TS

Exercices sur les limites de suites (3)

1 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 tel que $0<u_0<1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^2$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $0<u_n<1$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

4°) On note ℓ la limite de (u_n).

Justifier que $\ell<1$ et que $\ell=\ell^2$. En déduire la valeur de ℓ.

2 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0>0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n\mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n>0$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

4°) On note ℓ la limite de (u_n).

On admet que $\ell=\ell\mathrm{e}^{-\ell}$ (égalité obtenue par passage à la limite dans la relation de récurrence).
En déduire la valeur de ℓ.

5°) Écrire une fonction Python `seuil(a,e)` qui prend pour arguments un réel *a* strictement positif (correspondant à u_0) et un réel *e* strictement positif (précision) et qui renvoie le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n<e$.

On prend $u_0=0,3$.

À l'aide de la fonction seuil, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n<0,02$.

On prend $u_0=0,5$.

À l'aide de la fonction seuil, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n<0,001$.

3 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=7$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n>2$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

4°) On note ℓ la limite de (u_n).

a) Justifier que $\ell\geqslant 2$.

b) On admet que $\ell=\sqrt{\ell+2}$ (égalité obtenue par passage à la limite dans la relation de récurrence).
En déduire la valeur de ℓ.

5°) Écrire une fonction Python `seuil(e)` qui prend pour argument un réel *e* strictement positif (précision) et qui renvoie le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n-2<e$.

Programmer cet algorithme sur calculatrice et indiquer le nombre obtenu en sortie pour $e=0,001$.

4 Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose : $u_n=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$ (ou $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)}$).

1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

À l'aide de ces résultats, conjecturer une expression de un en fonction de *n*.

2°) Pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, démontrer l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

3°) Le but de cette question est de déterminer une formule simplifiée de u_n.

On écrit l'égalité $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ pour $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$ et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2} &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\
\frac{1}{2\times 3} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\times 4} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{(n-1)\times n} &= \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\
\frac{1}{n\times(n+1)} &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Recopier ce cadre sur une demi-page (il ne faut pas qu'il y ait de page à tourner) et barrer en diagonale les termes qui s'annulent dans la somme (méthode par **« télescopage »** ou par **« dominos additifs »**).

En déduire que $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5 Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ (la somme commence pour $k=2$).

1°) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $k\geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$.

3°) On écrit l'inégalité $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ pour $k\in\{2, 3, \ldots, n\}$ et on fait la somme membre à membre des inégalités obtenues comme dans le cadre ci-contre (on applique la **règle d'addition des inégalités** : « On peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ») :

$$\frac{1}{2^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4^2} \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
....
$$\frac{1}{(n-1)^2} \leqslant \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$$
$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Recopier ce cadre et barrer en diagonale les termes qui s'annulent (principe des dominos additifs ou télescopage).

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ puis que (u_n) est majorée.

4°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).

Les exercices suivants portent sur une technique classique de **majoration-minoration à connaître**.

Principe de majoration-minoration d'une somme.

Si $\text{A} = a_1 + a_2 + ... + a_n$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$,
alors on a l'encadrement suivant : $na_1 \leqslant \text{A} \leqslant na_n$.

Autrement dit, on a :

$$(\text{nombre de termes}) \times \text{le plus petit} \leqslant \text{A} \leqslant (\text{nombre de termes}) \times \text{le plus grand}$$

Ce principe peut être appelé « le plus bête des encadrements », « encadrement le plus bête du monde » ou encore « principe de majoration-minoration grossier ».
Cet encadrement se démontre aisément.

Soit A une somme de n nombres.
Notons m le plus petit terme de la somme et M le plus grand.

Par addition membre à membre d'inégalités de même sens,
on a :

$$\underbrace{m + m + ... + m}_{n \text{ termes}} \leqslant \text{A} \leqslant \underbrace{M + M + ... + M}_{n \text{ termes}}$$

$$n \times m \leqslant \text{A} \leqslant n \times M$$

On en déduit la **méthode pratique pour encadrer une somme :**

- On range les termes dans l'ordre croissant.
- On compte le nombre de termes.
- On applique l'inégalité.

En dépit de sa simplicité et du fait qu'il peut sembler donner un encadrement grossier, ce principe d'encadrement peut s'avérer efficace pour déterminer la limite de certaines suites définies par une somme, comme on le voit dans l'exercice $\boxed{8}$.

On peut donner un encadrement analogue pour un produit de nombres positifs ou nuls.

$\boxed{6}$ Soit n un entier naturel non nul fixé. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

En observant que l'on a $1^3 \leqslant 2^3 \leqslant ... \leqslant n^3$, démontrer que l'on a : $S_n \leqslant n^4$.

On pourrait mettre < (strict)/

$\boxed{7}$ Soit n un entier naturel fixé. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} k!$.

Démontrer que l'on a : $S_n \leqslant (n+1)!$.

$\boxed{8}$ Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$.

On ne cherchera pas une expression explicite de S_n en fonction de n.

$$S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$$

1°) En partant de $1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant ... \leqslant n$, comparer successivement les nombres :

- $n^2+1,\ n^2+2,\ ...,\ n^2+n$
- $\frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2}, ..., \frac{1}{n^2+n}$
- $\frac{n}{n^2+1}, \frac{n}{n^2+2}, ..., \frac{n}{n^2+n}$.

2°) En déduire un encadrement de S_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3°) Écrire une fonction Python qui prend pour argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la valeur de S_n.
À l'aide de cette fonction, donner la valeur décimale approchée au millième par défaut de S_{25}.

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

En observant que $S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + ... + \frac{1}{1\times 2\times ...\times n}$ puis que $S_n = \left(\left(\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)\times\frac{1}{n-1}+1\right)\times\frac{1}{n-2}+1\right)+...+1\right)\times\frac{1}{1}+1$ et sans utiliser de fonction factorielle, écrire une fonction Python qui prend pour argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n.

À l'aide de cette fonction, conjecturer la convergence de S_n.

Solutions

$\boxed{1}$ Étude d'une suite récurrente

$$\left(u_n\right)\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \left(u_n\right)^2 \end{cases}$$

Une étude rapide sur calculatrice permet de se faire une idée sur le comportement.
On choisit une valeur de u_0 comprise entre 0 et 1 strictement.
Par exemple, $u_0 = 0,3$.
On tape donc 0.3 puis $\boxed{\text{exe}}$.
Ensuite, on appuie sur la touche $\boxed{\text{Ans}}$ puis sur la touche qui donne le carré d'un nombre.
On appuie ensuite sur la touche $\boxed{\text{exe}}$ autant de fois que l'on veut.
On observe que les valeurs sont de plus en plus petites.
Au bout d'un certain temps, la calculatrice affiche 0.

La calculatrice va afficher $0^2 = 0$ mais on sait que ce n'est pas 0 car elle prend du temps pour afficher le résultat de 0^2 (la mémoire de travail de la calculatrice est saturée).

Cela ne signifie pas que la suite devient constante et que tous les termes sont égaux à 0.
La calculatrice effectue des approximations. On dépasse les capacités de la calculatrice.
Les écritures décimales deviennent 0,00…avec une très grande quantité de 0.

Pour cette valeur de u_0 particulière, il semble donc que la suite un soit décroissante et qu'elle converge vers 0.

On peut changer de valeur de u_0.
On observe encore le même comportement.

On ne cherche pas une expression explicite de u_n en fonction de n (on pourrait mais on ne le fait pas dans la résolution de l'exercice). Voir compléments à la fin.

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
Par hypothèse de définition de la suite, on a $0 < u_0 < 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 < u_k < 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.

On a : $0 < u_k < 1$ (par hypothèse de récurrence).

Donc $0^2 < (u_k)^2 < 1^2$ car la fonction « carré » est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Par suite, $0 < u_{k+1} < 1$.
Donc la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.
On en déduit que pour tout entier naturel *n*, on a : $0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) est définie par récurrence.
On ne dispose pas de l'expression explicite de son terme général.
Il n'est donc pas possible de démontrer ce résultat autrement qu'en faisant une démonstration par récurrence.

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).**

1^ère^ méthode : méthode par différence (c'est la première méthode à laquelle il faut penser lorsque l'on doit étudier le sens de variation d'une suite)

On « calcule » la différence $u_{n+1} - u_n$.
On factorise cette différence puis on fait l'étude du signe (on analyse le signe de la différence).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 - u_n$$
$$= u_n(u_n - 1)$$

On va analyser le signe de chaque facteur (seule façon de faire avec cette méthode par différence).

Or $0 < u_n < 1$ d'après la question 1°).

Donc $-1 < u_n - 1 < 0$.

Comme $u_n - 1 < 0$ et $u_n > 0$, on peut dire que $u_n(u_n - 1) < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2^e^ méthode :

Soit *n* un entier naturel fixé.
On a : $u_n < 1$ d'après la question 1°).
Donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par u_n ($u_n > 0$ d'après la question 1°)), on obtient :
$(u_n)^2 < u_n$.

Or $u_{n+1} = (u_n)^2$.
Donc $u_{n+1} < u_n$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3^e^ méthode : Méthode par quotient (cette méthode par quotient marche très bien ici ; ce n'est cependant pas la méthode à laquelle on doit penser en premier ; en effet, cette méthode nécessite de vérifier d'abord que tous les termes de la suite sont strictement positifs)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(u_n)^2}{u_n} = u_n$$

Or $0 < u_n < 1$ d'après la question 1°).

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Comme tous les termes de la suite sont strictement positifs d'après la question 1°), on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) **Déduisons-en que la suite (u_n) converge.**

On reprend les différentes propriétés de la suite que l'on vient d'établir dans les deux questions précédentes.

Dans la question 1°), on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$.
On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ ce qui donne a fortiori $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$.
On peut donc affirmer que la suite (u_n) est minorée par 0.

Dans la question 2°), on a démontré que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

Or toute suite décroissante minorée converge (théorème du cours).

On en déduit que la suite (u_n) converge.

On ne dit pas que la suite (u_n) converge vers 0. Ce sera le but de la question 4°).
On marque juste que la suite (u_n) converge.
On n'est pas en mesure de préciser la limite : la suite (u_n) peut converger vers un nombre strictement positif.

On ne dit pas vers quel réel converge la suite.
0 est $\boxed{\text{un}}$ minorant de la suite. Rien ne permet d'affirmer que c'est la limite.
On peut juste dire que la limite est supérieure ou égale au minorant.

4°) $\mathbf{l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n}$

Justifions que $l < 1$ et que $l = l^2$.

On sait que la limite ℓ est $\boxed{\text{un}}$ minorant des termes de la suite (car la suite est décroissante).
Donc $\ell \leqslant u_0$.
Or $u_0 < 1$ donc $\ell < 1$.

On utilise la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour passer à la limite.
On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On sait que $u_{n+1} = (u_n)^2$.

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$\ell \qquad \ell^2$

On utilise :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Rightarrow u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Rightarrow {u_n}^2 = u_n \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell = \ell^2$.

On a donc l'égalité des limites : $\ell = \ell^2$.
On dit qu'il s'agit de l'égalité obtenue par passage à la limite à partir de la relation de récurrence.

On découvre ici une nouvelle méthode pour trouver une limite de suite.

2$^{\text{e}}$ méthode :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} =$

ℓ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (la suite (u_n) converge vers ℓ) et les termes de la suite (u_{n+1}) sont les mêmes que ceux de la suite (u_n) à l'exception du premier terme)

ℓ^2 (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2$ *)

Ce point peut être détaillé ainsi :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell^2$ par propriété d'opération algébrique (limite d'un produit en écrivant $(u_n)^2 = u_n \times u_n$) ou par continuité de la fonction « carré ».

Par unicité de la limite d'une suite (il ne peut y avoir qu'une seule limite), on a : $\ell = \ell^2 \quad (1)$.

Déduisons-en la valeur de ℓ.

$(1) \Leftrightarrow \ell - \ell^2 = 0$
$\Leftrightarrow \ell(1-\ell) = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $1 - \ell = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$

Or $\ell < 1$.
Donc $\ell = 0$.

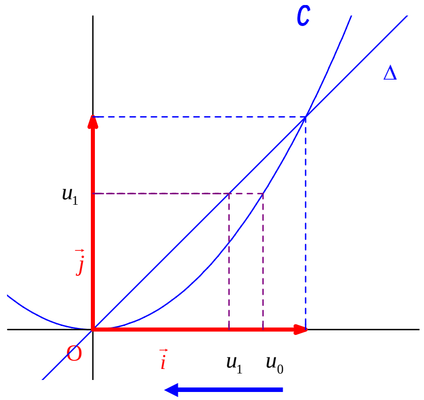
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
On peut donc dire (u_n) converge vers 0.

Compléments :

1. On peut représenter les termes de la suite récurrente (procédé habituel).
On visualise graphiquement la convergence de (u_n) vers 0.

On a tracé la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Représentation graphique



On peut ainsi facilement observer le comportement de la suite (u_n) (monotonie et convergence).

On peut aussi utiliser la calculatrice pour visualiser la suite en mode escalier ou web (cf. tutoriel).

2. Formule explicite du terme général de la suite

On peut commencer par faire une première recherche.

$u_1 = (u_0)^2$
$u_2 = (u_1)^2 = \left[(u_0)^2\right]^2 = (u_0)^4$
$u_3 = (u_2)^2 = \left[(u_0)^4\right]^2 = (u_0)^8$

Ainsi, « par déduction », il semble naturel de proposer la formule suivante : $u_n = (u_0)^{(2^n)}$.

Pour démontrer cette conjecture (c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0)^{(2^n)}$), on procède par récurrence.
La formule explicite du terme général permet évidemment de retrouver de manière très simple la convergence de la suite vers 0.

3. 0 est la limite de la suite. C'est un minorant qui n'est jamais atteint et c'est le plus grand de tous les minorants.

$\boxed{2}$ Étude d'une suite récurrente

$$(u_n) \begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

Il est conseillé de programmer la suite sur la calculatrice en prenant une valeur de u_0 et de faire apparaître la construction des termes.

On ne cherche pas une expression explicite de u_n en fonction de n.

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 > 0$ par hypothèse (définition de la suite) donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k > 0$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$.

On a $u_{k+1} = u_k \mathrm{e}^{-u_k}$ d'après la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).
On voit que u_{k+1} est un produit. On va s'intéresser au signe de chaque facteur.
Comme la phrase $P(k)$ est vraie, on sait que : $u_k > 0$.
De plus, on a : $\mathrm{e}^{-u_k} > 0$.
Donc, par signe d'un produit, $u_{k+1} > 0$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
Par le théorème de récurrence, on en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).**

1ère méthode : On étudie le signe de la différence (méthode générale la plus fréquente pour étudier le sens de variation d'une suite).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n \mathrm{e}^{-u_n} - u_n = u_n\left(\mathrm{e}^{-u_n} - 1\right)$$

On a factorisé l'expression.

On étudie le signe de chacun des deux facteurs du produit.

1er facteur : D'après la question 1°) on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

2e facteur : On procède par inégalités successives.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -u_n < 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} - 1 < 0$.

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2e méthode qui marche très bien ici : Méthode par quotient car tous les termes de la suite sont strictement positifs

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n \mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -u_n < 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < \mathrm{e}^0$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e}^{-u_n} < 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Or la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) **Déduisons des questions précédentes que la suite (u_n) converge.**

Bilan :
① $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$
② (u_n) est strictement décroissante.
Il s'agit de deux propriété de la suite (u_n).

D'après la question 1°), la suite (u_n) est minorée par 0.
D'après la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge (théorème du cours).
Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 0.
C'est le but de la question 4°) de trouver la limite de la suite (u_n).

4°) $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Justification du point que l'énoncé demande d'admettre :
Justifions que $\ell = \ell e^{-\ell}$.

On sait que ℓ est la limite de la suite (u_n).

À partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par ℓ.

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers ℓ donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n e^{-u_n}\right) = \ell e^{-\ell}$ (car la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell) = \ell e^{-\ell}$)

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} \ell \\ \ell e^{-\ell} \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}) \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $\ell = \ell e^{-\ell}$ (1).

Schéma fait le 3 décembre 2021 :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} = & u_n & e^{-u_n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \ell & \ell & e^{-\ell} \end{array}$$

$\boxed{\ell = \ell \times e^{-\ell}}$ (1)

Déduisons-en la valeur de ℓ.

$(1) \Leftrightarrow \ell - \ell e^{-\ell} = 0$

$\Leftrightarrow \ell\left(1 - e^{-\ell}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $1 = e^{-\ell}$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = e^0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $-\ell = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

(u_n) converge vers 0.

5°) Écrire une fonction Python `seuil(a,e)` qui prend pour arguments un réel a strictement positif (correspondant à u_0) et un réel e strictement positif (précision) et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < e$.

```
from math import exp

def seuil(a,e) :
    u=a
    n=0
    while u>=e:
          u=u*exp(-u)
          n=n+1
    return n
```

Autre version :

```
from math import exp

def seuil(u,e) :
    n=0
    while u>=e:
          u=u*exp(-u)
          n=n+1
    return n
```

$u_0 = 0,3$
$a = 0,3$
$e = 0,02$
$n = 46$

Pour $u_0 = 0,3$, le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,02$ est 46.

$\boxed{3}$ Étude d'une suite récurrente

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

On ne peut pas déterminer de formule explicite de u_n en fonction de n.

Il est intéressant de représenter la suite sur la calculatrice graphique (mode web ou escalier).
C'est même le premier travail à faire.

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 2$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = 7$ par hypothèse (définition de la suite) d'où $u_0 > 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k > 2$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} > 2$.

On a : $u_k > 2$ donc $u_k + 2 > 4$ d'où $\sqrt{u_k + 2} > 2$ soit $u_{k+1} > 2$.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 2$.

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).**

Pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n), on peut :

- utiliser la méthode de différence

- utiliser la récurrence

1ère méthode : méthode par différence (en utilisant le résultat de la question précédente)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n + 2} - u_n\right)\left(\sqrt{u_n + 2} + u_n\right)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

(technique de la quantité conjuguée pour les racines carrées)

$$= \frac{u_n + 2 - (u_n)^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

$$= \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$ (factorisation du polynôme $x + 2 - x^2$ évidente à l'aide des racines – 1 et 2)

On utilise le résultat de la question 1°) : $u_n > 2$.

On a donc $\begin{cases} 2 - u_n < 0 \\ u_n + 1 > 0 \\ \sqrt{u_n + 2} + u_n > 0 \end{cases}$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ (règle des signes d'un quotient).

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2e méthode : par récurrence

On définit la phrase $P(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».

Variante de la 1ère méthode :

On compare $u_n^{\,2}$ et $u_{n+1}^{\,2}$ (sachant que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$).

Quand on deux expressions de même signe, on peut comparer leurs carrés.

$$u_{n+1}^{\,2} - u_n^{\,2} = \left(\sqrt{u_n + 2}\right)^2 - u_n^{\,2}$$
$$= u_n + 2 - u_n^{\,2}$$

Les racines du polynôme $x + 2 - x^2$ sont – 1 et 2.

Or $u_n > 2$ donc $u_n + 2 - u_n^{\,2} < 0$ (règle du signe d'un trinôme ; u_n est à l'extérieur de l'intervalle des racines).

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}^{\,2} - u_n^{\,2} < 0$
D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}^{\,2} < u_n^{\,2}$.
Or u_n et u_{n+1} sont tous les deux strictement positifs.
D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$ (deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés).

3°) **Déduisons des questions précédentes que la suite (u_n) converge.**

D'après la question 1°), la suite (u_n) est minorée par 2.
D'après la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante.
Or toute suite décroissante et minorée converge.
Donc la suite (u_n) converge.

Attention, on ne peut pas dire à ce stade-là qu'elle converge vers 2.
C'est le but de la question 4°) de trouver la limite de la suite (u_n).

4°) $\boldsymbol{l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n}$

• **Justifions que $l \geqslant 2$.**

On sait que la limite d'une suite décroissante est un minorant de la suite (on peut même dire que c'est le plus grand des minorants mais ce n'est pas nécessaire de le rajouter).

On sait que 2 est un minorant de la suite donc l est plus grande que 2 soit $l \geqslant 2$.

Autre façon :

On raisonne par l'absurde.

Si l était strictement inférieur à 2, on pourrait trouver un intervalle ouvert I contenant l mais ne contenant par 2.
Il existerait un entier naturel N tel que si $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$ (définition de la limite).
Donc u_n serait strictement inférieur à 2 ce qui est impossible donc $l \geqslant 2$.

On peut évoquer le fait que 2 est un minorant strict de la suite.
Néanmoins, on peut seulement dire que la limite est supérieure ou égale à 2.
On dit que l'inégalité stricte ne passe pas à la limite.

Dans le TPLI (théorème de passage à la limite dans une inégalité), on peut juste dire qu'elle concerne des inégalités larges.
Un contre-exemple est fourni par la suite de terme général $\frac{1}{n}$.
Tous les termes sont strictement positifs. Néanmoins, la limite est égale à 0.

Justification que l'énoncé demande d'admettre :

• Justifions que $l = \sqrt{l+2}$.

On sait que l est la limite de la suite (u_n).

À partir de là, on va exprimer de deux manières différentes la limite de u_{n+1} ce qui va nous permettre de trouver une égalité vérifiée par l.

D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n+2} = \sqrt{l+2}$ (car la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur son ensemble de définition donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l) = \sqrt{l+2}$).

On peut aussi appliquer la propriété suivante :

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls.
Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, alors $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{l}$.

On sait que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ donc $u_n + 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} l+2$. La suite (u_n+2) est à termes positifs ou nuls.
Par suite, $\sqrt{u_n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{l+2}$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} \text{d'une part } l \\ \text{d'autre part } \sqrt{l+2} \quad \text{(admis)} \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, $l = \sqrt{l+2}$ (1).

• Déduisons-en la valeur de *l*.

(1) $\Rightarrow l^2 = l + 2$

$\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0$ (on retrouve le polynôme considéré à la question 1°))

$\Rightarrow l = -1$ ou $l = 2$

Comme $l \geqslant 2$, on en déduit que $l = 2$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

(u_n) converge vers 2.

Remarque :

On peut aussi formuler $l = \sqrt{l+2}$ en disant que l est solution de l'équation $x = \sqrt{x+2}$.
Cette équation est une équation irrationnelle.
On peut résoudre ce type d'équation par équivalences (mais on n'a pas appris à le faire) ou par implication (ce que nous avons fait ici).

5°)

```
from math import sqrt

def seuil(e) :
    u=7
    n=0
    while u-2>=e:
          u=sqrt(u+2)
          n=n+1
    return n
```

L'appel de la fonction `seuil(0.001)` renvoie la valeur 6 ce qui signifie que 6 est le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 < 0{,}001$.

Pour 0,0001, on obtient 8.

$\boxed{4}$ Étude d'une suite dont le terme générale est défini par une somme

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geqslant 1)$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$$

u_n est définie par une sommation : u_n n'est pas la somme des termes d'une SA ni une SG (ni une suite arithmético-géométrique). Il n'y a pas de formule sommatoire du cours que l'on puisse appliquer.

On dit que (u_n) est une *série*. Les séries sont étudiées dans l'enseignement supérieur.

On peut rentrer la suite sur calculatrice soit par récurrence (maladroit) soit plutôt en utilisant la « fonction somme » comme suit pour la calculatrice TI :

1ère méthode :

On se place en mode « fonction » et dans $f(x)=$ on tape : $\sum_{\mathrm{K}=0}^{\mathrm{X}}(\mathrm{K}/(\mathrm{K}+1))$.

2e méthode :

On se place en mode « suite » et dans $u(n)=$ on tape : $\sum_{\mathrm{K}=0}^{n}(\mathrm{K}/(\mathrm{K}+1))$ ou somme(seq(1/(K*(K+1),K,1,*n*).

On notera que le mot « seq » est remplacé par le mot « suite » si la calculatrice est en français.
Attention à la syntaxe : il ne faut omettre aucune parenthèses, écrire le signe de multiplication de la calculatrice.
On rentre $n\mathrm{Min}=1$ puisque la suite est définie à partir de l'indice 1.

On peut alors faire apparaître le tableau de valeurs ou bien le nuage de points.

1°) **Calculons u_1, u_2, u_3.**

$$u_1=\sum_{k=1}^{k=1}\frac{1}{k(k+1)}=\underbrace{\frac{1}{1\times(1+1)}}_{k=1}=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$u_2=\sum_{k=1}^{k=2}\frac{1}{k(k+1)}=\underbrace{\frac{1}{1\times(1+1)}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{2\times(2+1)}}_{k=2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$u_3=\sum_{k=1}^{k=3}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\times(1+1)}+\frac{1}{2\times(2+1)}+\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{3}{4}$$

On dit que l'on « développe » le symbole Σ.

Remarque :

$u_2=u_1+\frac{1}{2\times(2+1)}=\frac{2}{3}$; $u_3=u_2+\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{3}{4}$ etc.

Attention à ne pas commettre la faute qui consiste à écrire : $u_3=u_1+u_2+\frac{1}{3\times 4}$.

erreur

On vérifie les résultats avec la fonction somme de la calculatrice.

2°) **Démontrons que $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.**

On doit démontrer une égalité.

1ère méthode :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{\cancel{k+1}}{k\cancel{(k+1)}}-\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

2e méthode :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$$

3°) **Déterminons une expression simplifiée de u_n.**

Cas particulier pour $n=2$:

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2\times 3}=\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}$$

$$u_2=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}$$

Dans le cas général,

On barre les termes 2 par 2 en diagonale.

$\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{2}}$	$k=1$
$\dfrac{1}{2\times 3}=\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}$	$k=2$
$\dfrac{1}{3\times 4}=\cancel{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1}{4}$	$k=3$
....	....
$\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\dfrac{1}{n-1}-\cancel{\dfrac{1}{n}}$	$k=n-1$
$\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1}$	$k=n$

Par sommation membre à membre, et après simplification, on obtient l'égalité suivante : $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

$\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{2}}$	$k=1$
$\dfrac{1}{2\times 3}=\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}$	$k=2$
$\dfrac{1}{3\times 4}=\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{4}}$	$k=3$
....	....
$\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\cancel{\dfrac{1}{n-1}}-\cancel{\dfrac{1}{n}}$	$k=n-1$
$\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1}$	$k=n$

Autre méthode en ligne :

$$u_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+...+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_n=1-\frac{1}{n+1}$$

Quand on additionne membre à membre toutes ces égalités, tous les membres de gauche forment une somme qui est égale à la somme qui définit u_n (grâce à l'expression de u_n).
Ce ne sont pas de égalités séparées mais des égalités qu'on va toutes additionner membre à membre.
Les pointillés sont là pour signifier que l'on n'a pas écrit toutes les égalités (on ne peut pas puisque l'on n'a pas la valeur de *n*).
Pour écrire une somme en extension, on est obligé d'utiliser des pointillés.

Si on continue, on observe un principe d'annulation des termes d'une égalité avec la suivante (le 2^e^ terme d'une égalité s'annule toujours avec le 1^er^ du suivant). Ce qui permet de bien comprendre le principe des dominos additifs.
Quand on additionne les membres de droite, il y a des termes qui s'annulent deux à deux.
On ne rédige pas vraiment.

On écrit : $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

On obtient ainsi une formule sommatoire (on a défini u_n de manière explicite en fonction de *n*).

On peut retrouver cette formule sommatoire grâce à un logiciel de calcul formel.

Une autre façon de faire le télescopage consiste à travailler directement sur les sommes.

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{k=n+1}\frac{1}{k}\qquad\text{(changement d'indice : translation d'indice)}\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

4°) **Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.**

On utilise l'expression simplifiée de u_n déterminée à la question précédente.
On ne peut en effet pas déterminer la limite de la suite (u_n) à partir de l'expression originale (définie par une somme).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$. On peut donc dire que la suite (u_n) converge vers 1.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)}=1$.

On dit que la somme de la série de terme général u_n est égale à 1 et l'on peut s'autoriser à écrire

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

Cette écriture symbolique sera beaucoup utilisée dans le supérieur. Elle est à comprendre dans le sens d'une limite.

Commentaire :

On a une espèce de passage de l'infini au fini au sens où l'on a une somme infinie de termes qui converge vers une limite finie.

5 Étude d'une suite dont le terme générale est défini par une somme

$$u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \quad (n \geqslant 2)$$

u_n est la somme des inverses des carrés des entiers de 2 à n.

Il n'existe pas de formule sommatoire pour cette suite (un logiciel de calcul formel ne peut pas simplifier cette somme).

Comme dans l'exercice précédent, on peut rentrer la suite sur calculatrice en utilisant la « fonction somme » comme suit pour la calculatrice TI :
On se place en mode « suite » et dans $u(n)=$ on tape : somme(seq(1/K^2,K,1,*n*).
Attention à la syntaxe : il ne faut omettre aucune parenthèses, écrire le signe de multiplication de la calculatrice.
On rentre $n\text{Min} = 2$ puisque la suite est définie à partir de l'indice 2.

On peut alors faire apparaître le tableau de valeurs ou bien le nuage de points.

1°) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

On procède par différence.

$$\forall n \geqslant 2 \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

les termes de la 2^e somme se retrouve dans la 1^ère somme donc les termes s'annulent.

Or $\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ d'où $\forall n \geqslant 2 \quad u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 2.

2°) Démontrons, que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On a : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$.

Or $k-1 \leqslant k$ (on peut en fait écrire une inégalité stricte) d'où $k(k-1) \leqslant k^2$.

Donc comme les deux membres sont strictement positifs, par passage à l'inverse, on obtient : $\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$

d'où $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

On a en fait une inégalité stricte.

3°) Déduisons-en que $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ et que (u_n) est majorée.

On remplace k successivement par 2, 3, … n dans l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et l'on écrit les inégalités obtenues les unes en dessous des autres.

$$\frac{1}{2^2} \leqslant \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \qquad k=2$$

$$\frac{1}{3^2} \leqslant \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \qquad k=3$$

……………………

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \qquad k=n$$

On additionne membre à membre toutes les inégalités obtenues.
On obtient : $u_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

On a pu additionner membres à membres toutes les inégalités car elles ont le même sens (*).

La suite (v_n) définie par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est une suite majorante.

On ne peut pas dire que $1 - \frac{1}{n}$ est un majorant de la suite (u_n) car ce n'est pas un nombre fixe qui ne dépend pas de n. Un majorant doit être une constante.

Autre formulation équivalente : $1 - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de la suite (u_n) puisqu'il dépend de n.

Définition :

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$, on dit que la suite (v_n) majore (u_n) lorsque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$.

On observera que la notion (ou que la définition d'une) de suite majorante est indépendante de toute monotonie.

L'expression $1-\dfrac{1}{n}$ permet d'obtenir de manière immédiate un majorant de cette suite et donc de la suite (u_n).

$\forall n \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{n} > 0$ donc $-\dfrac{1}{n} < 0$ d'où $1-\dfrac{1}{n} < 1$.

On en déduit, par transitivité, que $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 1$ (**).

Donc (u_n) est majorée par 1.

(*) On peut additionner membres à membres des inégalités de même sens.
Si on une inégalité et une inégalité stricte, alors on peut écrire une inégalité stricte.

(**) On pourrait mettre une inégalité stricte, peu importe. En effet, une inégalité stricte entraîne une inégalité large (la réciproque est fausse).

4°) **Démontrons que la suite (u_n) est convergente.**

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème sur les suites croissantes majorées (à citer : « Toute suite croissante majorée converge »), elle converge vers une limite *l*.

On peut dire $l \leqslant 1$ et même que $\dfrac{1}{4} \leqslant l \leqslant 1$ car le premier terme de la suite est $u_2 = \dfrac{1}{4}$.

Remarque :

On peut démontrer par diverses méthodes que cette limite est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}-1$, résultat qui ne manque pas de surprendre au premier abord.

$\dfrac{\pi^2}{6}-1$ est évidemment la valeur *exacte* de la limite de cette suite – résultat valable uniquement pour cette suite, bien sûr.

On pourra noter que (u_n) est une suite de rationnels (évident car u_n est défini comme une somme de rationnels alors que $\dfrac{\pi^2}{6}-1$).

On ne demande pas de calculer cette limite – de toutes façons, en Terminale, on n'en a pas les moyens.

Cette suite est à relier à la suite très célèbre qu'on retrouve souvent dans l'enseignement supérieur : suite (S_n) dont le terme général est la somme des inverses des carrés des entiers naturels.

Cette suite est définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Elle est définie cette fois à partir de l'indice 1.

On peut démontrer (la démonstration n'est cependant pas du niveau de terminale) que S_n tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ lorsque *n* tend vers + ∞, autrement dit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.

ou encore que la somme des inverses des carrés des entiers naturels (en démarrant de 1) tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Ce résultat permet de trouver la limite de la suite (u_n).
Cette suite sera reprise dans le supérieur avec la notion de série.

On retrouve des résultats similaires pour toutes les puissances paires :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^4}{90}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^6}{945}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^8} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^8}{9450}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{10}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^8}{93555}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{12}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{691\pi^{12}}{638512875}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{14}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2\pi^{14}}{18243225}$ etc.

Un tel résultat n'a, en revanche, pas été démontré à ce jour pour les puissances impaires.

Le mathématicien français Apéry a cependant démontré en 1973 que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} C$ où C est un réel irrationnel.

On peut trouver des valeurs approchées de *l* en calculant quelques valeurs de u_n.

Par exemple, avec la calculatrice TI 83, on obtient pour $\displaystyle\sum_{k=2}^{200} \frac{1}{k^2}$ l'affichage : 0,6399947 qui donne une valeur approchée de $l = \dfrac{\pi^2}{6}-1$.

$\boxed{6}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Démontrons que $S_n \leqslant n^4$.

On ne cherche évidemment pas à calculer cette somme.

On a : $1^3 \leqslant 2^3 \leqslant ... \leqslant n^3$ (les inégalités sont en fait strictes, mais on s'en fiche)

Donc d'après le principe de majoration rappelé dans l'énoncé, on peut écrire : $S_n \leqslant n \times n^3$ soit $S_n \leqslant n^4$.

Autre version :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Démontrons que $S_n \leqslant n^4$.

On a $1^3 \leqslant 2^3 \leqslant ... \leqslant n^3$ (les inégalités sont en fait strictes, mais on s'en fiche).

Le nombre de termes de la somme est n.

Le plus grand terme de la somme est n^3.

En majorant tous les termes de la somme par n^3, on obtient $S_n \leqslant n \times n^3$ soit $S_n \leqslant n^4$.

Commentaires :

• On pourrait remplacer le signe « $\leqslant$ » par le signe « $<$ » qui donne une majoration plus précise.

• On pourrait majorer tous les termes de la somme par $(n+1)^3$. On obtient alors la majoration : $S_n < n(n+1)^3$.
Cette majoration est moins précise.

• On pourrait utiliser la formule sommatoire donnant la somme des cubes des entiers naturels de 1 à n :
$S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
Ce n'est pas ce qui est attendu.

L'intérêt du principe de majoration grossier c'est de pouvoir majorer ou minorer des sommes dont on ne veut/peut trouver une expression simplifiée (formule de réduction).

$\boxed{7}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} k! \quad \left(n \in \mathbb{N}\right)$$

1^ère^ version : Démontrons que $S_n \leqslant (n+1)!$.

On ne cherche pas à calculer la somme.

On a : $0! \leqslant 1! \leqslant 2! \leqslant 3! \leqslant \ldots \leqslant n!$ (la première inégalité, est une égalité, les autres inégalités sont en fait strictes, mais on s'en fiche)

Donc $S_n \leqslant (n+1) \times n!$ soit $S_n \leqslant (n+1)!$.

En effet, $(n+1) \times n! = (n+1)!$.

Démontrons l'égalité $(n+1) \times n! = (n+1)!$.

On a : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.
Donc $n! \times (n+1) = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times (n+1)$.
Comme n et $n+1$ sont des entiers consécutifs, il s'agit du produit de tous les entiers naturels de 1 à $n+1$.
Donc $(n+1) \times n! = (n+1)!$.

2^e^ version : Démontrons que $S_n \leqslant (n+1)!$.

On a : $0! \leqslant 1! \leqslant 2! \leqslant 3! \leqslant \ldots \leqslant n!$.

Le nombre de termes de la somme est $n+1$.

Le plus grand terme de la somme est $n\,!$.

En majorant tous les termes de la somme par $n\,!$, on obtient $S_n \leqslant (n+1) \times n!$ soit $S_n \leqslant (n+1)!$.

$\boxed{8}$

$S_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{n}{n^2+k}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

On ne cherche pas à calculer la somme.

Le 2 décembre 2022

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n^2+k}$

$S_4 = \dfrac{1}{4^2+1} + \dfrac{1}{4^2+2} + \dfrac{1}{4^2+3} + \dfrac{1}{4^2+4}$ 4 termes

$S_5 = \dfrac{1}{5^2+1} + \dfrac{1}{5^2+2} + \dfrac{1}{5^2+3} + \dfrac{1}{5^2+4} + \dfrac{1}{5^2+5}$ 5 termes

Il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite.

suite croissante

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k+1}$

Série harmonique

1°) Il s'agit d'une démarche déductive.
On utilise les mots « donc », « d'où », etc.

On a $1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n$.
D'où $n^2+1 \leqslant n^2+2 \leqslant \ldots \leqslant n^2+n$

Donc $\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{n^2+2} \geqslant \ldots \geqslant \dfrac{1}{n^2+n}$ (passage à l'inverse dans l'inégalité ; tous les nombres sont strictement positifs)

On obtient finalement $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2+2} \geqslant \ldots \geqslant \dfrac{n}{n^2+n}$ (on a multiplié tous les nombres par n, $n > 0$)

2°) **Déduisons-en un encadrement de S_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.**

Il y a plusieurs manières de rédiger.

1ère version (assez sèche) :

D'après le principe d'encadrement d'une somme, $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$ soit $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ce qui donne finalement $\dfrac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$ (car $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{\cancel{n} \times n}{\cancel{n} \times (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$).

2e version (plus détaillée) :

Le plus grand terme de S_n est $\dfrac{n}{n^2+1}$.

Le plus petit terme de S_n est $\dfrac{n}{n^2+n}$.

S_n est « composée » de n termes.

D'après le principe de majoration-minoration grossier d'une somme, on a : $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$ soit $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ce qui donne finalement $\dfrac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

3e version :

En encadrant chaque terme par le plus petit et le plus grand, on obtient : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$ soit $\dfrac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$ (on simplifie $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{\cancel{n} \times n}{\cancel{n} \times (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$).

On doit déterminer les limites des suites de terme général $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

Dans les deux cas, on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On va retravailler les deux expressions.

On transforme les deux expressions de telle sorte à ne pas avoir de forme indéterminée.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$ et par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Commentaire :

Bien que l'encadrement obtenu dans la question a) ait pu apparaître grossier de prime abord, nous voyons qu'il permet néanmoins de trouver la limite grâce au théorème des gendarmes.

C'est pour cela qu'il est intéressant d'étudier ce principe.

3°)

```
def terme(n) :
    S=0
    for k in range (1,n+1):
        S=S+n/(n**2+k)
     return S
```

Au lieu de `S=S+n/(n**2+k)`, on peut aussi écrire `S+= n/(n**2+k)`.

Avec la fonction, on obtient : $S_{25} = 0{,}97979000...$.

S_{25} est un nombre rationnel non décimal.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de S_{25} est 0,979.

9

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + ... + \frac{1}{1\times 2\times ...\times n}$$

$$S_n = \left(\left(\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)\times\frac{1}{n-1}+1\right)\times\frac{1}{n-2}+1\right)+...+1\right)\times\frac{1}{1}+1$$

Approximations de e programme Python

```
def approx(n):
    s=1
    for i in range(n,0,-1):
        s=s/i+1
    return s
```

On peut conjecturer que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \text{e}$. Ce résultat peut se démontrer.

Méthode de Horner

Approximations de e programme Python