TS

Exercices sur les limites de suites (1)

$\boxed{1}$ Soit u une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme u_0 et de raison q.

Dans chacun des cas suivants, donner la limite de la suite u.

1°) $u_0 = 3$; $q = \sqrt{2}$

2°) $u_0 = -1$; $q = \sqrt{3}$

3°) $u_0 = \dfrac{5}{2}$; $q = \dfrac{1}{5}$

4°) $u_0 = 6$; $q = -\dfrac{1}{2}$

5°) $u_0 = -\dfrac{1}{3}$; $q = 3$

6°) $u_0 = -2$; $q = 0,9$.

$\boxed{2}$ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n}$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que l'on rencontre une forme indéterminée.

2°) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) Quelle est la limite de la suite u ? Répondre en décomposant bien.

$\boxed{3}$ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4^n - 3}{5^n + 1}$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que l'on rencontre une forme indéterminée.

2°) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times \dfrac{1 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

b) Quelle est la limite de la suite u ?

$\boxed{4}$ Soit u la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

1°) Exprimer S_n en fonction de n.

2°) Étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

$\boxed{5}$ Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **vrai** ou **faux**.
Justifier la réponse donnée :

- dans le cas où la proposition paraît fausse, en donnant un contre-exemple ;
- dans le cas où la proposition paraît exacte, en donnant une démonstration.

a) Toute suite strictement décroissante a pour limite $-\infty$.

b) Pour toutes suites u et v à termes strictement positifs qui ont pour limite $+\infty$, la suite $\dfrac{u}{v}$ converge vers 1.

c) Pour tout réel $q > 0$, la suite $\left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.

d) Il existe des suites qui n'ont pas de limite.

$\boxed{6}$ Soit u une suite. Dire si chacune des propositions suivantes est **vraie** ou **fausse** et justifier la réponse.

1°) Si u converge, alors u^2 converge.

2°) Si u^2 converge, alors u converge.

Réponses

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1°) + ∞ ; 2°) – ∞ ; 3°) 0 ; 4°) 0 ; 5°) – ∞ ; 6°) 0

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1°) On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; 2°) b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1°) On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; 2°) b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1°) $S_n = \dfrac{4}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$; 2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{4}{3}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ a) F ; b) F ; c) F ; d) V

a) On donne un contre-exemple.

Remarque de logique : La négation de « toute » est « au moins une ».

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.
La suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

b) On donne un contre-exemple.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

Les suites (u_n) et (v_n) divergent toutes les deux vers + ∞.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2}{n} = n$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers + ∞.

N.B. : Ce type de question est un problème de « croissance comparée ».

c) On donne un contre-exemple.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
La suite (u_n) converge vers 0 car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ (cours sur la limite d'une suite géométrique).

d) On donne un exemple.

Remarque sur la formulation de la proposition : « Il existe des … » signifie ici « Il existe au moins une … ».

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Il s'agit d'un exercice de logique.

Une remarque concernant les notations : u^2 désigne la suite de terme général $\left(u_n\right)^2$.

1°) V (opérations algébriques sur les suites convergentes ; si u converge vers ℓ, alors $u^2 = u \times u$ converge vers ℓ^2)

2°) F (un contre-exemple est fourni par la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(-1\right)^n$)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[\left(-1\right)^n\right]^2 = 1$

La suite u n'a pas de limite mais la suite u^2 qui est constante (puisque tous les termes sont égaux à 1) est convergente (vers 1).

Solutions détaillées

On peut vérifier les calculs de limites de suites avec un logiciel de calcul formel.

1 Thème de l'exercice : déterminer la limite d'une suite géométrique

Méthode : On commence par exprimer le terme général de la suite en fonction de *n*.

On écrit le résultat en écriture symbolique (la flèche $\to$ est le verbe « tend vers »).

1°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \sqrt{2}$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^n$.

$\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) diverge vers + ∞.

On peut aussi dire qu'elle tend vers + ∞.

2°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier** terme **$u_0 = -1$ et de raison $q = \sqrt{3}$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 \times \left(\sqrt{3}\right)^n = -\left(\sqrt{3}\right)^n$.

$\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) diverge vers – ∞.

3°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{5}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{5}$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

On peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{2} \times 0 = 0$ (car on a une limite finie).

4°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

5°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier terme $u_0 = -\frac{1}{3}$ et de raison $q = 3$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{3} \times 3^n$.

$3 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

6°) (u_n) **: <u>la</u> suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 0,9$**

Déterminons la limite de la suite (u_n).

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -2 \times (0,9)^n$.

$-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n + 1}{3^n}}$

1°) **Démontrons que l'on rencontre une forme indéterminée.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n + 1\right) = +\infty \text{ car } 2 > 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1 \end{array}\right\} \text{donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

N.B. : « Forme indéterminée » ne veut pas dire que la suite n'a pas de limite.
Ici, cela veut tout simplement dire que la forme de base ne permet pas de savoir si la suite admet une limite ni la valeur de la limite.

On n'écrit pas : $\cancel{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \text{FI}}$ ni $\cancel{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\infty}{\infty}}$ (même si on écrit « forme indéterminée » à côté).

On se garde également d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n+1\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \text{FI}$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ n'est pas égal à 1 (car l'infini n'est pas un nombre).

2°) a) **Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n+1}{3^n}$$

$$= \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{2^n}{3^n} + \frac{1^n}{3^n} \qquad \text{(car } 1^n = 1 \text{ pour tout entier naturel } n\text{)}$$

On peut le faire parce que c'est 1 (1 à n'importe quel exposant est égal à 1).

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

b) **Déterminons la limite de la suite *u*.**

Le 22 novembre 2022

On décompose.

On trouve la limite en étudiant la limite chaque terme de la somme.

N.B. : On va réussir à trouver la limite de la suite par une autre expression.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{2}{3} < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{1}{3} < 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme, } \boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

On peut retenir la méthode de cet exercice qui a permis de lever la FI (méthode de réécriture).

On pourrait aussi s'appuyer sur d'autres raisonnements que nous n'utiliserons pas cette année (« termes prépondérants : ici la puissance de 3 est prépondérante sur la puissance de 2).

On a « trafiqué » l'expression de u_n afin d'obtenir une expression qui nous arrange pour déterminer la limite.
Dans certains cas, il faudra savoir faire cette démarche soi-même sans indication.

$\boxed{3}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{4^n - 3}{5^n + 1}$

1°) **Démontrons que l'on rencontre une forme indéterminée.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4^n-3\right)=+\infty \ \text{ car } 4>1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(5^n+1\right)=+\infty \ \text{ car } 5>1\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

2°) a) **Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times \dfrac{1-3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4^n\left(1-\dfrac{3}{4^n}\right)}{5^n\left(1+\dfrac{1}{5^n}\right)}$$ (on force la factorisation au numérateur et au dénominateur)

$$= \frac{4^n}{5^n} \times \frac{1-\dfrac{3}{4^n}}{1+\dfrac{1}{5^n}}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{1-3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$$

b) **Déterminons la limite de la suite *u*.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0 \ \text{ car } \ -1<\dfrac{4}{5}<1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1 \ \text{ car } \ -1<\dfrac{1}{4}<1 \ \text{ et } \ -1<\dfrac{1}{5}<1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

De nouveau, on voit dans cet exercice un moyen de lever la FI (méthode de réécriture).

Remarque :

L'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1-3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}\right]=\dfrac{1-0}{1+0}$ est pratique car elle fait bien apparaître le calcul de limite effectué.

Ce n'est possible que parce que l'on a une limite finie pour les suites de termes généraux $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

$\boxed{4}$

u : suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

On peut écrire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

On n'a pas besoin d'écrire $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(attention la suite « démarre » à commence u_1).

1°) **Exprimons S_n en fonction de *n*.**

On applique la formule* donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (formule sommatoire).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{(la somme comprend } n \text{ termes)}$$

$$= 2 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} \times \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

* Formule sommatoire donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

On teste la formule pour $n = 1$.

2°) **Étudions la convergence de la suite $\left(S_n\right)_{n\geqslant 1}$.**

On ne peut pas déterminer directement la limite de $\left(S_n\right)$.
On va utiliser l'expression simplifiée obtenue à la question précédente.

Cette question rejoint des questions historiques en mathématiques de calculs de sommes.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0 \text{ car } -1<-\frac{1}{2}<1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=1$$

Donc par limite d'un produit : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{4}{3}}$.

Commentaire : On voit ici une somme de termes qui converge !

On peut aisément voir que $\frac{4}{3}$ n'est ni un majorant ni un minorant de la suite $\left(S_n\right)$.
Le lien entre majorant/minorant et limite de suite sera explicité plus tard.

Les termes de $\left(S_n\right)$ sont alternativement plus grands et plus petits que $\frac{4}{3}$.

Les termes d'indice pair sont plus grands que $\frac{4}{3}$.

Les termes d'indice impair sont plus petits que $\frac{4}{3}$.

$\boxed{5}$ **Vrai ou faux ?**

Il s'agit de phrases quantifiées.

→ méthode :

Quand c'est vrai, il faut justifier

• de manière générale (si c'est une phrase du type « pour tout »)

• avec un exemple (si c'est une phrase du type « il existe »)

Quand c'est faux, il faut justifier.

• avec un contre-exemple (si c'est une phrase du type « pour tout »)

• de manière générale (si c'est une phrase du type « il existe »)

Il faut trouver un bon contre-exemple. On essaie de trouver un contre-exemple simple.

→ difficulté :

On doit s'efforcer de rédiger correctement (rédaction-type à apprendre).

On donne les contre-exemples sous forme de suites explicites, pas de suites récurrentes.

a) **Toute suite strictement décroissante a pour limite $-\infty$.**

Faux.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

La suite (u_n) est strictement décroissante (démonstration facile) et converge vers 0.

Le 24 novembre 2022

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n}$

touche jamais 0

« touche » jamais 0

penser à la représentation graphique en nuage de points (image mentale du cours).

D'autres contre-exemples sont évidemment possibles.

Il est possible de considérer la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (0,9)^n$ [mode explicite].

(u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0 (facile à justifier) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (car $-1 < 0,9 < 1$).

Toute suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison comprise strictement entre – 1 et 1 fournit un contre-exemple.

On peut aussi prendre $u_n = (0,1)^n$.

Le 24 novembre 2022

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

(u_n) strictement décroissante signifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

b) **Pour toutes suites *u* et *v* à termes strictement positifs qui ont pour limite + ∞, la suite $\frac{u}{v}$ converge vers 1.**

Faux.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

Les suites (u_n) et (v_n) divergent toutes les deux vers + ∞.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2}{n} = n$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers + ∞.

N.B. : Ce type de question est un problème de croissante comparée.
Il y a d'autres contre-exemples possibles comme celui qui est donné ci-dessous.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$ (on s'appuie sur l'exercice $\boxed{\mathbf{2}}$).

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ (car $2 > 1$ et $3 > 1$).

De plus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \neq 1$ (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$).

Donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0 et non pas 1.

Le 24 novembre 2022

Traduction des hypothèses par un élève (Victor Haquin)
$u > 0$ $v > 0$ etc.

c) **Pour tout réel $q > 0$, la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite + ∞.**

Faux.

On prend $q = \dfrac{1}{2}$.

On a $q > 0$ donc la condition est respectée.

Pourtant, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

La suite $\left(u_n\right)$ converge vers 0 car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ (cours sur la limite d'une suite géométrique).

Autre exemple : $\left(0{,}1^n\right)$ (suite définie de manière explicite)

Tout réel q compris entre 0 et 1 fournit un contre-exemple.

$\boxed{5}$

$q = \dfrac{1}{2}$

$q > 0$ respecte la condition

d) **Il existe des suites qui n'ont pas de limite.**

Vrai.

Remarque sur la formulation de la proposition : « Il existe des … » signifie ici « Il existe au moins une … ».

Rédaction 1 :

La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = \left(-1\right)^n$ n'a pas de limite.

Rédaction 2 :

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_n = \left(-1\right)^n$.

$\left(u_n\right)$ n'a pas de limite.

Rédaction 3 :

La suite de terme général $\left(-1\right)^n$ n'a pas de limite.

Toute suite géométrique de premier terme non nul dont la raison est inférieure ou égale à – 1 fournit un exemple pour l'affirmation.

23-11-2022

Toute suite périodique non constante n'a pas de limite.

[Une suite constante est une suite périodique de période 1.]

$\boxed{6}$ Vrai ou faux ?

1°) **Si *u* converge, alors u^2 converge.**

Vrai.

Cette phrase exprime une quantification cachée du type « pour tout ».

Si u converge vers un réel ℓ, alors $u^2 = u \times u$ converge vers $\ell \times \ell = \ell^2$ (limite d'un produit).

Autre méthode :
13-11-2013

Vrai :
La limite d'une suite (u_n) formée du produit de deux suites convergentes est un réel.
La suite (u_n) est donc convergente.

2°) **Si u^2 converge, alors *u* converge.**

Cette phrase est la réciproque de la phrase du 1°).

Faux.

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n)^2 = \left[(-1)^n\right]^2 = 1$$

La suite u^2 converge vers 1 mais u n'a pas de limite.

On peut formuler ces phrases (implications) avec les expressions « condition nécessaire » - « condition suffisante ».