluses dans le même plan (ABC) ; d'autre part, qu'elles sont perpendiculaires.



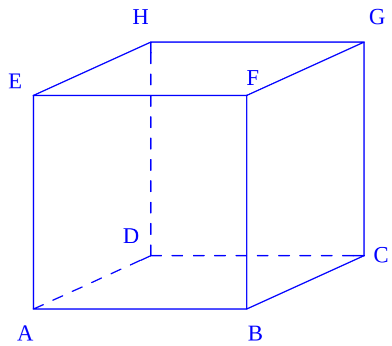
3°)



On a démontré que la droite (BD) est orthogonale aux droites (AE) et (AC). De plus, les droites (AE) et (AC) sont sécantes au point A et incluses dans le plan (AEC). Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan. Nous en concluons que la droite (BD) est orthogonale au plan (AEC).

$\boxed{8}$ **Énoncé**

Dans chaque cas, trouver une droite perpendiculaire à chacune des deux droites :
(AE) et (BC) ; (AB) et (FH) ; (EF) et (BG) ; (AF) et (CH).



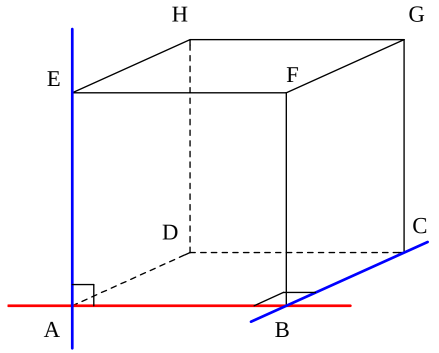
Solution :

Il s’agit de la recherche de perpendiculaires communes à deux droites non coplanaires.

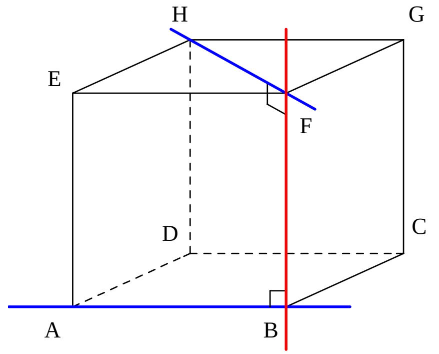
Dans chaque cas, on fait une figure. On doit respecter les conventions de pointillés. On peut éventuellement marquer le codage des angles droits.

•(AE) et (BC) [on peut noter que ces deux droites sont orthogonales non coplanaires]

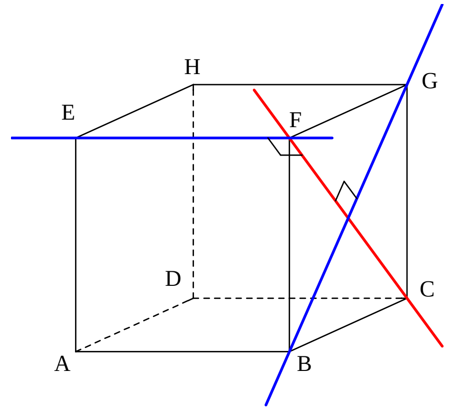
Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires car ABCD est un carré.
De même, les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.
La droite (AB) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (BC) et (AE).



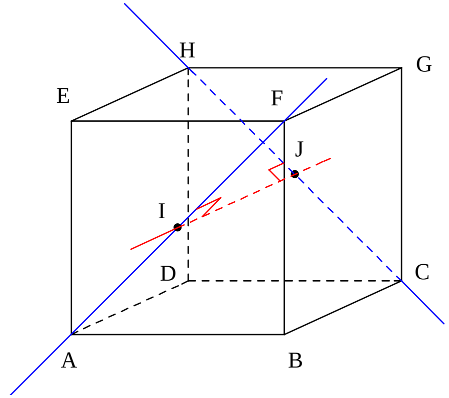
• (AB) et (FH)
Les droites (BF) et (AB) sont perpendiculaires car ABFE est un carré.
De même, les droites (BF) et (FH) sont perpendiculaires (résultat du cours à détailler éventuellement).
La droite (BF) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (AB) et (FH).



• (EF) et (BG) [on peut noter que ces deux droites sont orthogonales non coplanaires]
Les droites (FC) et (EF) sont perpendiculaires (résultat du cours à détailler éventuellement).
De même, les droites (FC) et (BG) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré BCGF.
La droite (FC) est donc perpendiculaire à chacune des deux droites (EF) et (BG).



• On peut remarquer que les droites (AF) et (CH) sont orthogonales non coplanaires.
La perpendiculaire commune aux deux droites est la droite (IJ) où I est le centre de la face ABFE et J le centre de la face CGHD.
Il est possible de justifier l’orthogonalité de la droite (IJ) avec chacune des deux droites.
Le résultat subsiste dans le cas d’un parallélépipède.



Les droites (AC) et (FH) ne conviennent pas (angles de 60°).
Point à détailler.

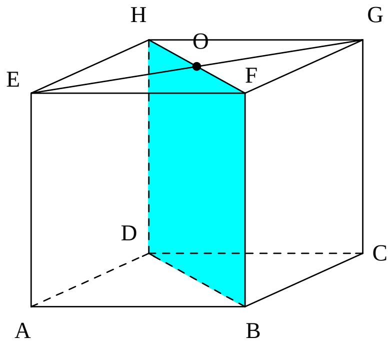
$\boxed{9}$ **Énoncé**

Soit O le centre de la face EFGH et *P* le plan contenant les points D, B, F, O, H.
1°) Démontrer que (HF) $\perp$ (EG).
2°) Démontrer que (BF) $\perp$ (EG).
3°) Que représente le plan *P* pour le segment [EG] ?
4°) Démontrer que (DF) $\perp$ (EG) et que (BH) $\perp$ (EG).

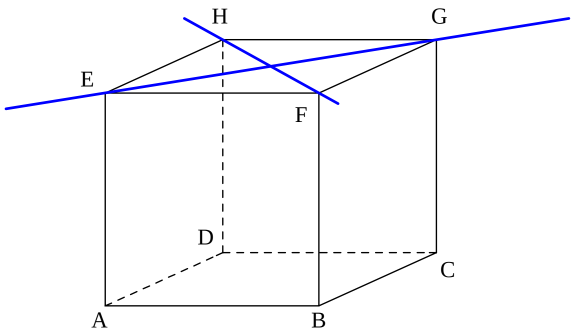
Solution :

ABCDEFGH : cube
O : centre de la face EFGH
P : plan contenant les points D, B, F, O, H

On fait une figure en plaçant notamment le point O.



1°) Les droites (HF) et (EG) sont les diagonales du carré EFGH. Donc les droites (HF) et (EG) sont perpendiculaires.
On a donc (HF) $\perp$ (EG).



2°) La droite (BF) est orthogonale au plan (EFG) d'où la droite (BF) est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan (EFG).

La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG). Donc les droites (BF) et (EG) sont orthogonales.

3°)

① D'après les questions 1°) et 2°), on a (HF) $\perp$ (EG) et (BG) $\perp$ (EG).
Or (HF) et (BG) sont deux droites sécantes du plan *P*, donc (EG) est orthogonale au plan *P*.

② O est le milieu de [EG].
Or $O \in P$ car O est aussi le milieu de [FH] (la face EFGH est un carré et les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu).

Donc *P* coupe [EG] en son milieu.

On en déduit que *P* est le plan médiateur de [EG].

Rappel de définition :

Le plan médiateur d'un segment défini par deux points distincts de l'espace est le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite support de ce segment.

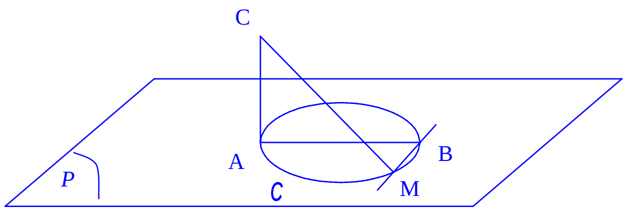
On peut remarquer que *P* est un plan de symétrie du cube.

Autre démarche possible :
Les points B, D, F, H sont équidistants de E et G (petits calculs simples : on est dans un cube et on note *a* la longueur des arêtes).

4°) La droite (DF) est incluse dans le plan *P*. De plus, la droite (EG) est orthogonale au plan *P* et par suite à toutes les droites incluses dans le plan *P*. Donc les droites (EG) et (DF) sont orthogonales.
La droite (BH) est incluse dans le plan *P*.
De manière analogue, nous démontrons que les droites (EG) et (BH) sont orthogonales.

$\boxed{10}$ Énoncé

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan *P*. On note [AB] un diamètre.
Soit C un point n'appartenant pas au plan *P* tel que la droite (AC) soit orthogonale au plan *P*.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B.
1°) Démontrer que (AC) $\perp$ (MB). Citer le théorème utilisé.
2°) Démontrer que (MB) $\perp$ (AMC). Citer le théorème utilisé.
3°) En déduire que (MB) $\perp$ (MC). Citer le théorème utilisé.
4°) Démontrer que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.



En perspective cavalière, le cercle est représenté par une ellipse.

Pour le tracé du cercle, on trace un parallélogramme avec deux côtés horizontaux et deux côtés obliques respectant l'angle de fuite.
On marque ensuite le centre ainsi que les milieux des côtés.
Les droites joignant les milieux des côtés opposés partagent ce parallélogramme en quatre petits parallélogrammes.
L'ellipse qui représente le cercle en perspective cavalière a pour centre le centre du parallélogramme et passe par les milieux des côtés.
On trace ensuite 4 arcs d'ellipse en faisant attention à être tangents aux côtés du parallélogramme.

Solution :

1°) $M \in P$ et $B \in P$ donc la droite (MB) est incluse dans le plan *P*.
De plus, on sait que la droite (AC) est orthogonale au plan *P*.
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan (théorème 2).
Nous en concluons que les droites (AC) et (MB) sont orthogonales.

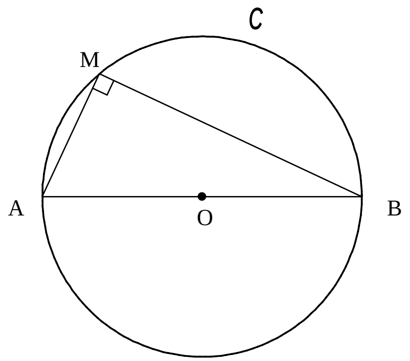
2°) Démontrons que (MB) ⊥ (AMC).

Remarque : On peut colorier le plan (AMC).
On le représenter par un triangle.
Il n'y a pas d'autres points de la figure dans ce plan, autres que A, M, C.

• Nous allons commencer par démontrer que les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.

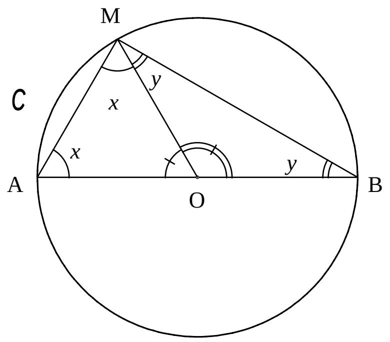
On utilise la propriété du plan d'angle droit inscrit dans un cercle.

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.



Le point O peut ne pas être marqué sur la figure. Seul compte le diamètre d'un cercle.

On démontre aisément ce résultat en utilisant les angles.
La démonstration est calquée sur celle de la propriété de l'angle inscrit (notre propriété en est d'ailleurs un cas particulier).



Comme $OA = OB = OM$, les triangles OAM et OBM sont isocèles en O.
Les angles $\widehat{OAM}$ et $\widehat{AMO}$ d'une part et $\widehat{OBM}$ et $\widehat{BMO}$ d'autre part ont la même mesure.

On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{OAM}$ et y la mesure en radians de l'angle $\widehat{OBM}$.

On a $\widehat{AOM} = \pi - 2x$ et $\widehat{BOM} = \pi - 2y$.

Comme les points A, O, B sont alignés dans cet ordre, on a $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = \pi \quad (1)$.

(1) donne donc $\pi - 2x + \pi - 2y = \pi$ soit $2x + 2y = \pi$ d'où $x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

Le mot « inscrit » s'applique aux polygones dans un cercle. On dit qu'un polygone est « inscriptible » pour exprimer que les sommets appartiennent à un même cercle.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre le segment [AB] et $M \in \mathcal{C}$ donc le triangle ABM est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

Ou autre rédaction :

[AB] est $\boxed{\text{un}}$ diamètre de $\mathcal{C}$ et $M \in \mathcal{C}$ donc le triangle ABM est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

Donc nous en déduisons que le triangle ABM est rectangle en M, et par suite, que les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.

Il est intéressant de coder alors la figure (codage de l'angle droit en perspective).

De plus, nous avons démontré que les droites (AC) et (MB) sont orthogonales. Les droites (AC) et (MA) sont sécantes au point A et sont incluses dans le plan (AMC).
Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan (théorème 1).
Nous en concluons que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMC).

3°) La droite (MB) est orthogonale au plan (AMC).
La droite (MC) est incluse dans le plan (AMC).
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan (théorème 2).
Nous en concluons que les droites (MC) et (MB) sont orthogonales.

4°) Démontrons que les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires.

D'après la question 2°), (MB) ⊥ (MAC).

Or (MB) ⊂ (MBC).

Donc les plans (MBC) et (MAC) sont perpendiculaires (propriété du cours : « Si un plan *P* contient une droite *D* orthogonale à un plan *Q*, alors les plans *P* et *Q* sont perpendiculaires »).

$\boxed{11}$ Énoncé

Soit ABCD un tétraèdre régulier.
On note I le milieu de [AB].
1°) Démontrer que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).
2°) En déduire que (AB) ⊥ (CD).
3°) On note J le milieu de [CD].
Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
On dit que c'est la perpendiculaire commune à ces deux droites.

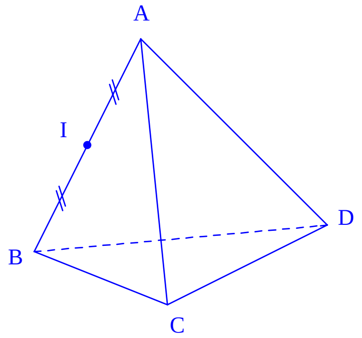
Étude du tétraèdre régulier

Solution :

Tétraèdre régulier

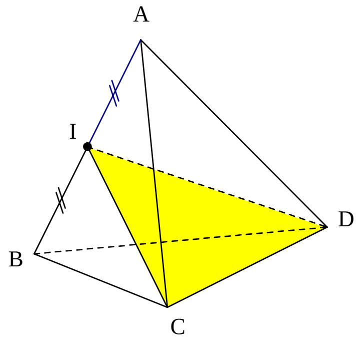
Toutes les arêtes sont de même longueur.
Toutes les faces sont des triangles équilatéraux identiques.

Cet exercice est l'occasion de parler de la confection d'un tétraèdre régulier à l'aide d'une feuille de papier.



ABCD est un tétraèdre régulier donc toutes ses faces sont des triangles équilatéraux identiques.

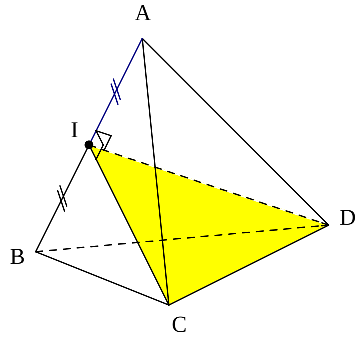
1°) **Démontrons que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (ICD).**



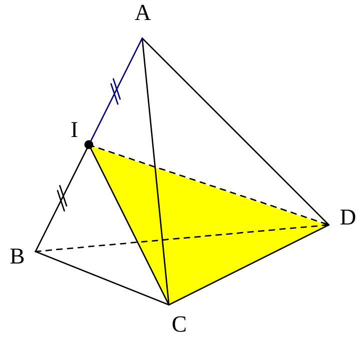
On peut tracer les segments $[\mathrm{IC}]$ et $[\mathrm{ID}]$ sur la figure pour faire apparaître le plan (ICD).

(AB) ⊥ (ID) (car dans le triangle équilatéral ABD, la droite (ID) est la hauteur issue du point D) et (AB) ⊥ (IC) (car dans le triangle équilatéral ABC, la droite (IC) est la hauteur issue du point C).
Or (IC) ⊂ (ICD) et (ID) ⊂ (ICD).
Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.
Donc (AB) ⊥ (ICD).
Or le point I est le milieu du segment [AB].
Donc (ICD) est le plan médiateur du segment [AB].

Autre méthode :
Soit P le plan médiateur du segment [AB].
On a $\mathrm{CA} = \mathrm{CB}$ donc $\mathrm{C} \in P$ propriété plan médiateur.
On a $\mathrm{DA} = \mathrm{DB}$ donc $\mathrm{D} \in P$ (même propriété ue précédemment).
I est le milieu de [AB] donc $\mathrm{I} \in P$ (par définition d'un plan médiateur).
Les points C, D, I ne sont pas alignés donc $P = (\mathrm{CDI})$.



2°) **Déduisons-en que (AB) ⊥ (CD).**



Il est difficile de visualiser l'orthogonalité des droites (AB) et (CD).

Le plan (ICD) est le plan médiateur du segment [AB]. Or (CD) ⊂ (ICD).
Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses (ou contenues) dans ce plan.
Donc (AB) ⊥ (CD).

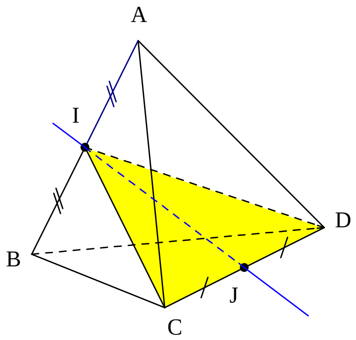
On retiendra la propriété suivante :

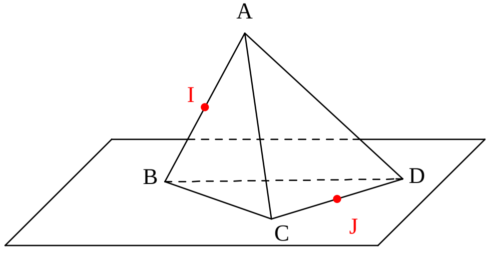
« Dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux. »

3°)

J : milieu de [CD]

Démontrons que (IJ) est perpendiculaire à (AB) et (CD).





1ère méthode :

On a $IC = ID$ (simple à démontrer) donc ICD est isocèle en I.
La droite (IJ) est donc la hauteur issue de I dans le triangle ICD.
Par suite, (IJ) $\perp$ (CD).

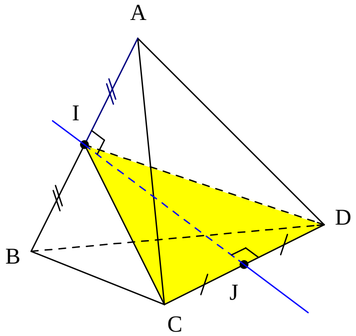
On démontre de même que (IJ) $\perp$ (AB).

2e méthode :

D'une part, (IJ) est contenue dans le plan (CDI).
D'autre part, le plan médiateur de [AB] est le plan (CDI) d'après la question 1°).
Par conséquent, (AB) $\perp$ (CDI).

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.

On en déduit que (AB) $\perp$ (IJ).



(IJ).$\perp$ (CD) à détailler

4°) Question supplémentaire
On note a la longueur commune à toutes les arêtes du tétraèdre ABCD.
Exprimer IJ en fonction de a.

Calculons IJ en fonction de a.

On se place dans le triangle CIJ rectangle en I.
D'après le théorème de Pythagore, on a $IJ^2 = IC^2 - CJ^2$.

On a $CJ = \dfrac{a}{2}$ car J est le milieu de $[CD]$ et $IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (formule de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a, on retrouve cette formule de manière évidente par le théorème de Pythagore).
On reprend le calcul de IJ^2.

$$IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= \frac{3a^2 - a^2}{4}$$
$$= \frac{2a^2}{4}$$
$$= \frac{a^2}{2}$$

On en déduit que $IJ = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Il est possible d'utiliser le résultat d'un exercice vu plus loin sur le carré inscrit dans un tétraèdre régulier.

Variante écrite le 3-12-2020

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$, $C \neq D$, $CA = CB$ et $DA = DB$.
Démontrer que (AB) $\perp$ (CD).

Soit P le plan médiateur de [AB].

On a $CA = CB$ donc $C \in P$.
On a $DA = DB$ donc $D \in P$.
On en déduit que la droite (CD) est contenue dans P.
Par définition d'un plan médiateur, la droite (AB) est orthogonale à P.
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
On en déduit que (AB) $\perp$ (CD).

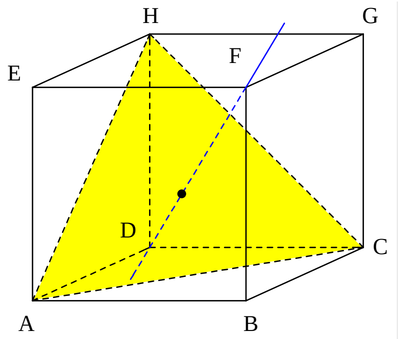
$\boxed{\textbf{12}}$

Ancienne version. La nouvelle version sera corrigée en classe.

Énoncé

Soit ABCDEFGH un cube.
Faire une figure en perspective cavalière.
1°) Démontrer que (DF) $\perp$ (AH).
2°) Démontrer que (DF) $\perp$ (CH).
3°) En déduire que (DF) $\perp$ (ACH).

Solution :



Le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (ACF) s'obtient en traçant la droite (DF) et la droite (OH) où O est le centre de la face ABCD.

1°) **Démontrons que (DF) ⊥ (AH).**

1ère méthode : On commence par démontrer que (AH) ⊥ (DEF).

Les droites (AH) et (DE) sont les diagonales du carré ADHE donc elles sont orthogonales (même perpendiculaires).
De plus, (EF) ⊥ (AEH) donc (EF) ⊥ (AH).

Par suite : (AH) ⊥ (DEF).

Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2e méthode : On utilise les plans médiateurs.

Le plan médiateur de [AH] est (DEF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2°) **Démontrons que (DF) ⊥ (CH).**

Les droites (CH) et (DG) sont les diagonales du carré CDHG donc elles sont orthogonales.
De plus, (FG) ⊥ (CGH) donc (FG) ⊥ (CH).

Par suite : (CH) ⊥ (DFG).

Or (DF) ⊂ (DFG). Donc (DF) ⊥ (CH).

3°) **Déduisons-en que (DF) ⊥ (ACH).**

Il est difficile – voire impossible – de visualiser cette orthogonalité sur la figure (représentation en perspective cavalière).
Il est normal de ne pas arriver à visualiser cette orthogonalité.

D'après la question 1°), (DF) ⊥ (AH).

D'après la question 2°), (DF) ⊥ (CH).

Or (AH) ⊂ (ACH) et (CH) ⊂ (ACH).

(DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ACH) donc (DF) ⊥ (ACH).

2e méthode :

On note a la longueur de toutes les arêtes du cube.
:
On a $DA = DC = DH = a$ et $FA = FC = FH = a\sqrt{2}$ (formule de la diagonale d'un carré).

Le point D est équidistant des points A, C, H.
De même, F est équidistant des points A, C, H.

Les points D et F appartiennent donc à l'axe du cercle circonscrit au triangle ACH (qui est un triangle équilatéral).

On en déduit que (DF) ⊥ (ACH).

2°) $DB = DE = DG = a\sqrt{2}$ (formule de la diagonale d'un carré) et $FB = FE = FG = a$.

Les points D et F appartiennent donc à l'axe du cercle circonscrit au triangle BEG (qui est un triangle équilatéral).

On en déduit que (DF) ⊥ (BEG).

3°) D'après les questions, (DF) ⊥ (ACH) et (DF) ⊥ (BEG).
Or si une droite est orthogonale à deux plans, alors les deux plans sont parallèles.

On en déduit que (ACH) // (BEG).

Complément important :

D'après un résultat vu en exercice dans le chapitre sur les vecteurs de l'espace, le point d'intersection I de la droite (DF) avec le plan (ACH) vérifie $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.
On démontre aisément que le triangle ACH est équilatéral.
Le point I est le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit.

La droite (DF) est donc l'axe du cercle circonscrit au triangle ACH.

Autre version :

1°) **Démontrons que (DF) ⊥ (AH).**

Le plan médiateur de [AH] est (DEF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DEF). Donc (DF) ⊥ (AH).

2°) **Démontrons que (DF) ⊥ (CH).**

Le plan médiateur de [CH] est (DAF) (car c'est un plan de symétrie du cube).
Or (DF) ⊂ (DFA). Donc (DF) ⊥ (CH).

3°) **Déduisons-en que (DF) ⊥ (ACH).**

(DF) ⊥ (AH) et (DF) ⊥ (CH).

Or (AH) ⊂ (ACH) et (CH) ⊂ (ACH).

(AH) et (CH) sont deux droites sécantes du plan (ACH).

Donc (DF) ⊥ (ACH).

Nouvelle version :

2°)

Le 14-1-2021

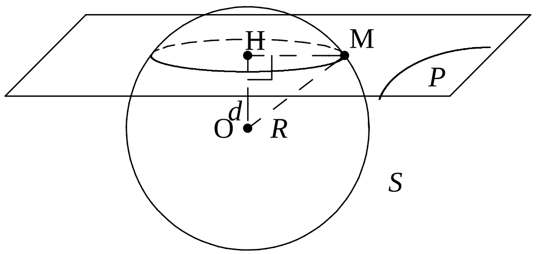
Ex. sur vecteurs de l'espace / orthogonalité

(DF) ⊥ (BEG)

Le point d'intersection de (DF) et (BEG) est le point d'intersection I de (BD) et (DF).
I est le centre de gravité du triangle BEG.
BEG est un triangle équilatéral.

13

On commence par faire une figure (voir figure de l'intersection d'une sphère et d'un plan dans le cours).



On applique la propriété sur la position relative d'une sphère et d'un plan. On regarde la distance du centre de la sphère au plan.

On sait que $\mathrm{d}(\mathrm{O}, P) = 2$ et que le rayon de S est égal à 3.

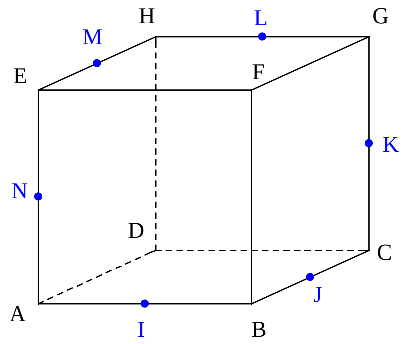
On a donc $\mathrm{d}(\mathrm{O}, P) < 3$ (autrement dit, on a rayon de $S > \mathrm{d}(\mathrm{O}, P)$.

Par conséquent, l'intersection de S et P est le cercle de centre H, projeté orthogonal de O sur P, et de rayon $r = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

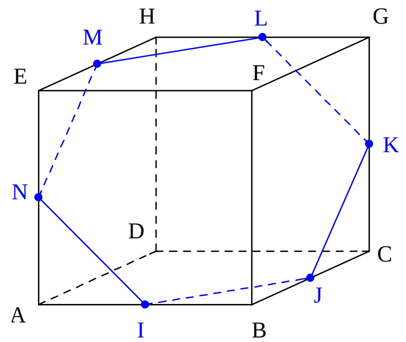
14

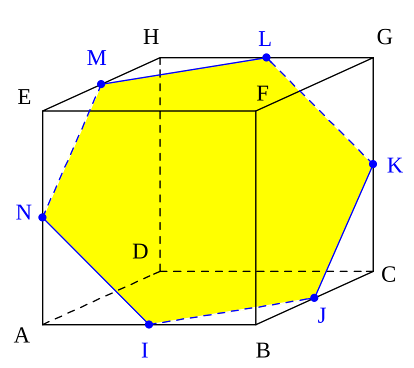
Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

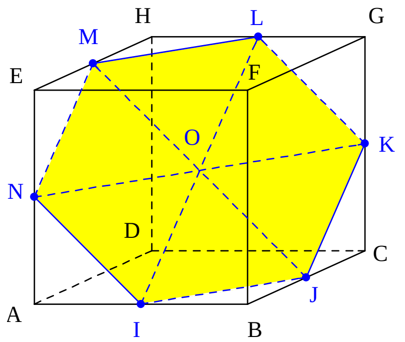
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{BC}]$, $[\mathrm{CG}]$, $[\mathrm{GH}]$, $[\mathrm{EH}]$, $[\mathrm{AE}]$.



Le codage des milieux n'est pas marqué afin de ne pas alourdir la figure.







1°) On note *P* le plan médiateur de $[\mathrm{DF}]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N appartiennent à *P*.

On démontre que tous les points sont équidistants de D et F.

Erreur de raisonnement :

P est le plan médiateur de [DF] donc tous les points appartenant à *P* sont équidistants de D et de F.

$\mathrm{DI}^2=\mathrm{DA}^2+\mathrm{AI}^2$

$\mathrm{DI}^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$\mathrm{DI}^2=a^2+\dfrac{a^2}{4}$

$\mathrm{DI}^2=\dfrac{5a^2}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{IF}^2&=\mathrm{FB}^2+\mathrm{BI}^2\\&=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\\&=\frac{5a^2}{4}\end{aligned}$$

On obtient $\mathrm{DI}=\mathrm{DF}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

On peut aussi sans calcul utiliser les triangles isométriques (« triangles égaux »).

De même on a $\mathrm{DJ}=\mathrm{JF}=\mathrm{DK}=\mathrm{KF}=\mathrm{DL}=\mathrm{LF}=\mathrm{DM}=\mathrm{FM}=\mathrm{DN}=\mathrm{FN}$.

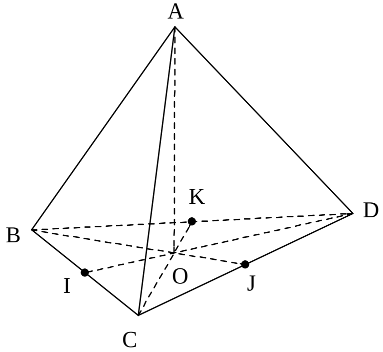
On en conclut que les points I, J, K, L, M et N appartiennent au plan *P*.

2°) Justifier que O est le milieu des segments $[\mathrm{IL}]$, $[\mathrm{JM}]$, $[\mathrm{KN}]$.
Démontrer que I, J, K, L, M, N sont situés sur un même cercle du plan *P*.

3°) Déterminer la nature du triangle OIJ.

4°) Déduire des questions précédentes la nature de l'hexagone IJKLMN.

15



Le triangle AOB est rectangle en O.

$$\begin{aligned}\mathrm{AO}^2&=\mathrm{AB}^2-\mathrm{OB}^2\\&=a^2-\left(\frac{2}{3}\mathrm{BI}\right)^2\\&=a^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\\&=\frac{2a^2}{3}\end{aligned}$$

16

1°)
On exprime $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IJ}}&=\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{BI}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\\&=-\lambda\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\lambda\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\\&=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LK}}&=\overrightarrow{\mathrm{LD}}+\overrightarrow{\mathrm{DK}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{DL}}+\overrightarrow{\mathrm{DK}}\\&=-\lambda\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=\lambda\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)\\&=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

2°) IJKL est un parallélogramme.

Erreur de raisonnement :

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Un parallélogramme est losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Donc IJKL est un losange si et seulement si (IK) est orthogonale à (JL)
si et seulement si (AC) est orthogonale à (BD)

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

Donc IJKL est un rectangle si et seulement si (IJ) est orthogonale à (JK).

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et qui a deux côtés consécutifs perpendiculaires est un carré.

Donc IJKL est un carré si et seulement si (IK) est orthogonale à (JL) et (IJ) est orthogonale à (JK).

Cas particulier :
On suppose que ABCD est un tétraèdre régulier et que I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$.
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

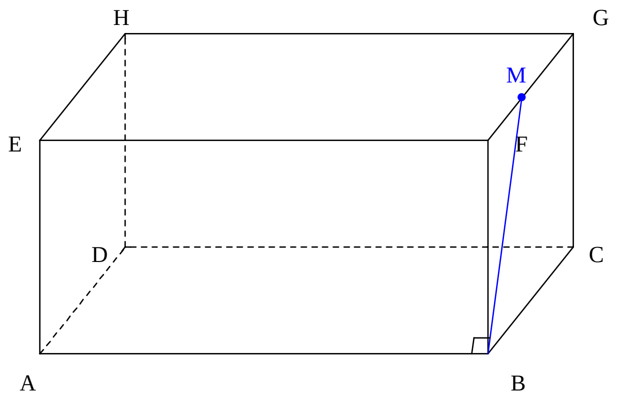
Réponse : IJKL est un carré.
On retiendra que la section d'un tétraèdre régulier par un plan peut être un carré.

17

Corrigé à faire

18

Faire la figure



On se réfère à la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition [projeté orthogonal d'un point sur une droite]

Soit *D* une droite de l'espace et A est un point de l'espace.

On appelle projeté orthogonal de A sur *D* le point H d'intersection de la droite *D* et du plan passant par A et orthogonal à *D*.

Le plan passant par M et orthogonal à (AB) est le plan (BCG).

L'intersection de (BCG) avec (AB) est B.

On en déduit que B est le projeté orthogonal de M sur (AB) (définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite).

Autre méthode qui revient un peu au même :
On démontre que (AB) ⊥ (BM).
Pour cela, on démontre que (AB) ⊥ (BCG).

Remarque de Pauline Sébillotte le 15-12-2021 :
L'angle $\widehat{ABM}$ est droit (codage sur la figure).

Le projeté orthogonal de tous les points du plan (BCG) sur (AB) est B.

18 Projetés orthogonaux

Projeté orthogonal de O

C'est le milieu de $[BC]$.

On utilise la propriété suivante (conservation du milieu par projection orthogonale).
On l'admet sans démonstration.

Soit *D* une droite de l'espace.
Soit M et N deux points quelconques de l'espace.
On note M' et N' leurs projetés orthogonaux respectifs sur *D*.
Le projeté orthogonal du milieu I de [MN] est le milieu de $[M'N']$.

Le 15 décembre 2021

J'ai noté les questions suivantes à l'oral lors de la correction du **18** :

Déterminer le projeté orthogonal de M sur (CD) : C
Déterminer le projeté orthogonal de M sur (DH) : H
Déterminer le projeté orthogonal de M sur le plan (ABF) : F

Projeté orthogonal de F sur (ABC) ? B
Projeté orthogonal de F sur (ADH) ? E

Soit O le centre de la face BCGF.
Déterminer son projeté orthogonal sur (AB).

19

Corrigé à faire

20

ABCD : tétraèdre

h_A , h_B , h_C , h_D : longueurs des hauteurs issues respectivement de A, B, C, D

Démontrons que $\mathcal{A}_{ABC} \times h_D = \mathcal{A}_{BCD} \times h_A = \mathcal{A}_{CDA} \times h_B = \mathcal{A}_{DAB} \times h_C$.

On exprime le volume de ABCD de 4 manières différentes.

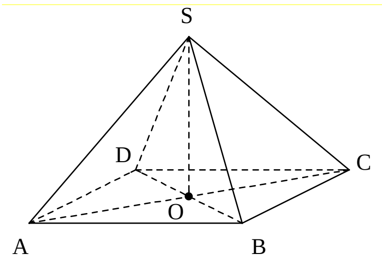
$$V_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times h_D}{3} = \frac{\mathcal{A}_{BCD} \times h_A}{3} = \frac{\mathcal{A}_{CDA} \times h_B}{3} = \frac{\mathcal{A}_{DAB} \times h_C}{3}$$

On a donc $\frac{\mathcal{A}_{ABC} \times h_D}{3} = \frac{\mathcal{A}_{BCD} \times h_A}{3} = \frac{\mathcal{A}_{CDA} \times h_B}{3} = \frac{\mathcal{A}_{DAB} \times h_C}{3}$.

En multipliant par 3, on obtient immédiatement $\mathcal{A}_{ABC} \times h_D = \mathcal{A}_{BCD} \times h_A = \mathcal{A}_{CDA} \times h_B = \mathcal{A}_{DAB} \times h_C$.

21

On commence par faire une figure assez grande à la règle en perspective cavalière.



1°) Calculons le volume de la pyramide SABCD.

$$V_{SABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \times SO}{3}$$

$$V_{SABCD} = \frac{16 \times 6}{3}$$

$$V_{SABCD} = 32 \text{ cm}^3$$

2°) Calculons SA.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle SOA rectangle en O.

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

$AC = 4\sqrt{2}$ cm (formule de la longueur des diagonales d'un carré)

O est milieu de [AC] donc $AO = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$

$$SA^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$SA^2 = 44$$

$$SA = 2\sqrt{11} \text{ cm}$$

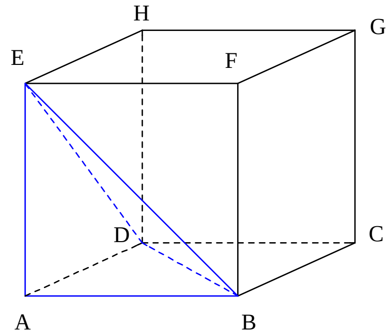
apothème d'un polygone régulier ou d'une pyramide régulière

22

ABCDEFGH : cube d'arête *a*

On fait une figure assez grande.

On fait apparaître le tétraèdre ABDE en traçant en pointillés toutes les arêtes cachées.



• Exprimons le volume du tétraèdre ABDE en fonction de *a*.

On doit choisir une base et déterminer la hauteur correspondante.

Il y a 3 choix possibles qui reviennent tous au même.

base : triangle ABD ; hauteur correspondante : [AE]

base : triangle ABE ; hauteur correspondante : [AD]

base : triangle ADE ; hauteur correspondante : [AB]

Ces choix sont tous les trois possibles car ABDE est un tétraèdre trirectangle. Il possède 3 angles droits en A.

On parle de « coin de cube ».

$$V_{ABDE} = \frac{\mathcal{A}_{ABD} \times AE}{3}$$

Comme le triangle ABD est rectangle en A, on a $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{a^2}{2}$.

$$V_{\text{ABDE}}=\frac{\frac{a^2}{2}\times a}{3}$$

$$V_{\text{ABDE}}=\frac{\frac{a^3}{2}}{3}$$

$$V_{\text{ABDE}}=\frac{a^3}{6}$$

Calculons l'aire totale du tétraèdre ABDE.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

$$A_{\text{tot}}=A_{\text{ABD}}+A_{\text{ABE}}+A_{\text{ADE}}+A_{\text{BDE}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{ABD}}=\mathcal{A}_{\text{ABE}}=\mathcal{A}_{\text{ADE}}=\frac{a^2}{2}$$

$$\mathcal{A}_{\text{BDE}}=\frac{a\sqrt{2}\times\frac{a\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\mathcal{A}_{\text{BDE}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathcal{A}_{\text{tot}}=\frac{3a^2+a^2\sqrt{3}}{2}$$

On factorise le numérateur par a^2.

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}}=\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$$

Tronc de cône / tronc de pyramide

23

ABCDEFGH : cube de centre O

On note a la longueur des arêtes.

On fait une figure assez grande.

Les deux sphères sont concentriques : elles ont toutes les deux le même centre.
On dit que deux sphères de l'espace sont concentriques pour exprimer qu'elles ont le même centre.
On dit que deux cercles du plan sont concentriques pour exprimer qu'elles ont le même centre.
On parle d'aire d'une sphère mais pas du volume d'une sphère car une sphère est une surface.
On parle du volume d'une boule.
On parle de la boule inscrite.
On pourrait écrire : « Soit r le rayon de S et r' le rayon de la sphère. »

S : sphère inscrite dans le cube

S est la sphère de centre O tangente à toutes les faces en leur centre (chaque face est un carré).

S a pour rayon $\frac{a}{2}$. En effet, le projeté orthogonal de O sur chaque face est le centre de cette face.

Il s'ensuit que la distance de O au plan de chaque face est égale à $\frac{a}{2}$ (facile à démontrer).

On note $\mathcal{A}$ son aire et $\mathcal{V}$ le volume de la boule associée.

$$\mathcal{A}=4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\mathcal{A}=4\pi\times\frac{a^2}{4}$$

$$\mathcal{A}=\pi a^2$$

$$\mathcal{V}=\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$\mathcal{V}=\frac{4}{3}\times\pi\times\frac{a^3}{8}$$

$$\mathcal{V}=\frac{\cancel{4}}{3}\times\pi\times\frac{a^3}{2\times\cancel{4}}$$

$$\mathcal{V}=\frac{\pi a^3}{6}$$

On peut effectuer une analyse dimensionnelle rapide.

S' : sphère circonscrite au cube

S' est la sphère de centre O qui passe par tous les sommets du cube.

Les grandes diagonales du cube ont pour longueur $a\sqrt{3}$.

S' a donc pour rayon $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

On note $\mathcal{A}$ 'son aire et $\mathcal{V}$ ' le volume de la boule associée.

$$\mathcal{A}'=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\mathcal{A}'=4\pi\times\frac{3a^2}{4}$$

$$\mathcal{A}'=3\pi a^2$$

$$V' = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

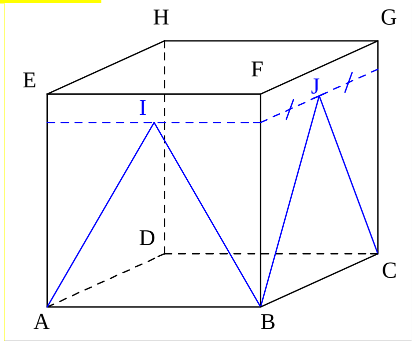
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

$$V' = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \pi \times \frac{\cancel{3}a^3\sqrt{3}}{2 \times \cancel{4}}$$

$$V' = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$$

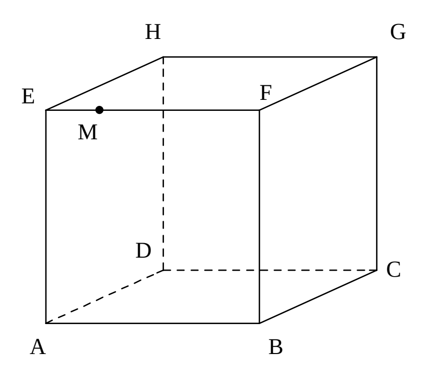
24

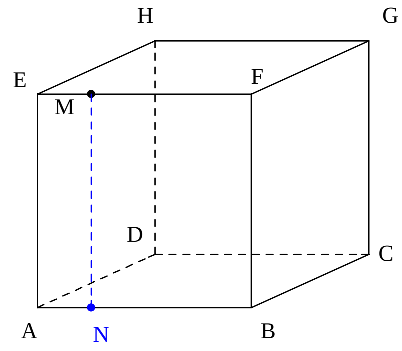
Soit ABCDEFGH un cube représenté en perspective cavalière tel que ABFE soit une face frontale.
1°) Soit J le point de la face BCGF tel que le triangle soit équilatéral.
Le but est de construire le point J sur la représentation en perspective.
Comprendre et reproduire la figure ci-dessous.

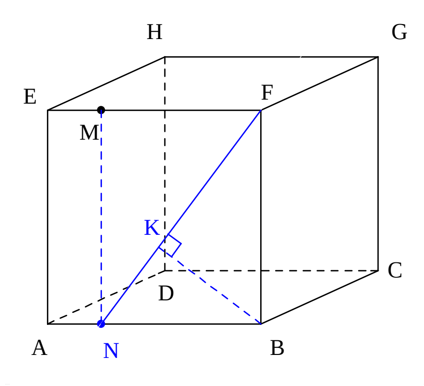


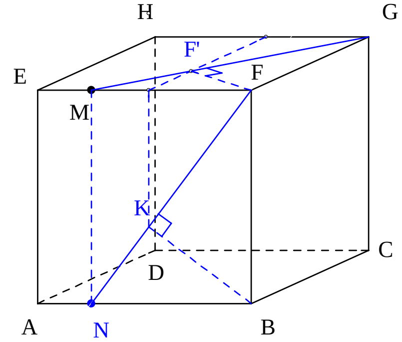
2°) En s'inspirant de la méthode du 1°), construire sur une nouvelle figure en perspective cavalière le point L de la face EFGH tel que le triangle EHL soit équilatéral.

25 L'idée est de faire la construction dans un plan frontal où les angles (en particulier les angles droits sont conservés).









On utilise la conservation des rapports de longueur dans une perspective cavalière.

$\boxed{26}$

Prisme à base triangulaire tronqué
Tronc de prisme à base triangulaire

Figure avec ABC rectangle en B

Formule du cours : $V_{\text{tronc de prisme à base triangulaire}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times (h_1 + h_2 + h_3)}{3}$

On applique cette formule $\boxed{\text{en situation}}$.

Soit V le volume du solide tronqué.

$$V = \frac{\mathcal{A}_{\text{ABC}} \times (\text{AI} + \text{BJ} + \text{CK})}{3}$$
$$V = \frac{6 \times (5 + 4 + 4{,}5)}{3}$$
$$V = 27 \text{ cm}^3$$

$\boxed{27}$ **Théorème de Gua de Malves**

1°)

(OC) est perpendiculaire à (OA) et (OB).
Les droites (OA) et (OB) sont sécantes en A.
La droite (OC) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (OAB), donc la droite (OC) est orthogonale au plan (OAB).
La droite (AB) est contenue dans le plan (OAB), donc (OC) est orthogonale à (AB).
(CK) est perpendiculaire à (AB). Les droites (OC) et (CK) sont sécantes en C.
La droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (OCK), donc la droite (AB) est orthogonale au plan (OCK). La droite (OK) est contenue dans le plan (OCK), donc (AB) est orthogonale à (OK).
(AB) et (OK) sont sécantes donc elles sont perpendiculaires.

2°) On a $\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{\text{AB} \times \text{CK}}{2}$ donc $\mathcal{A}_{\text{ABC}}{}^2 = \dfrac{\text{AB}^2 \times \text{CK}^2}{4}$ $\quad (1)$.

Le triangle OCK est rectangle en O, car la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (OAB), donc la droite (OC) est orthogonale à (OK).
Par le théorème de Pythagore, on a $\text{CK}^2 = \text{OK}^2 + \text{OC}^2$.

Avec l'égalité (1), on obtient $\mathcal{A}_{\text{ABC}}{}^2 = \dfrac{\text{AB}^2 \times (\text{OK}^2 + \text{OC}^2)}{4} = \dfrac{\text{AB}^2 \times \text{OK}^2 + \text{AB}^2 \times \text{OC}^2}{4}$ $\quad (2)$.

Le triangle OAB est rectangle en O donc $\text{OA}^2 + \text{OB}^2 = \text{AB}^2$, ce qui permet d'obtenir, en reportant dans l'égalité (2) : $\mathcal{A}_{\text{ABC}}{}^2 = \dfrac{\text{AB}^2 \times \text{OK}^2 + (\text{OA}^2 + \text{OB}^2) \times \text{OC}^2}{4}$ soit $\mathcal{A}_{\text{ABC}}{}^2 = \dfrac{\text{AB}^2 \times \text{OK}^2 + \text{OA}^2 \times \text{OC}^2 + \text{OB}^2 \times \text{OC}^2}{4}$.

On va maintenant relier cela aux aires des triangles OAB, OBC et OAC.

$$\mathcal{A}_{\text{OBC}} = \frac{\text{OB} \times \text{OC}}{2}$$
$$\mathcal{A}_{\text{OAC}} = \frac{\text{OA} \times \text{OC}}{2}$$

$\mathcal{A}_{\text{OAB}} = \dfrac{\text{AB} \times \text{OK}}{2}$ car [OK] est la hauteur de OAB issue de A (d'après la question 1°))

En conclusion, cela donne bien : $\mathcal{A}_{\text{ABC}}{}^2 = \mathcal{A}_{\text{OAB}}{}^2 + \mathcal{A}_{\text{OBC}}{}^2 + \mathcal{A}_{\text{OAC}}{}^2$.

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2}$$

$\boxed{28}$

Figure à faire

Soit V le volume du tétraèdre.

$$V = V_{\text{pavé}} - 4V_{\text{pyramides}}$$
$$= abc - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times c\right)$$
$$= abc - \frac{2}{3}abc$$
$$= \frac{abc}{3}$$