TS Orthogonalité dans l’espace

Le dimanche 26 septembre 2021

Claire Lommé

- polyèdre

- gravure avec formule volume prisme tronqué

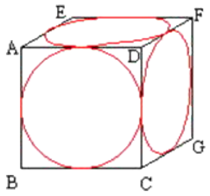
Angle droit : voir article de Cluzel sur la perspective

http://warmaths.fr/MATH/Resum3/nivvgePerspective.htm

Perspective
Problèmes de perspective

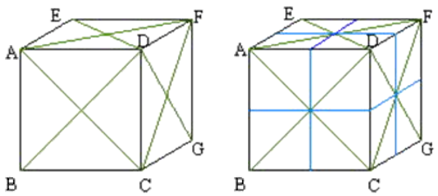
Exemple 3: *dessin d'un cercle de 3cm de diamètre.*

Dessiner sur trois faces d’un cube (une frontale, une latérale et une de dessus) un cercle de 3cm de diamètre avec comme angle de fuite 30°, comme coefficient de fuite 0,5 (ce qui revient à diviser par 2) et comme point de vue : dessus-droite.

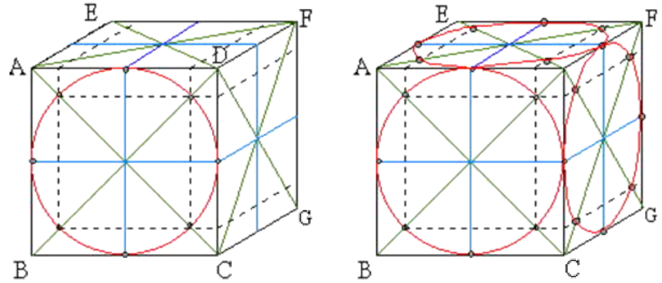


Les faces d’un cube étant des carrés, nous allons utiliser le cercle inscrit dans un carré de 3cm de côté.

Nous allons commencer par le plus facile : tracer le cube ABCDEHGF et le cercle inscrit dans le carré de la face frontale ABCD. Son centre est à l'intersection des diagonales (en vert) et des médianes (en bleu) du carré ABCD. Nous traçons aussi les diagonales et les médianes des autres faces (les milieux restent des milieux sur les fuyantes).

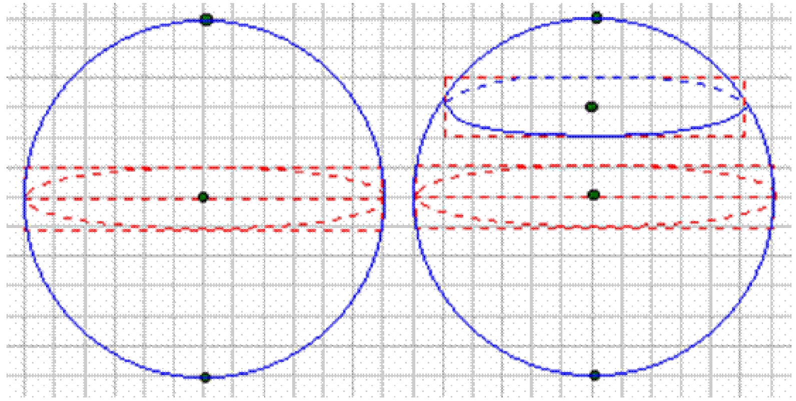


Dès que le cercle inscrit dans ABCD est tracé nous obtenons huit points caractéristiques : intersections de ce cercle et des médianes et des diagonales. Sur les autres faces, qui sont aussi des carrés, les cercles inscrits dans ADFE et CDFG passent par des points identiques. Pour les obtenir nous traçons (en pointillés) des lignes de report (parallèles aux côtés des carrés et passant par ces points 2 par 2).



Il ne reste plus qu’à joindre ces points, sur chaque face, par un trait continu tout en rondeurs... ce qui n’est pas forcément le plus facile ! Vous venez de dessiner deux cercles sur des faces fuyantes.

Pour une sphère : (n’est pas au programme de 4e…
Les cercles horizontaux et verticaux sont, comme pour le cylindre et le cône, dessinés dans des rectangles dont l'une des dimensions diminue lorsque le plan du cercle s'éloigne du centre de la sphère (sinon le cercle serait dessiné en dehors de la sphère..).



Quant aux cercles dans des plans obliques (ni horizontaux, ni verticaux) ils sont contenus d

math.sicard.free.fr

Il est commode d’utiliser une PC(90°,) pour représenter les corps ronds.

Plan du chapitre :

Introduction :

Les angles et les longueurs sont conservés dans les plans frontaux mais ne sont pas conservés dans les autres plans.

Angles droits en perspective cavalière dans un cube ou un pavé droit.

Il est parfois difficile voire impossible de visualiser des orthogonalités dans l'espace.
Cela montre l'importance de démontrer des orthogonalités et motive donc l'intérêt d'étudier des propriétés et des théorèmes d'orthogonalité dans l'espace.

La plupart des propriétés et théorèmes du chapitre sont admis sans démonstration.

Le 27-11-2021

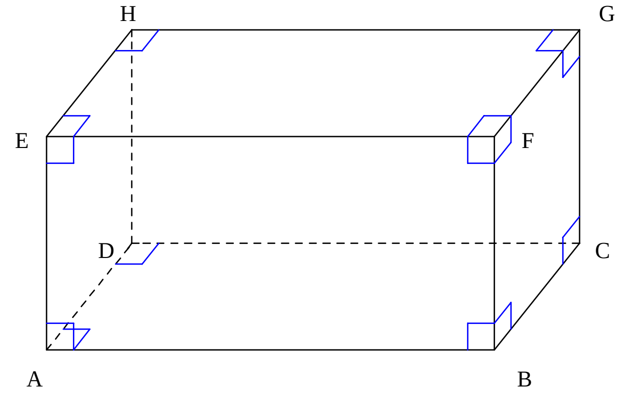
Distance de deux droites parallèles dans le plan et dans l'espace
Distance de deux plans parallèles dans l'espace
Il faut donner la définition.

Le 30 novembre 2021

« Dieu est une sphère infinie dont le centre est partout et la circonférence nulle part. » phrase de Blaise Pascal signifie que Dieu est dans le cœur de chaque homme et que la portée de son amour est infinie.

Le 17 décembre 2021

Lorsque la droite est notée par deux points différents, $d\left(M,(AB)\right)$.
Observation des angles droits dans un pavé droit.



I. Droites orthogonales dans l'espace

1°) Définition

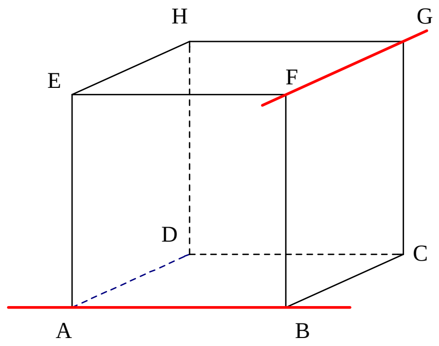
On dit que deux droites de l'espace sont **« orthogonales »** lorsque leurs parallèles menées d'un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Cette définition ne dépend pas du point choisi.

2°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.

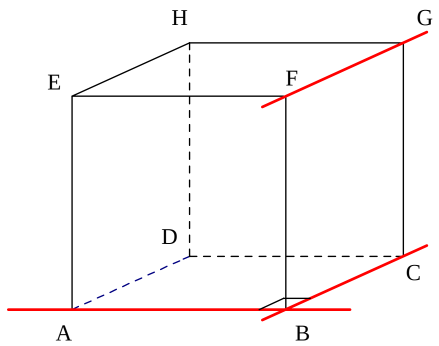
On s'intéresse aux droites (AB) et (FG).



On considère les parallèles aux deux droites passant par un point.
On prend par exemple B (on peut prendre en fait n'importe quel point de l'espace).

La parallèle à la droite (AB) passant par B est la droite (AB) [elle est confondue avec elle-même].

La parallèle à la droite (FG) passant par B est la droite (BC).



Les droites (BC) et (AB) sont perpendiculaires car ABCD est un carré.

Donc on en déduit, grâce à la définition, que les droites (AB) et (FG) sont orthogonales.

On utilise le symbole « $\perp$ ». Ainsi, on peut écrire : « (AB) $\perp$ (FG) ».

On pourra utiliser le résultat d'orthogonalité des droites (AB) et (FG), établi dans l'exemple, directement sans le redémontrer.
Il en est de même pour d'autres arêtes du cube.

On pourrait recommander avec les parallèles passant par un autre point, par exemple, le point E.

On utilise le symbole « $\perp$ » qui se lit « est orthogonale à ». Pour écrire qu'une droite D est orthogonale à une droite D', on écrira par exemple : « $D \perp D'$ ».

On ne peut pas différencier par le symbole des droites orthogonales coplanaires (c'est-à-dire perpendiculaires) ou des droites orthogonales non coplanaires.
C'est dommage mais ça n'est pas gênant.

Quand on veut dire que deux droites de l'espace sont perpendiculaires, on est obligé de l'écrire en toutes lettres, sans utiliser de symbole.
Lorsqu'on veut dire que des droites de l'espace sont perpendiculaires, on doit l'écrire en toutes lettres. Il n'y a pas de symbole pour cela.
Dans le plan, les notions de droites perpendiculaires et orthogonales sont confondues.

3°) Remarques

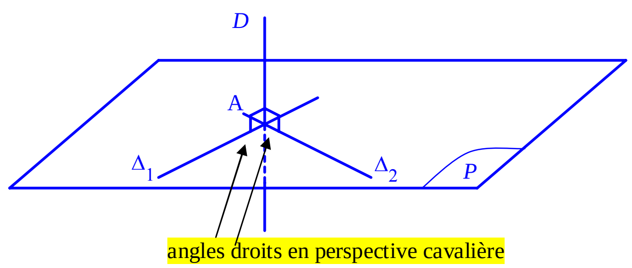
Attention : Deux droites de l'espace orthogonales ne sont pas forcément coplanaires.

L'adjectif « perpendiculaire » s'applique dans l'espace à des droites orthogonales sécantes uniquement.
(Par contre, les symboles « perpendiculaires » et « orthogonales » sont les mêmes).

II. Droite orthogonale à un plan

1°) Définition

On dit qu'une droite de l'espace est **« orthogonale »** à un plan pour exprimer qu'elle est perpendiculaire à deux droites distinctes de ce plan.



Δ est perpendiculaire à D_1 et à D_2 mais D_1 et D_2 ne sont pas perpendiculaires.

Image mentale à retenir : plan horizontal-droite verticale

(exemple concret : une porte qui tourne autour de ses gonds)

On retient l'image mentale :

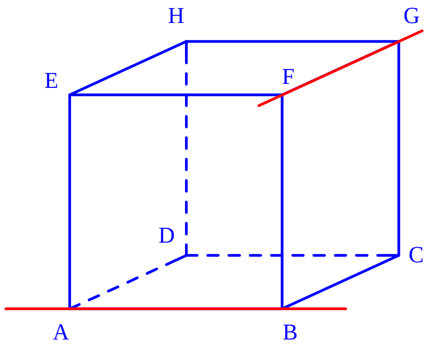
• plan horizontal
• droite horizontale

Commentaires :

• « perpendiculaire à deux droites distinctes de ce plan » : les deux droites sont forcément sécantes au point où la droite coupe le plan.

• Une droite ne suffit pas.

Exemple dans un cube :



La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (BC).
La droite (BC) est incluse dans le plan (BCE).
Pourtant, (BF) n'est pas orthogonale à (BCE).

• Proposition de définition : Pierre-Yves Gilardot élève de T1 spé (année scolaire 2021-2022) le lundi 6 décembre 2021 :

« Une droite est orthogonale à un plan si elle est symétrique par rapport à ce plan ».

Le problème est qu'on n'a pas défini ce qu'est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

2°) Remarques

• On peut dire indifféremment qu'une droite est orthogonale à un plan ou est perpendiculaire à un plan.

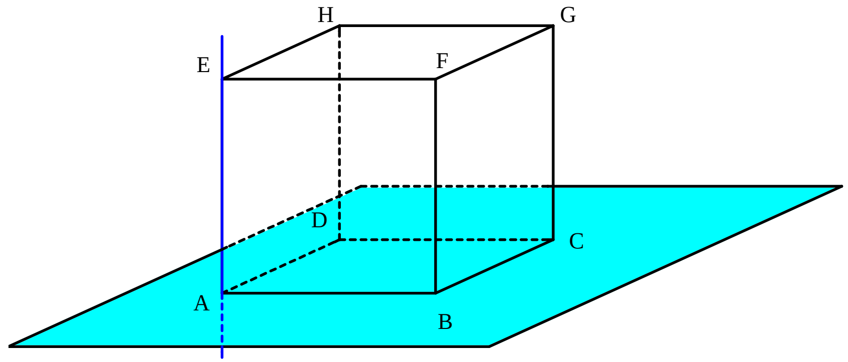
• On utilise le symbole « ⊥ » qui se lit « est orthogonale à ». Pour écrire qu'une droite D est orthogonale à un plan P, on écrira par exemple : « $D \perp P$ » (d'abord la droite, ensuite le plan).

• Une droite orthogonale à un plan est forcément sécante à ce plan.

• Une droite incluse dans un plan n'est pas orthogonale à ce plan.

3°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.



(AE) ⊥ (ABC)   (à utiliser directement dans un cube)

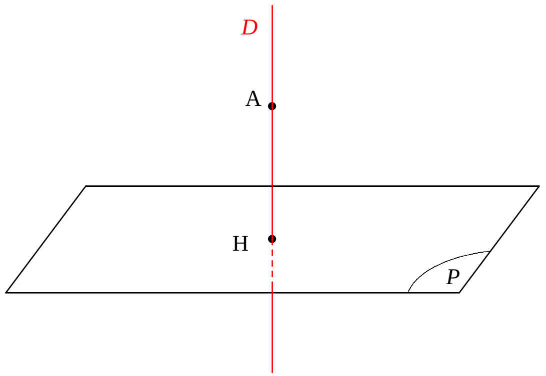
Le résultat s'adapte à toutes les droites définies par les arêtes d'un cube ou d'un pavé droit et est utilisable directement.

4°) Propriétés

• Propriété 1

Étant donnés un plan *P* et un point A, il existe une unique droite *D* passant par A et orthogonale à *P*.

Il s'agit d'une nouvelle manière de définir une droite dans l'espace. On l'utilisera dans la définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan.



● Propriété 2

Étant donnés une droite *D* et un point A, il existe un unique plan *P* passant par A et orthogonal à *D*.

Il s'agit d'une nouvelle manière de définir un plan dans l'espace. On l'utilisera dans la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

III. Théorèmes d'orthogonalité (à savoir par cœur, à citer en contrôle)

Ces théorèmes sont admis sans démonstration.

1°) Théorème 1

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

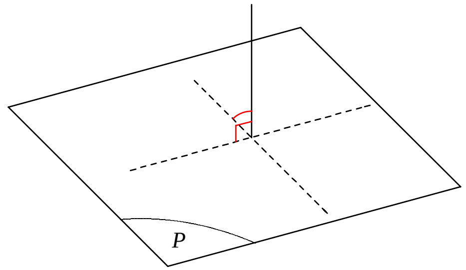
Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

Point-méthode :

Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, $\boxed{\text{il suffit}}$ de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Le 6 décembre 2021

Attention, si une droite est orthogonale à une droite d'un plan, alors elle n'est pas forcément orthogonale à ce plan comme le montre la figure ci-dessous.



On peut se représenter la situation avec un plan oblique et une droite verticale. On peut éventuellement faire une représentation de profil en coupe (exemple : en montagne, pylônes de téléskis verticaux).

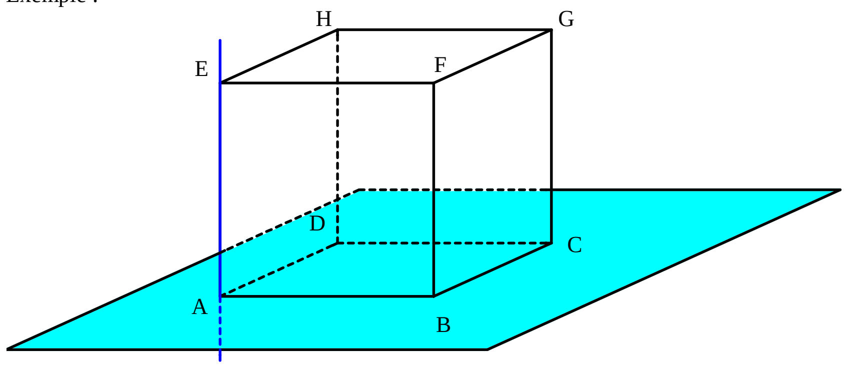
2°) Théorème 2

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses (ou contenues) dans ce plan.

$$D \perp P \text{ et } D' \subset P \Rightarrow D \perp D'$$

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales.

Exemple :



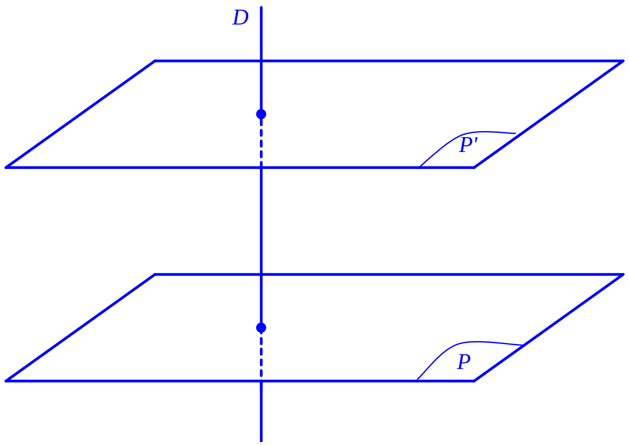
La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC).
D'après le théorème, elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
Par exemple, elle est orthogonale aux droites (AB), (AC), (AD), (BD)…
Si on prend un point M sur (AD), (AE) sera orthogonale à (BM).

3°) Théorème 3

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

$D \perp P$ et $D \perp P' \Rightarrow P \,//\, P'$

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux plans sont parallèles.



4°) Théorème 4

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

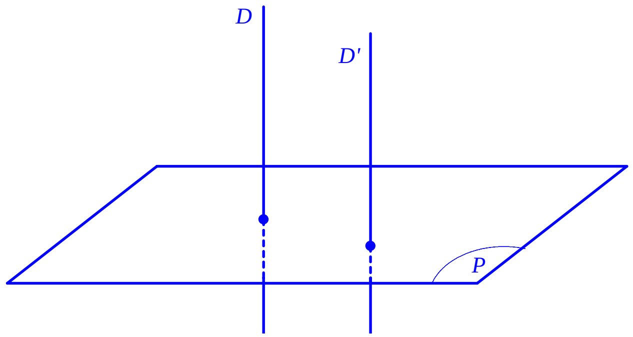
$P \,//\, P'$ et $D \perp P \Rightarrow D \perp P'$

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

5°) Théorème 5

Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles (entre elles).

$D \perp P$ et $D' \perp P \Rightarrow D \,//\, D'$



Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont parallèles.

6°) Théorème 6

Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

$D \,//\, D'$ et $D \perp P \Rightarrow D' \perp P$

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

7°) Théorème 7

Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$D \,//\, D'$ et $D'' \perp D \Rightarrow D'' \perp D'$

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont orthogonales.

Ce théorème est analogue à celui du plan vu en 6^{e} :
« Si deux droites du plan sont parallèles alors toute droite perpendiculaire est perpendiculaire à l'autre ».
Si $D \,//\, D'$ et $D' \perp D''$ alors $D \perp D''$.

Attention, il y a un théorème du plan faux dans l'espace :
« Si deux droites du plan sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles. » est vraie.
En revanche, « Si deux droites de l'espace sont orthogonales à une même droite, alors elles sont parallèles. » est faux (cf. dans un cube ABCDEFFGH, (AB) et (AC) sont orthogonales à (AE) mais ne sont pas parallèles).

IV. Utilisation des théorèmes

1°) Dans quels cas utiliser les théorèmes

• Démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan
→ théorème 1
(théorème 4, théorème 6)

Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, $\boxed{\text{il suffit}}$ de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

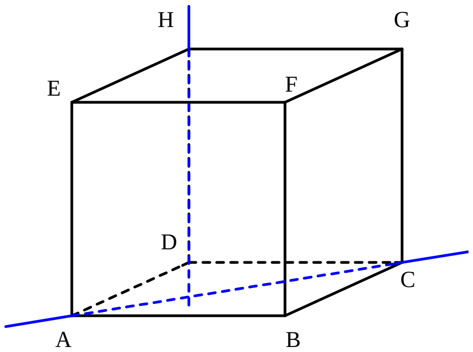
• Démontrer que deux droites sont orthogonales
→ définition
→ théorème 2

• Démontrer que deux plans sont parallèles
→ théorème 3

• Démontrer que deux droites sont parallèles
→ théorème 5
(Théorèmes à citer en contrôle !)

2°) Exemple (avec rédaction-type)

ABCDEFGH est un cube.



Démontrer que (DH) ⊥ (AC).

(DH) ⊥ (ABC) (on peut écrire directement cette orthogonalité car on est dans un cube)

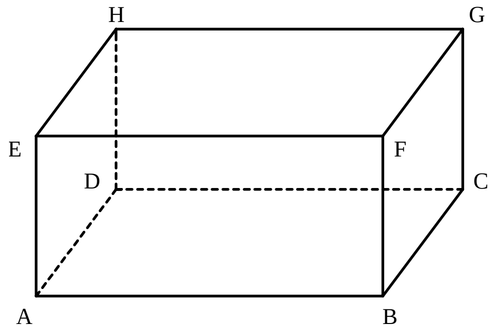
(AC) ⊂ (ABC)

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan (théorème 2).

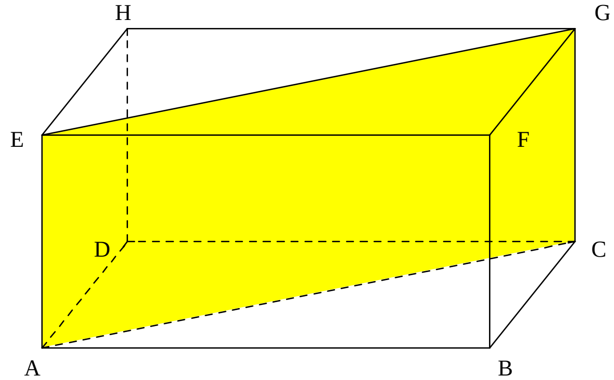
Donc (DH) ⊥ (AC).

3°) Propriété intéressante dans un pavé droit

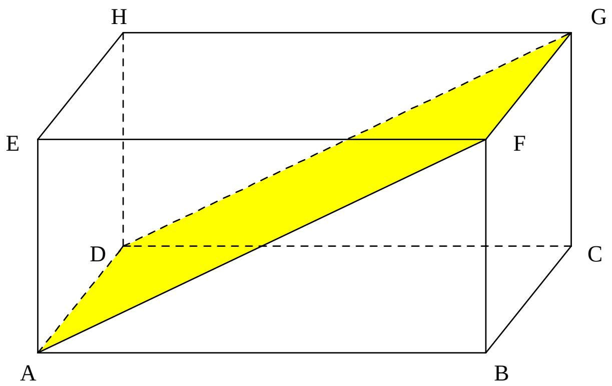
Soit ABCDEFGH un pavé droit.



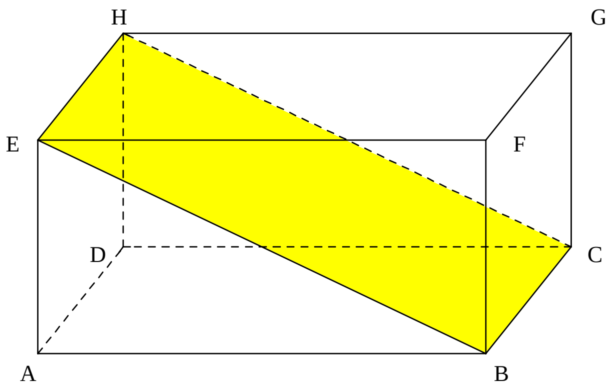
• On sait que les points A, C, G, E sont coplanaires et que le quadrilatère ACGE est un parallélogramme (valable dans un parallélépipède quelconque).
On démontre aisément que les quatre angles sont droits (un seul suffit en fait).
On en déduit que le quadrilatère ACGE est un rectangle.

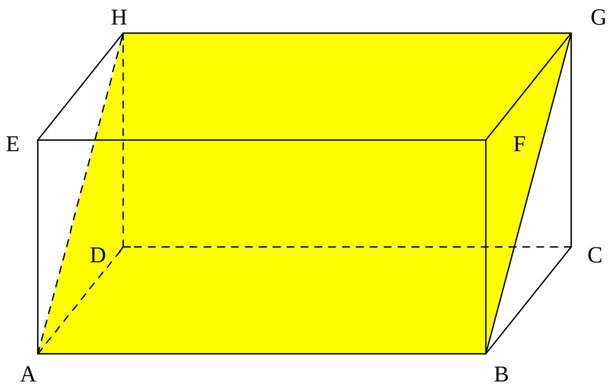


• On sait que les points A, F, G, D sont coplanaires et que le quadrilatère AFGD est un parallélogramme (valable dans un parallélépipède quelconque).
On démontre aisément que les quatre angles sont droits (un seul suffit en fait).
On en déduit que le quadrilatère AFGD est un rectangle.



• Il en est de même de BCHE, ABGH…



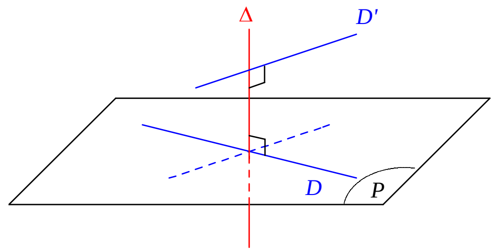


On pourra désormais utiliser ce résultat directement sans refaire la démonstration.

4°) Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

Théorème (admis sans démonstration)

Soit D et D' deux droites non coplanaires quelconques de l'espace.
Il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D'.
Δ est appelée la perpendiculaire commune à D et D'.



La distance entre les deux points d'intersection est appelée distance entre les deux droites. On la note $d(D, D')$.
On peut démontrer qu'il s'agit de la plus petite distance entre un point de D et un point de D'.

La figure nous permet d'observer que la propriété du plan « Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles » est fausse dans l'espace.

V. Plan médiateur

On généralise la notion de médiatrice d'un segment dans un plan.
Mot latin *medium* dérivé de l'adjectif *medius* signifiant milieu, moyen.
Le mot *médiatrice* vient de *medium* français : médian, médiane, intermédiaire, mass media, medium, médiatiser
Mediator (nom d'un médicament qui a fait beaucoup parler de lui)

Le lundi 30 décembre 2019

milieu → mi : moitié
médiateur (sens juridique)
multimedia

Le vendredi 27 novembre 2020

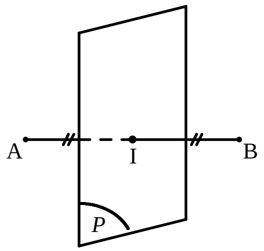
media : pluriel de medium
Le mot medium : personne qui prétend être en communication avec les esprits des morts.

Le jeudi 6 mai 2021

intermédiaire

1°) Définition [plan médiateur]

A et B sont deux points distincts de l'espace.
On appelle **« plan médiateur »** du segment [AB] le plan *P* passant par le milieu I de [AB] et orthogonal à la droite (AB).



Attention : On ne parle pas de médiatrice dans l'espace.

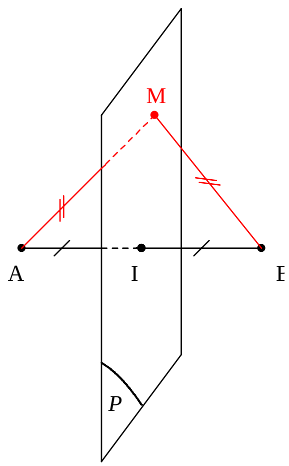
2°) Propriété de caractérisation du plan médiateur

On a la même caractérisation que la médiatrice d'un segment dans le plan.

A et B sont deux points distincts quelconques de l'espace.
On note *P* le plan médiateur de [AB].

M est un point quelconque de l'espace.

$\mathrm{M} \in P \Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$



Autre formulation :

Un point appartient au plan médiateur d'un segment (dont les extrémités sont distinctes) si et seulement si il est équidistant des extrémités.

Formulation en termes d'ensembles :

Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités.

L'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points distincts est le plan médiateur du segment qu'ils définissent.

Il s'agit de la même propriété que pour la médiatrice dans le plan.

Démonstration :

On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.
Sens direct :

Soit M un point quelconque de *P*.

1er cas : M est confondu avec I
Dans ce cas, on a bien $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

2e cas : M est distinct de I
Dans ce cas, la droite (MI) est perpendiculaire à (AB).
C'est donc la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$ dans le plan (MAB).
Par suite, $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.
Ainsi, on a démontré dans les deux cas que $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

Sens réciproque :

Soit M un point quelconque de l'espace tel que $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

1er cas : M est confondu avec I
Dans ce cas, on a bien $\mathrm{M} \in P$.

2e cas : M est distinct de I
Dans ce cas, M appartient à la médiatrice *D* de $[\mathrm{AB}]$ dans le plan (MAB).
Or *D* est incluse dans *P* (démonstration facile).

On a donc $\mathrm{M} \in P$.

Ainsi, on a démontré dans les deux cas que $\mathrm{M} \in P$.

L'équivalence est donc démontrée.

On peut aussi dire que le plan médiateur d'un segment est un plan de symétrie de ce segment.

On peut écrire $P = \{\mathrm{M} \in E \ / \ \mathrm{MA} = \mathrm{MB}\}$.

3°) Régionnement de l'espace par un plan médiateur

Théorème (admis sans démonstration)

A et B sont deux points distincts quelconques de l'espace.
On note P le plan médiateur de [AB].

P partage l'espace en deux demi-espaces ouverts :
- l'un est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{MA} < \text{MB}$ (ensemble des points plus proche de A que de B ; il s'agit du demi-espace ouvert de frontière P contenant A) ;
- l'autre est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{MA} > \text{MB}$ (ensemble des points plus proche de B que de A ; il s'agit du demi-espace ouvert de frontière P contenant B).

Il s'agit d'un théorème analogue à celui donné dans le plan.

Le 30 mars 2022
Partition de l'espace par un plan médiateur (comme plan par une médiatrice).
$\text{MA} < \text{MB}$ $\qquad$ $\text{MA} > \text{MB}$

VI. Projetés orthogonaux

On reprend, en l'adaptant, la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite dans le plan vue en 2^{e} et en $1^{\text{ère}}$.

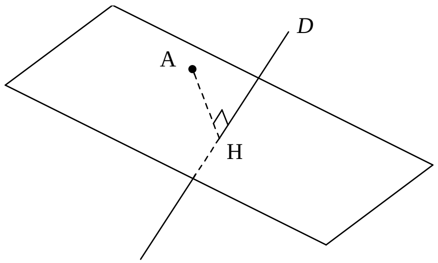
1°) Projeté orthogonal d'un point sur une droite de l'espace

• Définition [projeté orthogonal d'un point sur une droite - distance d'un point à une droite]

D est une droite de l'espace.
A est un point de l'espace.

• On appelle **projeté orthogonal** de A sur D le point H d'intersection de la droite D et du plan passant par A et orthogonal à D.

• La distance AH est appelée **distance du point A à la droite D**. On la note $d\left(\text{A}, D\right)$ (d'abord le point, ensuite la droite).

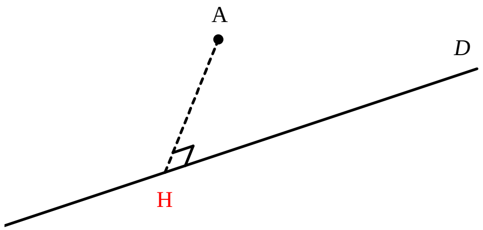


On a donc $d\left(\text{A}, D\right) = \text{AH}$.

Lorsque la droite D est définie par deux points B et C distincts, on note $d\left(\text{A}, (\text{BC})\right)$.

Caractérisation :

Le projeté orthogonal d'un point A sur D est le point H de D défini par :
- $\text{H} = \text{A}$ si $\text{A} \in D$;
- $(\text{AH}) \perp D$ si $\text{A} \notin D$.



Cette propriété se démontre aisément.

• Propriété

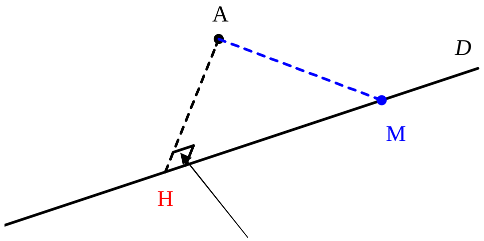
La distance AH est la plus courte distance du point A à un point de D.

Autrement dit, le point H est le point de D le plus proche de A.

Il s'agit d'un problème de minimisation géométrique très important, déjà vu dans le plan.

La démonstration est assez simple.

On considère un point M de D.



angle droit en perspective

On cherche la position de M sur D qui minimise la distance AM.

Nous allons supposer tout d'abord que M est distinct de H.

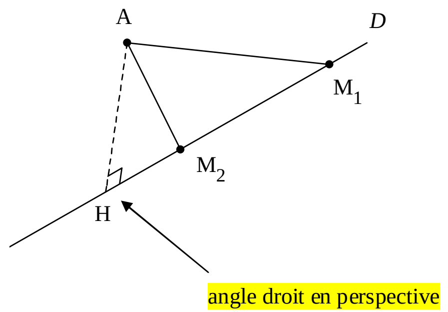
1er cas : $A \notin D$
Le triangle AHM est rectangle en H.
Or on sait que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté qui a la plus grande longueur.
On a donc $AM > AH$.

2e cas : $A \in D$
Ce cas est évident puisque, dans ce cas, $A = H$.

Bilan : $\forall M \in D \quad AM \geqslant AH$
Il y a égalité si et seulement si $M = H$.

Le point H est donc le point de *D* qui minimise la distance entre ce point et A.

La figure suivante illustre le fait plus M est proche de H, plus la distance AM diminue.



On notera que si $A \in D$, alors $d(A, D) = 0$.

• Définition [projection orthogonale sur *D*]

La projection orthogonale sur la droite *D* est l'application *p* de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe son projeté orthogonal sur *D*.

De manière plus générale, étant donnés une droite *D* et un plan *P* non parallèle à *D*, on peut définir la projection sur *D* parallèlement à *P*.

• Propriété (conservation du milieu par projection orthogonale)

On l'admet sans démonstration.

Soit *D* une droite de l'espace.
Soit M et N deux points quelconques de l'espace.
On note M' et N' leurs projetés orthogonaux respectifs sur *D*.
Le projeté orthogonal du milieu I de [MN] est le milieu de $[M'N']$.

2°) Définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan de l'espace

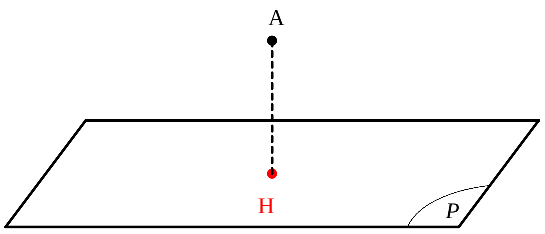
• Définition [projeté orthogonal d'un point sur un plan - distance d'un point à un plan]

P est un plan.
A est un point de l'espace.

• On appelle **projeté orthogonal** de A sur *P* le point H d'intersection du plan *P* et de la droite passant par A et orthogonale à *P*.

• La distance AH est appelée **distance du point A au plan *P***. On la note $d(A, P)$ (d'abord le point, ensuite le plan).

Lorsque le plan *P* est défini par trois points B, C, D non alignés, on note $d(A, (BCD))$.



Caractérisation :

Le projeté orthogonal d'un point A sur *P* est le point H de *P* défini par :
- $H = A$ si $A \in P$;
- $(AH) \perp P$ si $A \notin P$.

Cette propriété se démontre aisément.

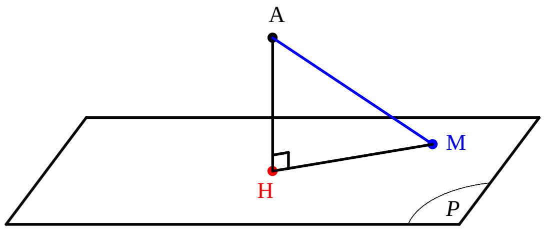
Exemple :
On se place dans un cube ABCDEFGH.

Le projeté orthogonal de F sur (ABC) est le point B.
Le projeté orthogonal de F sur (ADH) est le point E.

• Propriété

La distance AH est la plus courte distance du point A à un point de *P*.

La démonstration est similaire à celle pour la distance d'un point à une droite.



On notera que si $\mathrm{A} \in D$, alors $d\left(\mathrm{A}, P\right) = 0$.

• Définition [projection orthogonale sur *P*]

La projection orthogonale sur le plan *P* est l'application *p* de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe son projeté orthogonal sur *P*.

De manière plus générale, étant donnés un plan *P* et une droite *D* non parallèle à *P*, on peut définir la projection sur *P* parallèlement à *D*.

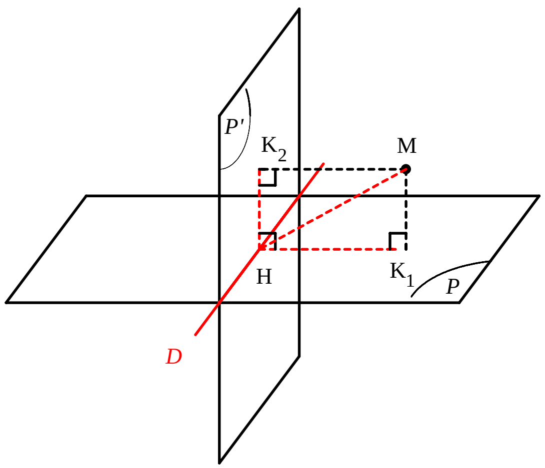
3°) Une configuration classique : distance d'un point à la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires

Soit *D* une droite quelconque de l'espace.

On suppose que $D = P \cap P'$ où *P* et P' sont deux plans perpendiculaires (cf. paragraphe suivant).

Soit M un point quelconque de l'espace.

On note :
- H le projeté orthogonal de M sur *D* ;
- K_1 et K_2 les projetés orthogonaux respectifs de M sur *P* et P'.



On démontre aisément que les points M, H, K_1, K_2 sont coplanaires.
Ils appartiennent au plan passant par M et orthogonal à *D*.

Le quadrilatère $\mathrm{M K_1 H K_2}$ est un rectangle (car il possède trois angles droits).

La distance de M à *D* est la distance MH.
Les distances de M à *P* et P' sont respectivement $\mathrm{MK_1}$ et $\mathrm{MK_2}$.

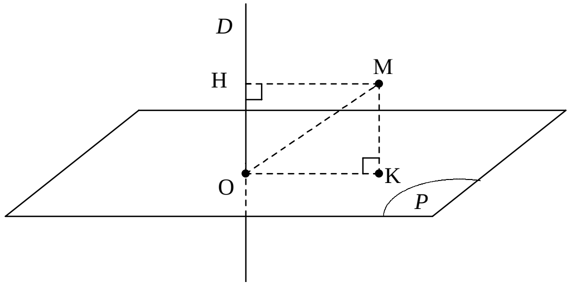
Le théorème de Pythagore donne $\mathrm{MH}^2 = \mathrm{MK_1}^2 + \mathrm{MK_2}^2$.

5°) Une autre configuration classique liées à des distances

Soit *D* une droite orthogonale à un plan *P*.
On note O le plan d'intersection *D* et *P*.

Soit M un point quelconque de l'espace.

On note :
- H le projeté orthogonal de M sur *D* ;
- K le projeté orthogonal de M sur *P*.



On a : $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{MK}^2$.

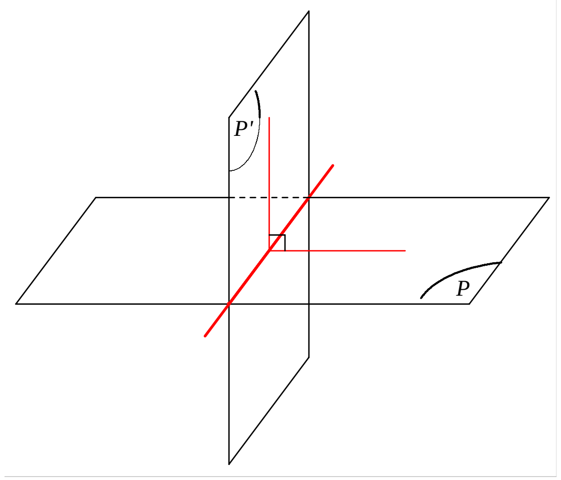
VII. Plans perpendiculaires

On s'appuie sur la notion d'angles formés par deux plans sécants dans l'espace qui s'adapte par rapport à la notion d'angles formés par deux droites sécantes dans le plan.

1°) Définition [plans perpendiculaires]

On dit que deux plans *P* et P' sont **perpendiculaires** s'ils forment un angle droit.

On note $P \perp P'$.

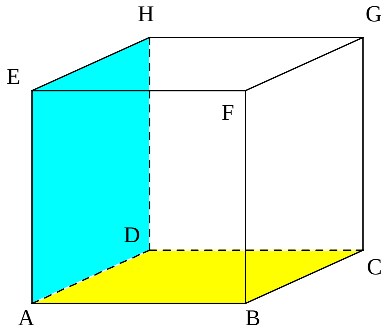


2°) Exemple

On prend un cube ABCDEFGH.

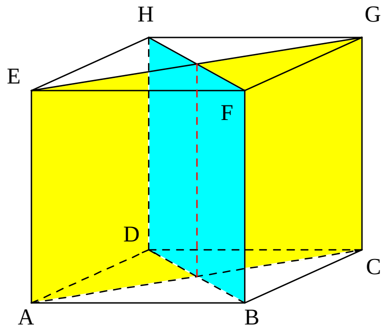
• Les plans (ADE) et (ABC) sont perpendiculaires.

On peut écrire (ADE) $\perp$ (ABC).



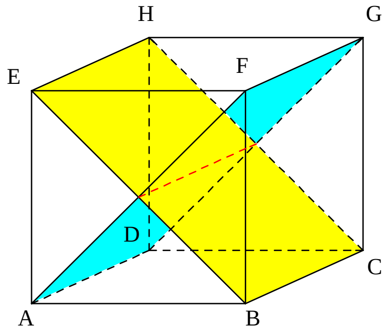
Dans un pavé droit, les plans de deux faces consécutives sont perpendiculaires.
On peut utiliser directement ce résultat en exercice.

• Les plans (ACG) et (BDF) sont perpendiculaires (exemple intéressant ; il s'agit de plans « diagonaux »).



Les plans se coupent selon une droite joignant les centres de deux faces opposées.

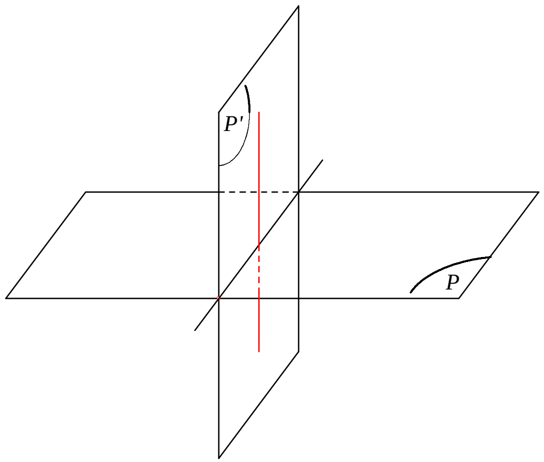
• Les plans (BCH) et (AFG) sont perpendiculaires (autre exemple intéressant car il s'agit de plans « diagonaux »).



• Une configuration fondamentale de trois plans perpendiculaires deux à deux est fournie par le « coin » d'un cuve ou d'un pavé droit, configuration que l'on peut relier à la situation concrète d'un coin d'une salle rectangulaire avec le sol et deux murs.

3°) Propriété

Deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si l'un des deux contient une droite orthogonale à l'autre.

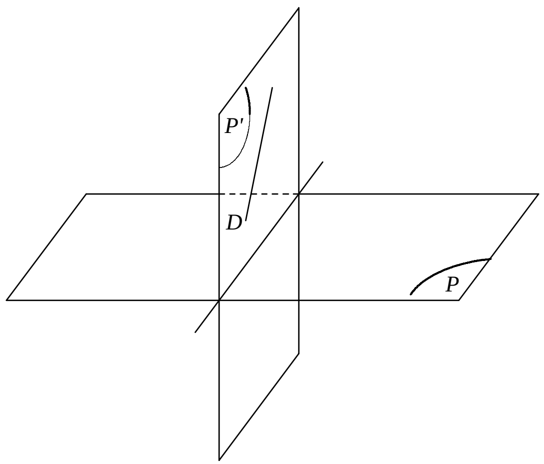


4°) Propriétés

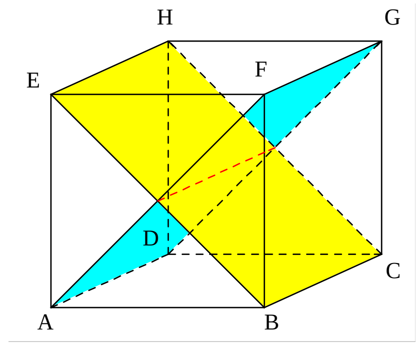
- **Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.**
- **Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.**
- **Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.**

5°) Remarque

Attention à ne pas inventer des propriétés fausses comme « Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite incluse dans l'un est orthogonale à toute droite incluse dans l'autre ».
Une petite figure permet de se rendre compte que c'est faux.



Exemple dans un cube ABCDEFGH :



Les plans des faces ABCD et EFGH sont perpendiculaires.
La droite (AH) est incluse dans le plan (ADE).
Pourtant, (AH) n'est pas orthogonale au plan (ABC).

VIII. <u>Intersection d'une sphère et d'un plan</u>

Le but de ce paragraphe est d'étudier la position relative d'une sphère et d'un plan dans l'espace.
On adapte à l'espace les résultats connus dans le plan pour l'étude de l'intersection d'une droite et d'un cercle.

Rappels (définition d'une sphère et d'une boule)

<u>Définitions à connaître par cœur</u>

Soit O un point fixé de l'espace et R un réel strictement positif fixé.

Définition 1 [sphère]

La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{OM} = R$.

Définition 2 [boule fermée]

La boule fermée $\mathcal{B}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{OM} \leqslant R$.

On peut écrire de manière symbolique (notations d'ensembles à connaître) où E désigne l'ensemble des points de l'espace :

$$\mathcal{S} = \{\text{M} \in E \,/\, \text{OM} = R\} \quad ; \quad \mathcal{B} = \{\text{M} \in E \,/\, \text{OM} \leqslant R\}$$

La boule fermée est la partie de l'espace limitée par la sphère, frontière comprise.

La sphère est une surface, la boule fermée est un solide.

La sphère est une surface de révolution. Il s'agit de la surface engendrée par un cercle autour de l'un de ses diamètres.

La sphère possède une propriété particulière : c'est une surface qui ne contient aucun segment non réduit à un point. Il n'existe aucun segment non réduit à un point.

On peut démontrer qu'il n'existe pas de patron de sphère.

Vocabulaire :

On dit que $2R$ est le diamètre de la sphère.

Comme pour un cercle dans le plan, on appelle :
- rayon de la sphère tout segment $[\mathrm{OM}]$ où M est un point quelconque de S ;
- diamètre de la sphère tout segment $[\mathrm{AB}]$ où A et B sont deux points quelconques de S tels que $\mathrm{O} \in [\mathrm{AB}]$.

Les mots rayons et diamètre peuvent donc désigner une longueur ou un segment.
Dans le premier cas, on emploie l'article défini « le » (on dit le rayon ou le diamètre) ; dans le deuxième cas, on emploie l'article indéfini « un » ou « des » (on dit « un » ou « des » rayons, « un » ou « des » diamètres).

Comme dans le plan pour un cercle ou un disque, une sphère ou une boule peuvent aussi être définie par un diamètre. On dira par exemple : « Soit S la sphère de diamètre $[\mathrm{AB}]$ » ; la sphère sera alors parfaitement définie.
Dans ce cas, il est inutile de préciser le centre et le rayon.

- L'aire d'une sphère de rayon R est donnée par la formule $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.
- Le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

On peut noter que $\mathcal{A}$ est la dérivée de V par rapport à R. C'est un moyen bien utile pour retenir la formule de l'aire d'une sphère.
On notera que l'on parle du volume d'une boule et non d'une sphère.

1°) Étude des différents cas possibles

S : sphère de centre O et de rayon R
P : plan de l'espace
H : projeté orthogonal de O sur P
On pose $d = \mathrm{OH} = \mathrm{d}(\mathrm{O}, P)$.

On s'intéresse à $S \cap P$.

1er cas : $\boxed{d < R}$

S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$
$S \cap P = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (théorème de Pythagore)

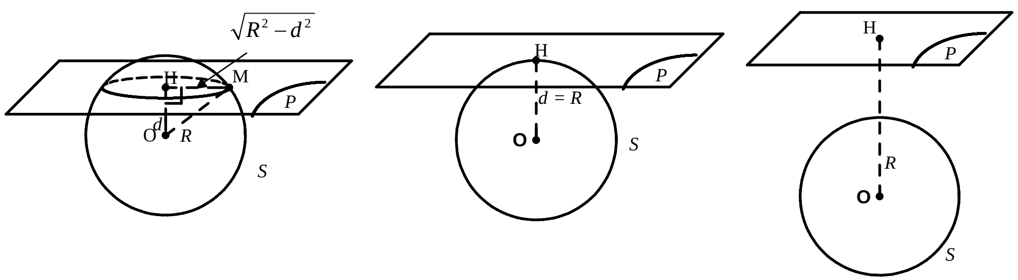
2e cas : $\boxed{d = R}$

S et P sont tangents en H ($S \cap P = \{\mathrm{H}\}$; l'intersection est un singleton)

3e cas : $\boxed{d > R}$

S et P n'ont aucun point commun ($S \cap P = \varnothing$)

1er cas : 2e cas : 3e cas :



Revenons au 1er cas.

Soit M un point quelconque de S.
Le triangle OHM est rectangle en H (justification très facile).
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

Dans ce cas, le plan partage la boule en deux solides appelés des calottes sphériques.
Le mot calotte s'emploie dans le langage courant avec les calottes polaires et le mot de calotte qui désigne un couvre-chef de forme ronde.

On retiendra la propriété suivante :

Une sphère S sphère de centre O et de rayon R est tangente à un plan P si et seulement si $\mathrm{d}(\mathrm{O}, P) = R$.

2°) Vocabulaire

Lorsque le plan P passe par le centre de la sphère, on dit que P est un *plan équatorial*.
Le cercle d'intersection a alors pour rayon R. C'est le cercle de plus grand rayon possible sur la sphère.
On dit qu'il s'agit d'un « grand cercle » de la sphère.
Il existe une infinité de plans équatoriaux.

Un plan équatorial partage une sphère en deux *demi-sphères* ou *hémisphères*.

La Terre peut être assimilée à une boule dont le rayon vaut environ 6370 km.
La surface terrestre peut donc être assimilée à une sphère dont le rayon vaut environ 6370 km.
La découverte de la rotondité de la sphère date de l'antiquité. Grâce à une expérience célèbre, Ératosthène a pu donner pour la première fois une estimation assez précise du rayon de la terre.
Au XVIII^{e} siècle, on a vérifié l'hypothèse de l'aplatissement des pôles grâce à des grands voyages d'exploration.
C'est aussi à la fin du XVIII^{e} siècle que le mètre a été défini comme longueur du quart du dix-millionième du méridien terrestre grâce à deux mathématiciens français, Delambre et Méchain.

On a tout un vocabulaire lié à la sphère terrestre : méridien, parallèle, Pôle Nord, Pôle Sud, Équateur, axe des pôles (axe de rotation de la terre).
Le 45^{e} parallèle nord passe en France. Un panneau situé sur la route descendant du col du Lautaret à Briançon mentionne le point en lequel il passe. On est alors situé à égale distance du pôle nord et de l'équateur sur le méridien.

L'axe de rotation de la terre est la droite joignant les pôles.

Se pose le problème de repérage sur la sphère grâce :
- à des cercles : méridiens et parallèles (méridien de Greenwich) ;
- à des angles : latitude et longitude.

L'étude des sphères débouche sur ce que l'on appelle la *géométrie sphérique* dont les applications concrètes sont fondamentales en navigation maritime ou aérienne et en astronomie.

Un problème fondamental de géométrie sphérique est l'étude des courbes loxodromiques sur la sphère.

Propriété (admise) :

On démontre que le plus court trajet entre deux points A et B distincts d'une sphère S (trajet sur la sphère) est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (petit arc) du grand cercle passant par deux points A et B.

Cette propriété peut se démontrer.

Si on note O le centre de S, le grand cercle passant par A et B est obtenu comme intersection de S et du plan (OAB). Il s'agit d'un plan diamétral car il passe par le centre de la sphère.

On pourrait faire l'expérience avec une sphère et un morceau de ficelle.

Cette propriété est utilisée en navigation aérienne. Pour aller de la France à la Floride en avion, on passe par l'Islande puis le Canada. Idem pour les liaisons aériennes Paris-New York qui se situent à la même latitude.

On peut penser aussi aux liaisons maritimes qui reliaient la France à New York, notamment au Titanic parti du Havre et entré en collision avec un iceberg.

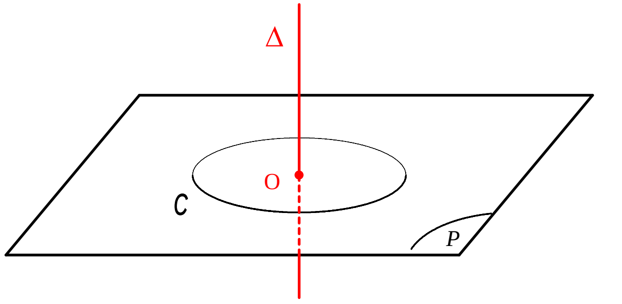
Il y d'autres problèmes classiques de géométrie sphérique comme celui des triangles sphériques.

3°) Définition [plan tangent à une sphère]

Soit S une sphère de centre O et A un point quelconque de S.
On appelle **plan tangent** en A à S le plan passant par A et orthogonal à la droite (OA).

La définition est similaire à celle de la tangente en un point à un cercle dans le plan.

4°) Axe d'un cercle dans l'espace

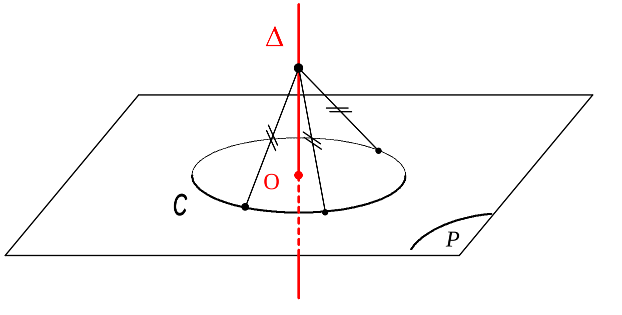


Définition :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O contenu dans un plan P.
On appelle *axe du cercle* $\mathcal{C}$ la droite Δ passant par O et orthogonale à P.

Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O contenu dans un plan P.
On note Δ son axe.
Tout point A de Δ est situé à égale distance de tous les points de $\mathcal{C}$.

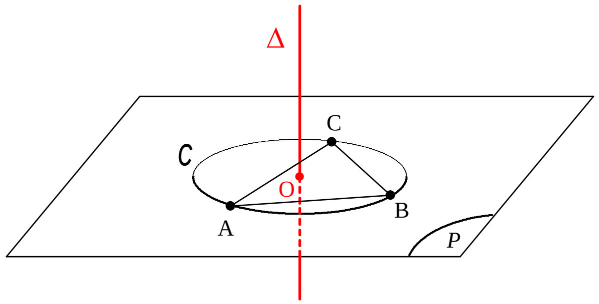


Démonstration :

Faire une figure.
On utilise le théorème de Pythagore (très simple).

Propriété :

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.
L'ensemble des points de l'espace équidistants des points A, B, C est l'axe Δ du cercle circonscrit au triangle ABC.



Démonstration :

On procède par analyse-synthèse.

Analyse :
Si un point M est équidistant de A, B, C, alors il appartient aux plans médiateurs de $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$.

Synthèse :
On considère les plans médiateurs *P* et *Q* respectivement des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Ces deux plans ne sont pas parallèles puisque A, B, C ne sont pas alignés par hypothèse.
On en déduit qu'ils se coupent selon une droite Δ.

$\forall M \in \Delta \quad MA = MB = MC$

Autre formulation de la propriété :

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.
Les plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ se coupent selon une droite Δ.
La droite Δ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A, B, C.

5°) Sphère circonscrite

Rappel sur le cercle circonscrit à un triangle dans le plan

Soit A, B, C trois points quelconques non alignés dans un plan *P*.
Il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ dans le plan *P* passant par les points A, B, C.

Définition :

Le cercle $\mathcal{C}$ est appelé cercle circonscrit au triangle ABC.

Son centre est le point d'intersection des médiatrices du côté du triangle.

Sphère circonscrite
- à un pavé droit
- à un tétraèdre quelconque

La sphère circonscrite à un pavé droit est la sphère passant par tous les sommets du pavé droit.
Cette sphère a pour centre le centre du pavé droit c'est-à-dire le point d'intersection des grandes diagonales.

Propriété :

Soit A, B, C, D quatre points quelconques non coplanaires de l'espace.
Il existe une unique sphère *S* passant par les points A, B, C, D.

Définition :

La sphère *S* est appelée sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Démonstration :

On considère l'axe Δ du cercle circonscrit à l'une des triangles définissant une face, par exemple ABC.
On note alors *P* le plan médiateur du segment $[AD]$.
P et Δ sont sécants en un point Ω car A, B, C, D ne sont pas coplanaires par hypothèse.

On a $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

6°) Position relative de deux sphères dans l'espace

On a les mêmes cas que pour la position relative de deux cercles dans le plan.

Sphères de centres différents.

Soit S une sphère de centre O et de rayon R et S' une sphère de centre O' et de rayon R' avec $O \neq O'$.

On s'intéresse à $S \cap S'$.

• Si $|R - R'| < OO' < R + R'$, alors l'intersection de S et S' est un cercle.

• Si $OO' = R + R'$, alors l'intersection de S et S' est un singleton (ensemble constitué d'un point).
Dans ce cas, les deux sphères sont tangentes extérieurement.

• Si $OO' = |R - R'|$, alors l'intersection de S et S' est un singleton (ensemble constitué d'un point).
Dans ce cas, les deux sphères sont tangentes intérieurement.

• Dans les autres cas, l'intersection de S et S' est vide. Plus précisément,

- lorsque $OO' \leqslant |R - R'|$, l'une des sphères est intérieure à l'autre ;

- lorsque $OO' \geqslant R + R'$, les deux sphères sont extérieures l'une à l'autre.

On retiendra l'équivalence fondamentale :

S et S' sont sécantes $\Leftrightarrow |R - R'| < OO' < R + R'$

Sphères de même centre.

On dit qu'elles sont **concentriques**.

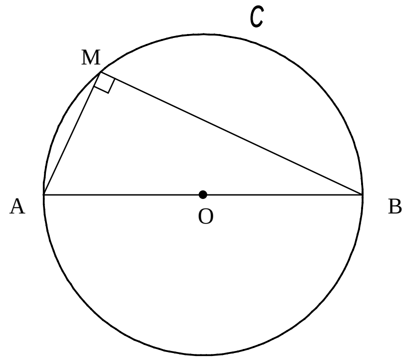
6°) Propriété angulaire dans une sphère

• Rappel de propriétés du plan

Énoncé 1 :

Propriété de l'angle droit dans un cercle dans un plan

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.



Énoncé 2 :

Soit A et B deux points distincts d'un plan.
On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Soit M un point quelconque du plan distinct de A et B.
$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

• On adapte sans difficulté cette propriété à l'espace.

Propriété :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.
On note $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[AB]$.
Soit M un point quelconque de l'espace distinct de A et B.
$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow$ l'angle $\widehat{AMB}$ est droit

Il est important de noter que l'on pourra utiliser l'énoncé suivant de propriété.

Propriété de l’angle droit dans une sphère :

Soit A et B deux points distincts de l’espace.
On note $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[\mathrm{AB}]$.
Pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{S}$ distinct de A et B, l’angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$ est droit

7°) Intersection d’une sphère et d’une droite

S : sphère de centre O et de rayon R $(R > 0)$
D : droite de l’espace

H : projeté orthogonal de O sur D
On pose $d = \mathrm{OH} = \mathrm{d}(\mathrm{O}, D)$.

On s’intéresse à $S \cap D$.

1er cas : $\boxed{d < R}$

S et D sont sécants en deux points distincts.

2e cas : $\boxed{d = R}$

S et D sont sécants au point H ($S \cap D = \{\mathrm{H}\}$).

On dit que D est tangente à S.

3e cas : $\boxed{d > R}$

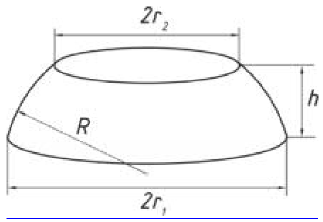
S et D n’ont aucun point commun ($S \cap D = \varnothing$).

Le 14-12-2022
Zone sphérique
Calotte sphérique
Segment sphérique
Démonstration avec les intégrales

Aires et volumes de parties remarquables (fuseau et zone sphérique et calotte sphérique) :

① Zone sphérique

Ne doit pas être confondu avec segment sphérique.



Une zone sphérique est la portion de la surface d’une sphère comprise entre deux plans parallèles qui coupent cette sphère. Lorsqu'un des plans est tangent à la sphère, la zone est dite calotte sphérique.

Lorsqu’un des plans est tangent à la sphère et l’autre plan passe par le centre, la zone est appelée hémisphère. Un hémisphère est la moitié d’une sphère.

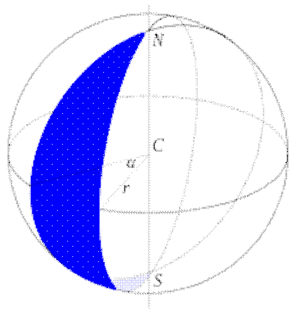
L’aire $\mathcal{A}$ d’une zone sphérique est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{A} = 2\pi R h$$

dans laquelle h est la hauteur de la couche sphérique (c’est-à-dire la distance entre les deux plans parallèles) et R le rayon de la sphère.

② Fuseau sphérique

Le fuseau est la partie de sphère limitée par deux demi-grands cercles de mêmes extrémités.



Fuseau sphérique d’angle α

Un fuseau sphérique ou digone sphérique est une portion de sphère délimitée par deux demi-grands cercles de mêmes extrémités. Plus précisément ces deux demi-grands cercles découpent deux fuseaux sphériques, l’un, plus petit qu’un hémisphère est appelé le fuseau mineur, tandis que l’autre est qualifié de fuseau majeur.

Par exemple, les fuseaux horaires sont issus (avec ajustement géopolitique) du découpage de la sphère terrestre en 24 fuseaux d'angle de $\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$ radians soit 15°. En première approximation, la portion de surface de la Lune, éclairée par le Soleil et visible depuis la Terre est un fuseau sphérique et cela explique le nom anglais de cet objet spherical lune.

Un fuseau sphérique est la portion de sphère interceptée par un dièdre dont l'arête passe par le centre du cercle. Ce même dièdre découpe dans la boule un solide géométrique qui porte le nom d'onglet sphérique.
Lorsque l'angle dièdre est plat, le fuseau sphérique coïncide avec un hémisphère.

> L'aire $\mathcal{A}$ d'un fuseau sphérique est donnée par la formule suivante :
>
> $$\mathcal{A}=2R^2\alpha$$
>
> dans laquelle α désigne la mesure en radians de l'angle des demi-plans et R le rayon de la sphère.

L'aire est proportionnelle à l'angle ; si $\alpha=2\pi$, on retrouve l'aire de la sphère.

③ Segment sphérique (à une base)

Un segment sphérique à deux bases est la partie de l'espace limitée par une zone sphérique et deux disques alors qu'un segment sphérique à une base est la partie de l'espace limitée par une calotte sphérique et un disque.

> Le volume $\mathcal{V}$ d'un segment sphérique à une base est donné par la formule suivante :
>
> $$\mathcal{V}=\frac{\pi}{3}h^2(3R-h)$$
>
> dans laquelle h est la hauteur de la couche sphérique (c'est-à-dire la distance entre les deux plans parallèles) et R le rayon de la sphère.

Si l'on remplace h par $2R$, on retrouve le volume de la sphère.

https://warmaths.fr/SCIENCES/unites/VOL%20CAPA/spher2.htm

IX. Hauteur d'une pyramide

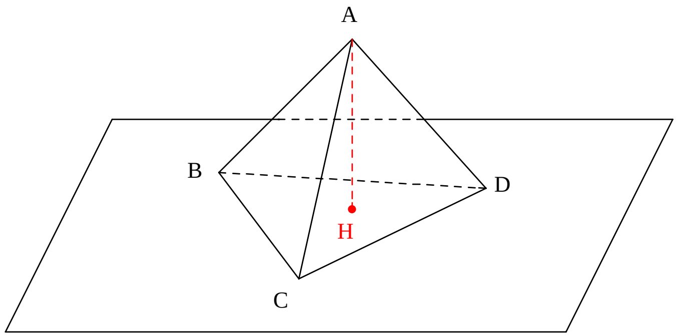
1°) Cas particulier d'un tétraèdre

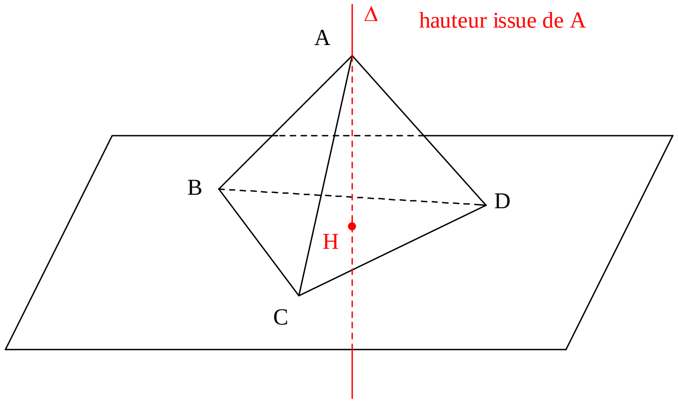
• Rappel [définition d'un tétraèdre]

Un tétraèdre de l'espace est un polyèdre défini par quatre points non coplanaires A, B, C, D. Dans ce cas, le tétraèdre est noté ABCD ou BACD ou ….
A, B, C, D sont appelés les sommets du tétraèdre.

• Définition

> ABCD est un tétraèdre.
> La *hauteur* issue de A est la droite Δ passant par A orthogonale au plan (BCD).





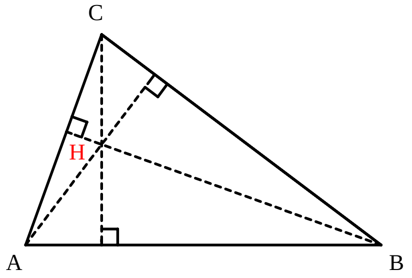
On parle de hauteur issue de A ou de hauteur relative à la base BCD.

H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

$\Delta=(\mathrm{AH})$

• Dans un tétraèdre, il y a quatre hauteurs.

• Attention, dans un triangle quelconque du plan, les trois hauteurs sont toujours concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.



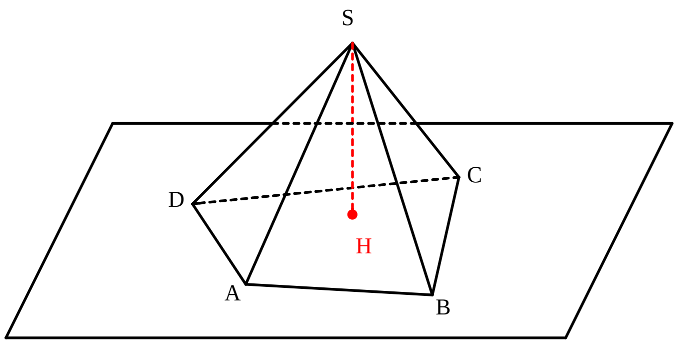
[On rappelle que l'on dit que des droites sont *concourantes* pour exprimer qu'elles se coupent en un même point].

Dans l'espace, ce n'est en général pas le cas dans un tétraèdre quelconque.
Néanmoins, lorsque c'est le cas, on dit qu'il s'agit d'un tétraèdre *orthocentrique* et le point de concours des hauteurs est appelé *orthocentre* du tétraèdre.

2°) Cas général

• Définition

La *hauteur* d'une pyramide est la droite passant par le sommet et orthogonale au plan défini par la base.



La hauteur de la pyramide est la droite (SH) où H est le projeté orthogonal de S sur le plan de la base.

• Remarque

D'après la définition, le mot « hauteur » est employé pour désigner une droite.
On l'emploie aussi parfois pour désigner le segment et même la longueur du segment (par exemple dans la formule du volume d'une pyramide). Il faut donc être vigilant sur le vocabulaire employé.

Ainsi, on peut dire que (SH) est la hauteur de la pyramide.

On dira également que $[SH]$ est la hauteur (dans ce cas, il s'agit du segment) ou même que SH est la hauteur (dans ce cas, il s'agit d'une longueur).

• Rappel

Le volume d'une pyramide est donné par $\dfrac{(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}}{3}$.

On notera que cette formule s'applique au volume d'un tétraèdre (puisqu'un tétradre est une pyramide).

3°) Pyramide régulière

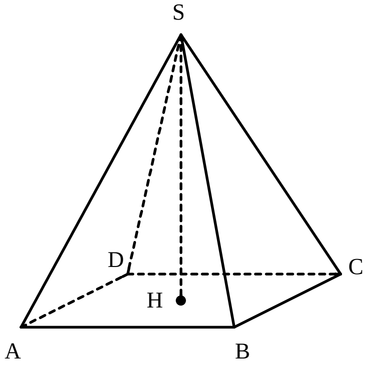
• Définition

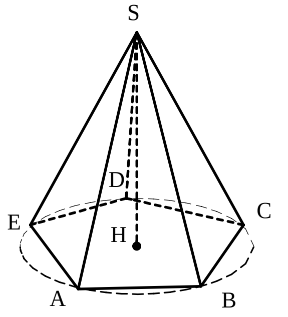
On dit qu'une pyramide est *régulière* lorsque :
- sa base est un polygone régulier ;
- les faces latérales sont des triangles isocèles identiques.

Dans une pyramide régulière, les arêtes latérales d'une pyramide régulière ont la même longueur.

• Propriété

Dans une pyramide régulière, la hauteur issue du sommet passe par le centre du polygone régulier.





On peut aussi dire que, dans une pyramide régulière, le projeté orthogonal du sommet sur le plan de la base est le centre du polygone régulier de base.

• **Cas particulier : tétraèdre régulier**

Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même mesure.
Dans ce cas, toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Propriété :

Dans un tétraèdre régulier, les hauteurs sont concourantes sont concourantes en un point O, centre de gravité et centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

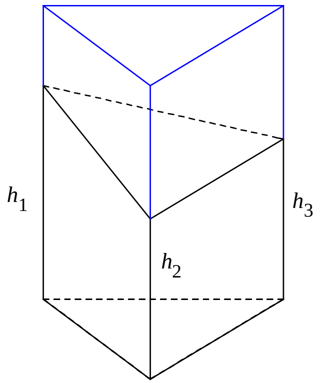
Voir en exercice :
- étude du tétraèdre régulier (hauteur, volume, centre de la sphère circonscrite) ;
- tétraèdre régulier dans un cube.

4°) Une application de la formule du volume d'une pyramide : prisme droit à base triangulaire tronqué

On considère un prisme droit dont les bases sont des triangles.
On le coupe par un plan oblique définissant un nouveau solide appelé tronc de prisme (solide dont les arêtes sont en noir sur la figure ci-dessous).
Ce solide est limité par deux faces triangulaires.
Il possède des « arêtes latérales » parallèles entre elles.

On note h_1, h_2, h_3 les longueurs des arêtes latérales et $\mathcal{A}$ l'aire de chacune des bases du prisme initiale.

Le volume du tronc de prisme est donné par la formule $V = \dfrac{\mathcal{A} \times (h_1 + h_2 + h_3)}{3}$.



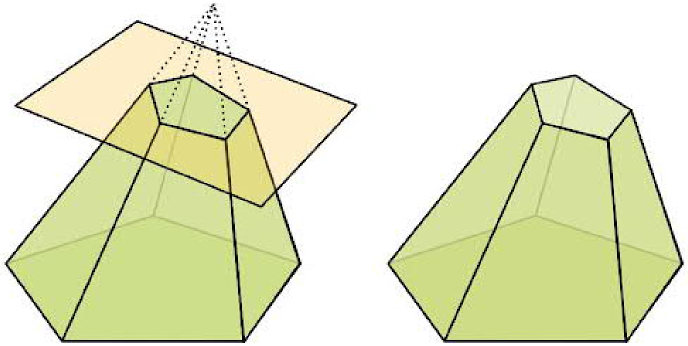
La démonstration est astucieuse. Elle repose sur un découpage en utilisant la formule du volume d'une pyramide.
La démonstration se trouve dans l'article COMPAGNON Note sur les éléments de géométrie Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 268-278

Un tronc de prisme triangulaire ÀBCDEF a pour mesure le tiers de sa base ABC, multiplié par la somme des perpendiculaires A, fi\ h11 abaissées sur cette base des sommets E, D, F de la section DEF. Menons les plans EAC, EDC. Le tronc de prisme sera décomposé en trois pyramides EABC, EADC, EDFC, que nous désignerons par *P*, *P*', *P*''.

Le volume du tronc de prisme est égal à la somme des volumes de trois tétraèdres définis par une même base et pour sommets les extrémités des arêtes latérales.
Ce résultat reste valable pour un prisme oblique dont les bases sont triangulaires.

Ces formules étaient enseignées autrefois, notamment dans les applications pratiques (volume d'un tas de sable par exemple).
Traité de géométrie - Eugène Rouché, Charles de Comberousse ...
http://google.cat › books

Traité de géométrie, Volume 1 ... Les théorèmes relatifs au prisme tronqué, démontrés aux no 719, 720, 722, 723, sont de même applicables au cylindre ...



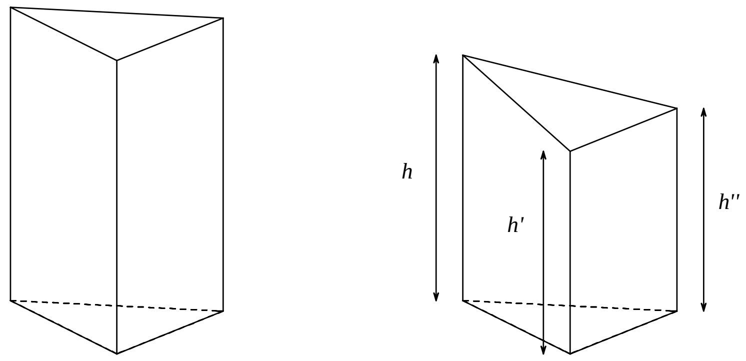
Ressources Éducatives Libres - data.abuledu.org | Les ressources libres du projet AbulÉdu

https://les-mathematiques.net/vanilla/index.php?p=discussion/2060426#Comment_2060426
Géométrie des écoles primaires: comprenant la dessin ...
https://books.google.fr › books

Claude-Lucien Bergery · 1837 · Geometry
Le volume de ce prisme sera donc le produit de la superficie du rectangle Imno ... Mais, que vous considériez cette partie du corps comme prisme tronqué ou ...

Cours élémentaire, théorique et pratique, de construction
https://books.google.fr › books

J. P. Douliot·1826· Algebra
... et des bases équivalentes ont le même
« que deux pyramides quelconques qui ont la même hauteur et des bases équivalentes ont le même volume »
On peut donner une formule similaire dans le cas d'un prisme à base triangulaire pas forcément droit (« prisme oblique »).



$$V = (\text{aire de la base}) \times \frac{h + h' + h''}{3}$$

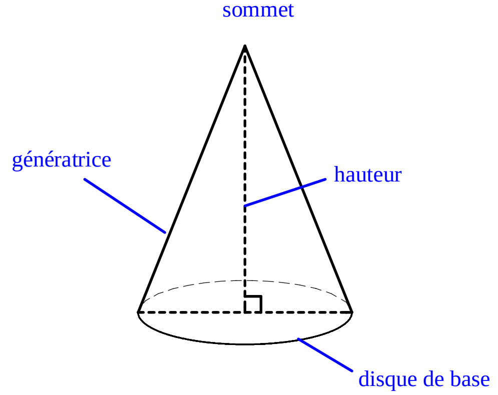
Lorsque $h = h' = h''$, on a : $V = (\text{aire de la base}) \times h$.
On retrouve la formule du volume d'un prisme.

X. Le cône de révolution

1°) Définition

Lorsque l'on fait tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit, on obtient un solide appelé cône de révolution.

2°) Vocabulaire



le sommet
une génératrice
la hauteur
le disque de base

Dans un cône, il y a une infinité de génératrices.

3°) Remarque

La base d'un cône de révolution est un disque et la hauteur est la distance du sommet à la base.

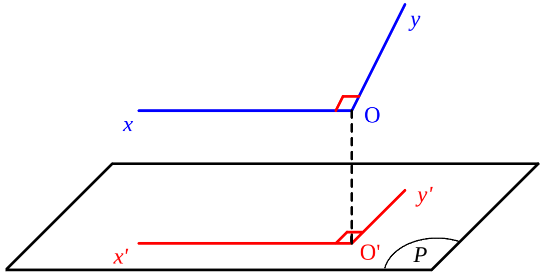
La hauteur est l'axe du cercle de base.

XI. Projection orthogonale d'un angle droit sur un plan

On s'intéresse à la projection orthogonale d'un angle droit sur un plan.
En général, on n'a pas un angle droit.

Théorème :

L'image d'un angle droit par la projection orthogonale sur un plan est un angle droit si et seulement si l'un des côtés de l'angle est parallèle au plan.
On suppose qu'aucun des côtés de l'angle n'est orthogonal au plan.



Plus généralement, deux droites orthogonales se projettent orthogonalement sur un plan *P* suivant deux droites perpendiculaires si, et seulement si, l'une des droites est parallèle au plan *P*, l'autre n'étant pas perpendiculaire à *P*.

Démonstration :

Soit un triangle OMN rectangle en O et un plan *P* qui n'est orthogonal à aucun des côtés du triangle OMN.
On note respectivement O', M' et N' les projetés orthogonaux respectifs des points O, M et N sur le plan *P*.

• On suppose que la droite (OM) est parallèle au plan *P*.
On va démontrer que le triangle O'M'N' est rectangle en O'.

On sait que le triangle OMN est rectangle en O.
Or (OM) est parallèle au plan *P* et O', M', N' sont les projetés orthogonaux respectifs de O, M et N sur *P*.
Donc (OM) est parallèle à (O'M').

O' est le projeté orthogonal de O sur *P* et OMN rectangle en O, donc (OM) est orthogonale à (O'O).
De plus, (OM) est orthogonale car OMN rectangle en O.
Donc (OM) est orthogonale au plan (OO'NN').

(OM) parallèle à (O'M') et (OM) orthogonale au plan (OO'NN').
Or si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est aussi orthogonal à l'autre.
Donc (O'M') est orthogonale à (OO'NN').
(O'N') appartient à (OO'NN') et au triangle O'M'N'.
Donc le triangle O'M'N' est rectangle en O'.

• On suppose que la droite (OM) n'est pas parallèle au plan *P* et que le triangle O'M'N' est rectangle en O'.
On va démontrer que la droite (ON) est orthogonale au plan (OMM') puis nous allons en déduire que la droite (ON) est parallèle au plan *P*.

On sait que le triangle OMN est rectangle en O.
Or O' est le projeté orthogonal de O sur *P*, donc (OO') est orthogonale à (ON).
De plus, OMN est un triangle rectangle en O, donc (ON) est orthogonale à (OM).
Donc (ON) est orthogonale au plan (MM'O) (car elle est orthogonale aux droites de ce plan).

On sait que O'M'N' est rectangle en O', donc (O'N') orthogonal à (O'M').
O' projeté orthogonal de O sur *P* et N' appartient à *P*, donc (O'N') orthogonale à (OO').
Donc (O'N') est orthogonale au plan (OMM').

Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
Donc (ON) est parallèle à (O'N'), soit parallèle à *P*.

XII. Symétrie orthogonale par rapport à une droite ou à un plan

Symétrie orthogonale par rapport à une droite / Symétrie orthogonale par rapport à un plan

Plan de symétrie
d'un segment
d'un cube

1°) Définition [symétrique d'un point par rapport à une droite]

Rappel de la définition de la symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan :

D est une droite du plan.

On appelle symétrie orthogonale d'axe *D* l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' ainsi défini :
- 1[er] cas : $\text{M} \notin D$
 Dans ce cas, M' est le point tel que *D* soit la médiatrice de $[\text{MM}']$.
- 2[e] cas : $\text{M} \in D$
 Dans ce cas, $\text{M}' = \text{M}$

Cette définition n'est plus valable dans l'espace car la notion de médiatrice d'un segment n'existe pas.'

Définition de la symétrie orthogonale par rapport à une droite dans l'espace :

D est une droite de l'espace.
Étant donné un point M quelconque de l'espace, on note H le projeté orthogonal de M sur *D*.
On appelle symétrique de M par rapport à *D* le point M' tel que H soit le milieu de $[\text{MM}']$.

On peut aussi dire que M' est le symétrique de M par rapport à H.

L'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe son symétrique par rapport à *D* est appelée symétrie orthogonale par rapport à *D*.
C'est une transformation de l'espace que l'on note S_D.
On peut écrire $\text{M}' = S_D(\text{M})$.
L'ensemble des points invariants par S_D est *D*.

2°) Définition [symétrique d'un point par rapport à un plan]

Définition 1 : en utilisant la notion de plan médiateur

P est un plan de l'espace.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à *P* l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' ainsi défini :

- 1[er] cas : $\mathrm{M} \notin P$

  Dans ce cas, M' est le point tel que *P* soit le plan médiateur de $[\mathrm{MM}']$.

- 2[e] cas : $\mathrm{M} \in P$

  Dans ce cas, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$.

Définition 2 : sans utiliser la notion de plan médiateur

P est un plan de l'espace.
Étant donné un point M quelconque de l'espace, on note H le projeté orthogonal de M sur *P*.
On appelle symétrique de M par rapport à *P* le point M' tel que H soit le milieu de $[\mathrm{MM}']$.

L'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe son symétrique par rapport à *P* est appelée symétrie orthogonale par rapport à *P*.
C'est une transformation de l'espace que l'on note S_P.
On peut écrire $\mathrm{M}' = S_P(\mathrm{M})$.

L'ensemble des points invariants par S_P est *P*.

3°) Axe et plan de symétrie

Définition [partie stable ou globalement invariante]

Soit *f* une application de l'espace *E* dans lui-même qui à tout point M de E fait correspondre un point M' (appelé l'image de M par *f*).
On dit qu'une partie *F* de *E* est *stable* par *f* ou *globalement invariante* par *f* lorsque pour tout point M de *F*, le point M' appartient aussi à *F* (autrement dit $f\langle F\rangle \subset F$, l'image de *F* par *f* est incluse dans *F*).

Définition [axe de symétrie]

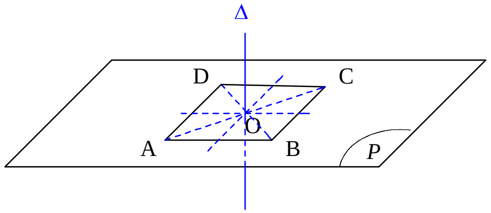
Soit *F* une partie de l'espace *E*.
On dit qu'une droite *D* est un *axe de symétrie* pour *F* si *F* est globalement invariante par S_D c'est-à-dire
$\forall \mathrm{M} \in F \quad \mathrm{M}' \in F$ (en notant M' le symétrique de M par rapport à *D*).

Dans ce cas, on a $S_D\langle F\rangle = F$ (propriété qui se démontre assez aisément).

On parle d'axe de symétrie aussi bien pour une partie finie que pour une partie infinie.

Exemples :

① On considère un carré ABCD dans un plan *P*.
La droite Δ passant par le centre O du carré et orthogonale à *P* est un axe de symétrie du carré.



C'est aussi un axe de rotation.

② Toutes les droites passant par le centre d'une sphère sont des axes de symétrie de la sphère.

③ La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée est un axe de symétrie.

④ La hauteur d'un cône de révolution ou l'axe d'un cylindre de révolution sont des axes de symétries.

Définition [plan de symétrie]

Soit *F* une partie de l'espace *E*.
On dit qu'une droite *P* est un *plan de symétrie* pour *F* si *F* est globalement invariante par S_P.

Dans ce cas, on a $S_P\langle F\rangle = F$ (propriété qui se démontre assez aisément).

Exemples :

• Le plan médiateur d'un segment est un plan de symétrie du segment.

• Dans un cube,

- les droites joignant les centres de deux faces opposées sont axes de symétrie (il y en a 6).

- les plans médiateur de chaque arête c'est-à-dire les plans parallèles à deux faces opposées et passant par le centre du cube (il y en 3).

- les plans transversaux sont plans de symétrie (il y en a 6).

Un cube admet un centre de symétrie, 6 axes de symétries et 9 plans de symétrie.

• Un plan équatorial est un plan de symétrie d'une sphère.

XIII. Distance de deux droites parallèles et de deux plans parallèles

1°) Rappel : distances de deux droites parallèles dans le plan

• Définition [distance de deux droites parallèles]

Soit D et D' deux droites parallèles du plan.
Soit δ une droite perpendiculaire à D et à D'.
On note A et B les points d'intersection respectifs de δ avec D et D'.
On appelle distance entre les droites D et D' la longueur AB.
On admet que cette longueur ne dépend pas de la droite δ.
Cette distance est notée $d(D, D')$.

figure

On a $d(D, D') = \text{AB}$.

• Propriété

La distance entre deux droites parallèles D et D' du plan est la plus courte distance entre un point quelconque de D et un point quelconque de D'.

• Propriété

$d(D, D') = 0 \Leftrightarrow D$ et D' sont confondues.

• Vocabulaire

Soit D et D' deux droites parallèles du plan.
Ces deux droites définissent une bande de plan.
La distance entre D et D' s'appelle la largeur de la bande.

2°) Distance de deux droites parallèles dans l'espace

On notera que l'on a déjà parlé de la notion de distance de deux droites non coplanaires.

• Définition [distance de deux droites parallèles]

Soit D et D' deux droites parallèles de l'espace.
Soit π un plan orthogonal à D et à D'.
On note A et B les points d'intersection respectifs de π avec D et D'.
On appelle distance entre les droites D et D' la longueur AB.
On admet que cette longueur ne dépend pas du plan π.
Cette distance est notée $d(D, D')$.

figure

On a $d(D, D') = \text{AB}$.

• Propriété

La distance entre deux droites parallèles D et D' de l'espace est la plus courte distance entre un point quelconque de D et un point quelconque de D'.

3°) Distance de deux plans parallèles dans l'espace

• Définition [distance de deux plans parallèles]

Soit P et P' deux plans parallèles de l'espace.
Soit δ une droite orthogonale à P et à P'.
On note A et B les points d'intersection respectifs de δ avec P et P'.
On appelle distance entre les plans P et P' la longueur AB.
On admet que cette longueur ne dépend pas du plan π.
Cette distance est notée $d(P, P')$.

figure

On a $d(P, P') = \text{AB}$.

• Propriété

La distance entre deux plans parallèles P et P' de l'espace est la plus courte distance entre un point quelconque de P et un point quelconque de P'.

Exemple :

Dans un cube ABCDEFGH d'arête a, la distance des plans (ABC) et (EFG) est égale à a.