TS

Exercices sur les suites (révisions et compléments)

Le 18-1-2023

Parties / intervalles stables par une fonction

La notion de partie stable par une fonction a rapport avec l'ensemble des valeurs.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

1°) Démontrer que l'intervalle $I = [0\,;2]$ est stable par *f*.

2°) Démontrer que l'intervalle $J = [2\,;+\infty[$ est stable par *f*.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+6}$.

1°) Démontrer que l'intervalle $I = [0\,;3]$ est stable par *f*.

2°) Démontrer que l'intervalle $J = [3\,;+\infty[$ est stable par *f*.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-2}{x+1}$.

Démontrer que l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$ est stable par *f*.

1°) $I = [0\,;2]$

Démontrons que I est stable par *f*.

On doit démontrer que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Il y a plusieurs méthodes :

1ère méthode : On procède par encadrements successifs.

Soit *x* un réel quelconque de l'intervalle *I*.

On a :

$0 \leqslant x \leqslant 2$

$0 \leqslant x \leqslant 2$

$2 \leqslant x+2 \leqslant 2+2$

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{4}$

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant 2$

$\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$

$0 \leqslant f(x) \leqslant 2$

Pas d'équivalences il s'agit de déductions. On emploie les termes « donc », « d'où », « par conséquent » etc.
À gauche, inégalité stricte mais entraîne large.

Avec le TVI, on obtiendra des résultats plus précis.

2e méthode :
On utilise le sens de variation de la fonction de *f*.
Cette méthode est assez efficace.

2°)

Soit *x* un réel quelconque dans l'intervalle *J*.
On procède par inégalités successives.
On part de $x \geqslant 2$ et on cherche à « reconstituer » la fonction.
On a $x \geqslant 2$

$x+2 \geqslant 4$

$\sqrt{x+2} \geqslant 2$

$f(x) \geqslant 2$

On ajoute 2 aux deux membres de l'inégalité. L'inégalité ne change pas de sens car il s'agit d'une addition.
Le passage à la racine carrée est licite car les deux membres sont tous deux positifs ou nuls.
On en déduit que l'intervalle *J* est stable par *f*.

Exercice 2 :   x+6

Soit *x* un réel quelconque de l'intervalle *I*.

On a :

$0 \leqslant x \leqslant 2$

$0 \leqslant x \leqslant 2$

$2 \leqslant x+2 \leqslant 2+2$

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{4}$

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant 2$

$\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$

$0 \leqslant f(x) \leqslant 2$

Ex. 3

On étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-2}{x+1}$.

On démontre que *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Donc si $x > 1$, alors $f(x) > 1$.

Progression des exercices :

2 - 1 - 25 - 22 - 24
11 - 12 - 5
13 - 6 - 26 - 17 - 18
21 - 7 - 8 - 9 - 10
20 - 19 - 27 - 28 - 14 - 15 - 16 – 23

29 exercice de calcul de somme à l'aide de la calculatrice.

30 exercice sur suites bornées + 4 : suites majorées, minorées, bornées

Le 8 décembre 2021

On considère la fonction Python suivante `terme(n)` qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$.

```
def terme(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=5*(u+1)
    return u
```

J'avais écrit `u=2*(u+1)` le 2 et le 5 était l'un sur l'autre.

terme(5) ?

$\boxed{1}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos n$.

Étudier le sens de variation de (u_n) par étude de fonction.

Indication : On commencera par définir « la » fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier naturel n on ait $u_n = f(n)$ puis on étudiera le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ sans faire le tableau de variations.

On admettra que la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\sin x$.

On retient ce résultat sous la forme : $(\cos x)' = -\sin x$.

On peut avoir une idée en calculant les termes grâce à la calculatrice.

$\boxed{2}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n + 1$.

Étudier le sens de variation de (u_n) par différence.

Calculer les premiers termes en utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$ pour plusieurs valeurs de u_0.

$\boxed{3}$ Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes positifs ou nuls* (c'est-à-dire dont tous les termes sont positifs ou nuls).

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$.

Démontrer que si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

Démontrer que si (v_n) est croissante, alors (u_n) est croissante.

* La suite (u_n) est à termes positifs ou nuls signifie que ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$).

$\boxed{4}$ Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.

Donner une expression simplifiée de S_n sous forme factorisée ; en déduire que la suite (S_n) est majorée.

$\boxed{5}$ Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 14$.

1°) Calculer son premier terme u_0 et sa raison r.

2°) Exprimer u_n en fonction de n.

3°) Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + ... + u_{25}$.

$\boxed{6}$ Soit (u_n) une suite géométrique monotone définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_4 = 1$ et $u_6 = 9$.

1°) Calculer son premier terme u_0 et sa raison q.

2°) Exprimer u_n en fonction de n.

3°) Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + ... + u_{14}$.

7 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 6$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$.

Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites Δ et D d'équations réduites respectives $y = x$ et $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. On prendra 1,5 cm pour unité graphique.

Placer alors les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 (sans faire les calculs).

On laissera apparentes les constructions.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de *n*.

On peut rentrer les suites *u* et *v* dans la calculatrice.

8 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$.

1°) Justifier par un raisonnement « de proche en proche », sans faire de calcul, que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n > 0$.

Remarque : Ce raisonnement sera mis en forme de manière satisfaisante grâce au raisonnement par récurrence que l'on étudiera plus tard. Il ne s'agit ici que d'une justification intuitive. On s'efforcera de comprendre l'« effet domino » sous-jacent.

2°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) par différence.

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

9 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ (on admettra que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \neq 3$).

1°) Calculer v_0.

2°) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n (en factorisant le dénominateur).

Calculer $v_{n+1} - v_n$; en déduire que la suite (v_n) est arithmétique.

3°) a) Exprimer v_n en fonction de *n*.

b) Exprimer u_n en fonction de v_n ; en déduire u_n en fonction de *n* (sous la forme d'un seul quotient).

10 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{-3u_n - 1}{2u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ (on admettra que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \neq -1$).

1°) Calculer v_0.

2°) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*.

4°) Exprimer u_n en fonction de v_n ; en déduire u_n en fonction de *n* (sous la forme d'un seul quotient).

11 Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = -2$ et de raison $r = 3$.

Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$ (on peut écrire $S = \sum_{k=1}^{k=20} u_k$).

12 Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = -2$.

Calculer la somme $S = u_{25} + u_{26} + ... + u_{125}$ (on peut écrire $S = \sum_{k=25}^{k=125} u_k$).

13 Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = -2$ et de raison $q = 3$.

1°) Exprimer u_n en fonction de *n*.

2°) Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_7$. On peut écrire : $S = \sum_{k=1}^{k=7} u_k$.

14 Calculer la somme $\mathrm{A} = 1 + 3 + 5 + \ldots + 47$.
(On admet que les termes de la somme sont construits suivant un principe logique simple).

15 Calculer la somme $\mathrm{B} = 1{,}05 + 1{,}05^2 + ... + 1{,}05^{10}$.

16 Calculer la somme de tous les entiers naturels pairs jusqu'à mille.

17 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 2^{n+1}$.

Déterminer la nature de la suite (u_n).

18 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}u_n$.

Déterminer la nature de la suite (u_n).

19 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

On peut écrire $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n.

$\boxed{20}$ Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

Deux remarques :

1. La suite (S_n) n'est pas définie en mode explicite.
2. On ne cherchera pas d'expression explicite de S_n en fonction de n (car il n'en existe pas).

Si on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, S_n est la somme des n premiers termes de la suite (u_n) (ou des termes d'indices 1 à n de cette suite) .
Comme la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique, il n'existe pas de formule sommatoire pour S_n c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de réduire la somme S_n. On ne peut pas trouver de formule explicite de S_n en fonction de n.

1°) Calculer S_1, S_2, S_3 « à la main ».
2°) Calculer S_{50} et S_{100} à l'aide de la calculatrice.
3°) Étudier le sens de variation de la suite (S_n).

$\boxed{21}$ Situations concrètes

En 2020, une petite ville compte 10000 habitants.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la population en milliers l'année $2020+n$ selon l'hypothèse considérée dans chaque question. On a donc $u_0 = 10$.
1°) Dans cette question, on suppose que chaque année, la ville gagne 100 habitants.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de (u_n) dans ce cas ?
2°) Dans cette question, on suppose que chaque année, la population augmente de 5 %.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de (u_n) dans ce cas ?
3°) Dans cette question, on suppose que chaque année, 2 % des habitants migrent vers une grande ville mais que 50 nouveaux habitants arrivent.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de (u_n) dans ce cas ?

$\boxed{22}$

La suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = \mathrm{e}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln u_n$ est-elle définie sur $\mathbb{N}$?
Question très difficile :
Existe-t-il des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$?
La réponse est non, mais la justification est difficile.

Le 12-10-2023

$u_0 = 2023 \qquad u_{n+1} = \ln u_n$
u0, u1, u2, u3, u4 existent.
En revanche, u5 n'existe pas.
On dit que la suite (u_n) est finie. Elle s'arrête à l'indice 4.

La suite a quelques soucis à partir de 5.
On dit que la suite (u_n) est finie, elle est définie pour les entiers compris entre 0 et 4.

$u_0 = 2023$
$u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3}$
La suite (u_n) s'arrête à l'indice 3.

Cette année, on s'intéressera à des suites infinies.
Condition pour avoir une suite infinie.

$\boxed{23}$ Méthode de dichotomie et suites

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Observer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.
On admet que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans cet intervalle, que l'on notera α et dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte.
On définit alors deux suites (u_n) et (v_n) :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = c_n & \text{si } f(c_n) > 0 \\ u_{n+1} = u_n & \text{si } f(c_n) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} v_{n+1} = v_n & \text{si } f(c_n) > 0 \\ v_{n+1} = c_n & \text{si } f(c_n) \leqslant 0 \end{cases}$$

Par construction des suites, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \alpha \leqslant v_n$.

On ne cherchera pas à exprimer u_n et v_n en fonction de n.

En s'aidant éventuellement de la calculatrice, recopier et compléter le tableau suivant avec des valeurs décimales éventuellement arrondies au millième pour $f(c_n)$.

n	u_n	v_n	c_n	$f(c_n)$	Signe de $f(c_n)$
0	1	2	1,5	– 0,125	–
1	1	1,5			
2					
3					
4					
5					

Rédiger un algorithme en langage naturel (pseudo code) puis un programme Python permettant de calculer les termes des suites.

24 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^3-3u_n$ pour tout entier naturel n.

Déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est constante.

25 Dans chaque cas, calculer les premiers termes de la suite puis proposer une formule explicite de u_n en fonction de n.

1^{er} cas : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

2^e cas : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1=1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

26 Dans chaque cas, déterminer la nature de la suite (u_n) définie $\mathbb{N}$ définie par le terme général.

1er cas : $u_n=(-1)^n\times 2^{3n+1}$

2e cas : $u_n=(-1)^n\times 3^{2n-1}$

3e cas : $u_n=\mathrm{e}^{3n-1}$

27 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ définie par $u_n=3^n-1$.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

28 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}3^{2k-1}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

Le 21 octobre 2021

Rajouter deux exercices sur des expressions simplifiées de S_n en fonction de n, l'un pour une suite arithmétique, l'autre pour une suite géométrique. Proposé dans le $\boxed{4}$.

Il faut penser à tester les formules.

29 À l'aide de fonction « somme » de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième $S=\sum\limits_{k=0}^{k=100}\sqrt{k}$.

30 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=5-3n^2$.

Démontrer que la suite (u_n) est majorée. Donner trois majorants de la suite.

31 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2\sqrt{n}-4$.

Démontrer que la suite (u_n) est minorée. Donner trois minorants de la suite.

32 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=1-\dfrac{2}{n}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

33 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

34 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

35 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n-3$ pour tout entier naturel n.

Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel $n\geqslant 1$ et qui donne en sortie a valeur de u_n.

Proposer une version fonction de ce programme.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def terme(n):` qui prend pour argument un entier naturel $n\geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

Corrigé

1 La suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

Solution détaillée :

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos n$

Déterminons le sens de variation de (u_n).

La suite (u_n) est définie en mode explicite (on a l'expression du terme général en fonction de n).
La fonction f associée à la suite (telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$) permet d'étudier le sens de variation de la suite.

On peut rentrer la suite dans la calculatrice.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos x$.

Ou

Considérons la fonction $f : x \mapsto x + \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi se contenter de définir f définie sur $\mathbb{R}_+$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \sin x$
Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \leqslant 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \sin x \geqslant 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geqslant 0$.
On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

N.B. : La méthode par différence est plus compliquée. Il est préférable de passer par une fonction.

⚠ Pas de tableau de variation de f à cause de la ligne du signe de $f'(x)$ (il y aurait une infinité de 0 sur cette ligne).

On peut cependant faire le tableau de variation de f sans écrire la ligne du signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	↗	

La fonction f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée s'annule en des points isolés) et par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

Autre méthode :

On utilise la méthode par différence, plus compliquée à mettre en œuvre ici.

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \cos(n+1) - \cos n$$
$$= 1 - 2\sin\frac{2n+1}{2}\sin\frac{1}{2} \quad \text{(formule de trigonométrie : } \cos p - \cos q = -2 \times \sin\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}\text{)}$$

On procède par inégalités successives.

$$-1 \leqslant \sin\frac{2n+1}{2} \leqslant 1$$

$\times\left(-2\sin\frac{1}{2}\right)$ (or $\sin\frac{1}{2} > 0$ car $\frac{1}{2} \in \left]0\,;\pi\right[$ d'où $-2\sin\frac{1}{2} < 0$)

$$2\sin\frac{1}{2} \geqslant -2\sin\frac{1}{2} \times \sin\frac{2n+1}{2} \geqslant -2\sin\frac{1}{2}$$

$+1$

$$1 + 2\sin\frac{1}{2} \geqslant 1 - 2\sin\frac{1}{2} \times \sin\frac{2n+1}{2} \geqslant 1 - 2\sin\frac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 1 - 2\sin\frac{1}{2}$.

Avec la calculatrice (mode radian), on obtient : $1 - 2\sin\frac{1}{2} = 0{,}958851077...$ donc $1 - 2\sin\frac{1}{2} > 0$.

Donc $1 - 2\sin\frac{2n+1}{2}\sin\frac{1}{2} > 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

$\boxed{2}$ La suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

Solution détaillée :

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^2-u_n+1$

Déterminons le sens de variation de (u_n).

La suite (u_n) est définie en mode récurrent.
Pour trouver le sens de variation, on utilise la technique usuelle de différence.

On utilise la méthode par différence (méthode que l'on utilise le plus souvent ; ici seule méthode possible).

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n&=(u_n)^2-u_n+1-u_n\\&=(u_n)^2-2u_n+1\\&=(u_n-1)^2\end{aligned}$$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad (u_n-1)^2\geqslant 0$ (un carré est toujours positif ou nul)

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ soit $u_{n+1}\geqslant u_n$ donc la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

$\boxed{3}$ **Solution détaillée :**

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes positifs ou nuls

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$

Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}-v_n&=\frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}-\frac{u_n}{1+u_n}\\&=\frac{u_{n+1}(1+u_n)-u_n(1+u_{n+1})}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}\\&=\frac{u_{n+1}+\cancel{u_nu_{n+1}}-u_n-\cancel{u_nu_{n+1}}}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}\\&=\frac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}\end{aligned}$$

Démontrons que si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.
Démontrons que si (v_n) est croissante, alors (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est à termes positifs ou nuls signifie que ($\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\geqslant 0$).

La suite (u_n) est à termes positifs ou nuls donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad (1+u_{n+1})(1+u_n)>0$.

Le signe de $v_{n+1}-v_n$ est donc le même que celui de $u_{n+1}-u_n$.

• Si (u_n) est croissante, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}-v_n\geqslant 0$.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

• Si (v_n) est croissante, alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}-v_n\geqslant 0$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Remarque :

On a démontré que :
• Si (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
• Si (u_n) est décroissante, alors la suite (v_n) est décroissante.
Du coup, par « disjonction de cas », on en déduit l'équivalence logique :
« (u_n) est croissante si et seulement si (v_n) est croissante. »
« (u_n) croissante $\Leftrightarrow$ (v_n) croissante. »

$\boxed{4}$ **Solution détaillée :**

$$S_n=1+\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Donnons une expression simplifiée de S_n.

Le terme général de la suite (S_n) est défini par une somme.

Remarque : À la base, S_n est une somme définie en extension (présence des trois petits points).

On pourrait aussi écrire S_n à l'aide du symbole Σ. Ce serait plus clair (et plus rigoureux).

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$$

L'écriture Σ est plus rigoureuse qu'avec les petits points.

L'objectif de l'exercice est d'obtenir une formule sommatoire (c'est-à-dire une formule réduite) de S_n.

1ère méthode :

On applique une **formule sommatoire du cours (permettant la réduction de la somme)**.

Pour $q\neq 1$, on a : $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On applique cette formule avec $q=\frac{2}{7}$ (qui est bien différent de 1).

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}}=\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{5}\times\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right]$$ (réduction de la somme)

On dit que l'on a réduit la somme.

Il est important de tester la formule pour $n=0$ et $n=1$.

2e méthode :

On applique la **formule sommatoire pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.**

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=\frac{2}{7}$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times q^n$ soit $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

On effectue une réécriture de la somme (à l'aide de la suite) : $\boxed{S_n=u_0+u_1+...+u_n}$ (étape fondamentale).

$$\begin{aligned}S_n&=u_0\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\\&=1\times\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}}\\&=\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{5}{7}}\\&=\frac{7}{5}\times\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right]\end{aligned}$$

(Pour calculer le nombre de termes de la somme, on effectue le calcul : $n-0+1=n+1$ selon la formule (dernier indice) – (premier indice) + 1.)

On a donc $S_n=\frac{7}{5}\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right]$.

Déduisons-en que la suite (S_n) est majorée.

On se réfère à la définition :
Il s'agit de démontrer que tous les termes de la suite (S_n) sont inférieurs ou égaux à un nombre M (fixe, qui ne dépend pas de *n*).

On ne peut pas le démontrer à partir de l'expression de base.
Pour la majoration, on prend l'expression simplifiée.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}>0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}<0$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}<1$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}\quad\frac{7}{5}\times\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right]<\frac{7}{5}$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n<\frac{7}{5}$.

Donc la suite (S_n) est majorée par $\frac{7}{5}$.

On peut aussi dire que $\frac{7}{5}$ est <u>un</u> majorant de la suite (S_n).

Quelques commentaires :

• Pour démontrer que la suite est majorée, nous n'avons pas parlé de limite (à priori, la notion de majorant n'est pas directement reliée à la notion de limite).

• On ne parle pas de maximum. En effet, nous avons démontré que tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\frac{7}{5}$. Par conséquent, le nombre $\frac{7}{5}$ n'est jamais atteint.

Aucun terme de la suite n'est égal à $\frac{7}{5}$.

• Tous les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{7}{5}$ sont aussi des majorants de la suite.

Cependant, $\frac{7}{5}$ est le plus petit des majorants. Nous verrons plus tard que c'est également la limite de la suite.

• On a démontré que tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\frac{7}{5}$. Or dans la définition d'un majorant, l'inégalité est large. Ça n'est pas gênant : nous savons qu'une inégalité stricte entraîne une inégalité large (la réciproque est fausse).

• On n'aurait pas pu démontrer que la suite est majorée en partant de l'égalité de définition de S_n comme somme. On était obligé d'utiliser la forme réduite de la somme.

$\boxed{5}$ 1°) $u_0=-7$ et $r=3$; 2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3n-7$; 3°) $S=\underbrace{u_4+u_5+...+u_{25}}_{25-4+1=22\text{ termes}}$; $S=803$

Solution détaillée :

(u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_3=2$ et $u_7=14$

1°) **Calculons son premier terme u_0 et sa raison *r*.**

Comme (u_n) est une suite arithmétique, $\forall(n,\,p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n=u_p+(n-p)\times r$.
En particulier, $u_7=u_3+4r$ donc $14=2+4r$ soit $4r=12$ d'où $r=3$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } u_0&=u_3-3r\\&=2-9\\&=-7\end{aligned}$$

2°) **Exprimons u_n en fonction de *n*.**

Il y a deux méthodes possibles.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0+nr$ $=-7+3\times n$ $=3n-7$	$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_3+(n-3)\times r$ $=2+(n-3)\times 3$ $=3n-7$

Il est important de tester la formule pour $n=0$ et $n=1$.

3°) **Calculons la somme $S=\underbrace{u_4+u_5+...+u_{25}}_{25-4+1=22\text{ termes}}$.**

On a : $S=22\times\dfrac{u_4+u_{25}}{2}$.

Or $u_4=12-7=5$ et $u_{25}=75-7=68$.

Donc :

$$S=22\times\frac{5+68}{2}$$
$$=22\times\frac{73}{2}$$
$$=11\times 73$$
$$=803$$

$\boxed{6}$ 1°) $q=3$ (utiliser (u_n) est monotone donc $q\geqslant 0$) ; $u_0=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$; 2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3^{n-4}$; 3°) $S=88\,573$.

Solution détaillée :

(u_n) : suite géométrique monotone définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_4=1$ et $u_6=9$

1°) **Calculons le premier terme u_0 et la raison *q* de la suite (u_n).**

On a $u_6=u_4\times q^{6-4}$ (formule $u_n=u_p\times q^{n-p}$) donc $9=1\times q^2$ soit $q^2=9$ d'où $q=3$ ou $q=-3$.
Or (u_n) est monotone donc $q\geqslant 0$ (en effet, une suite géométrique dont le premier terme n'est pas nul est monotone si et seulement si sa raison est positive ou nulle) d'où $q=3$.

Rappel de définition :

On dit qu'une suite est *monotone* pour exprimer qu'elle est soit croissante soit décroissante.

La définition s'adapte au cas d'une suite strictement monotone.
On notera qu'une suite constante est une suite monotone.
On notera que la définition d'une suite monotone est la même que celle d'une fonction monotone sur les intervalles.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times 3^n$.

En particulier, pour $n=4$, on obtient $u_4=u_0\times 3^4$ d'où $u_0=\dfrac{u_4}{3^4}$ soit $u_0=\dfrac{1}{81}$.

Remarque :
On peut préciser la monotonie de la suite (u_n) dès le début car $u_4=1$ et $u_6=9$ par hypothèse.
On a : $u_4<u_9$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
On peut aussi le voir à la fin de l'exercice en distant que $u_0>0$ et $q>1$.

2°) **Exprimons u_n en fonction de *n*.**

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times q^n$

$$=\frac{1}{81}\times 3^n$$
$$=\frac{1}{3^4}\times 3^n$$
$$=3^{n-4}$$

3°) **Calculons la somme $S=u_4+u_5+...+u_{14}$.**

On peut écrire $S=\displaystyle\sum_{k=4}^{k=14}u_k$.

1ère méthode :

On calcule tous les termes. On fait la somme.

2e méthode :

On utilise la commande de calcul de somme de la calculatrice.

Calculatrice Numworks :

- Aller dans la boîte à outils (touche en haut à droite).
- Aller dans calculs.
- Aller dans sum(f(n),n,nmin,nmax)   somme.
- Appuyer sur « OK ».

$$\sum_{n=4}^{14}3^{n-4}$$

3[e] méthode :

On utilise la formule du cours donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

bien	moins bien
$S=u_4+u_5+...+u_{14}$ $=u_4\times\dfrac{q^{11}-1}{q-1}$ $=1\times\dfrac{3^{11}-1}{3-1}$ $=\dfrac{177\,146}{2}$ $=88\,573$	$S=u_4+u_5+...+u_{14}$ $=u_4\times\dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ $=1\times\dfrac{1-3^{11}}{1-3}$ $=\dfrac{-177\,146}{-2}$ $=88\,573$

$\boxed{7}$ $(\boldsymbol{u_n})$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0=6} \\ \boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}} \end{cases}$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique c'est-à-dire admettant une relation de récurrence du type $u_{n+1}=au_n+b$.

Il s'agit de l'étude guidée d'une suite homographique : passage du mode récurrent au mode explicite au moyen d'une suite auxiliaire.

1°) **Représentation graphique**

> La suite (u_n) est une suite récurrente d'ordre 1 ui peut être définie à partir de la fonction $f: x\mapsto\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ de sorte que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

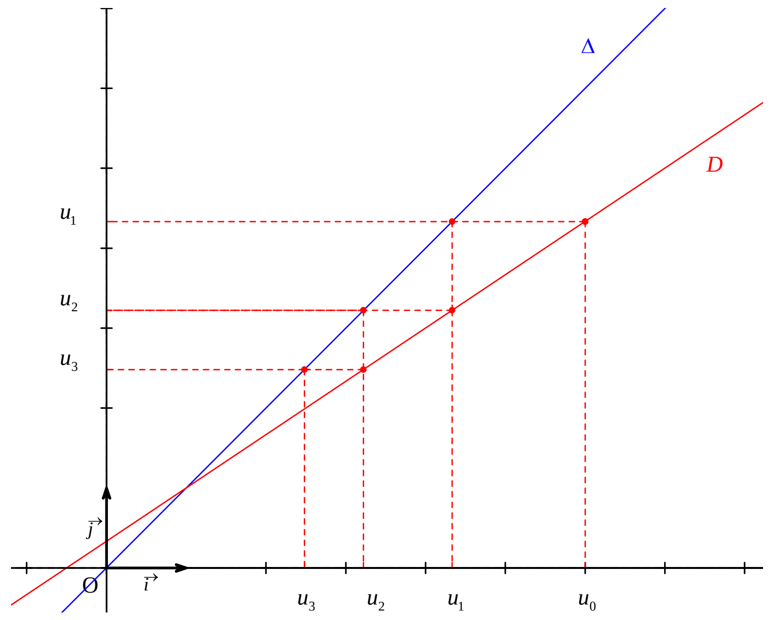
Comme *f* est une fonction affine, sa représentation graphique est la droite *D* d'équation $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

On trace cette droite en prenant deux points (par exemple, les points A de coordonnées (1 ; 1) et B de coordonnées (4 ; 3), qui ont l'avantage d'être à coordonnées entières).

On trace également la droite Δ d'équation $y=x$.

On trace les droites Δ : $y=x$ et D : $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ (droite qui représente la fonction $f: x\mapsto\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ associée à la suite).

On applique le procédé de construction classique.



• On n'écrit pas les valeurs de u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses. On peut éventuellement mettre la valeur de u_0.

• On peut écrire les équations réduites de Δ et *D* sur le graphique (au moins celle de Δ qui est importante).

• On peut faire apparaître la construction sur l'écran de la calculatrice.

• Par calcul, on obtient : $u_1=\dfrac{13}{3}$, $u_2=\dfrac{29}{9}$, $u_3=\dfrac{67}{27}$, $u_4=\dfrac{161}{81}$.

On a deux valeurs de u_1 (ce sont les mêmes).
Seules les valeurs sur l'axe des abscisses sont intéressantes.

2°) La suite (u_n) est arithmético-géométrique. L'énoncé va nous guider pour trouver l'expression explicite de u_n. Pour cela, on utilise une suite auxiliaire.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n-1$

a) **Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.**

Méthode :
On exprime v_{n+1} en fonction de v_n.
On travaille en littéral.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=u_{n+1}-1$

$$=\left(\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}\right)-1$$
$$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}-1$$
$$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}(u_n-1)$$
$$=\frac{2}{3}v_n$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$.

Le premier terme est égal à $v_0=u_0-1=5$.

$v_0=5$

Mauvaise démarche :

$v_0=u_0-1=5$

$u_1=\frac{2}{3}\times 6+\frac{1}{3}=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$ donc $v_1=\frac{13}{3}-1=\frac{13}{3}-\frac{3}{3}=\frac{10}{3}$

On calcule $\frac{v_1}{v_0}=\frac{\frac{10}{3}}{5}=\frac{2}{3}$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$.

On peut aussi faire v_n en fonction de v_{n-1} (un peu moins logique).

b) **Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.**

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=v_0\times q^n$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

parenthèses obligatoires

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=v_n+1$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \boxed{u_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

• On peut vérifier que cette formule marche pour le calcul des premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3.
On dit que l'on teste la formule.

• L'une des difficultés de la question 2°) b) est d'arriver à mettre « en connexion » toutes les formules.

Il est à noter qu'un logiciel de calcul formel tel que XCas peut permettre d'obtenir directement le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

$\boxed{8}$ (u_n) $\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{u_n}{3u_n+1}\end{cases}$

La suite (u_n) est définie par récurrence (pourquoi ?).

Il s'agit de l'étude guidée d'une suite homographique : passage du mode récurrent au mode explicite au moyen d'une suite auxiliaire.

1°) **Justifions par un raisonnement « de proche en proche » que pour tout entier naturel n on a : $u_n>0$.**

Il s'agit de démontrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

Version 19-10-2021 en T1 :

On démontre que le fait qu'$\boxed{\text{un}}$ terme soit positif entraîne que le suivant l'est également (vu l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, très simple).

Comme $u_0=\frac{1}{3}$ par hypothèse (hypothèse en mathématiques = donnée), on a $u_0>0$ et on peut en déduire que $\boxed{\text{tous}}$ les termes sont positifs.

On peut s'intéresser à une autre propriété : $u_n\in\mathbb{Q}$.
Cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.
On la démontre par un raisonnement de proche en proche.

Autre version du même jour (en T6-T7) :

Pour notre suite (pas vrai pour toutes le suites), la propriété de « positivité » des termes se transmet d'un indice au suivant. On démontre ce résultat en utilisant la relation $u_{k+1}=\frac{u_k}{3u_k+1}$, sans faire de calcul.

Comme elle est vraie « au départ » (puisque $u_0>0$), elle est vraie à tous les indices.
La propriété de positivité est vraie pour tous les termes.

Si $u_k>0$, alors $u_{k+1}>0$ d'après l'expression $u_{k+1}=\frac{u_k}{3u_k+1}$ (il s'agit d'un « signe évident »).

Le 19-10-2021

Ces propriétés peuvent se démontrer assez facilement en introduisant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{3x+1}$.

Il s'agit de la fonction associée à la suite.

La fonction *f* possède la propriété suivante de conservation de la positivité : $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

La fonction *f* possède la propriété suivante de conservation de la rationalité : $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$.

Ces propriétés sont quasiment évidentes en utilisant l'expression de *f*.

Pour cela, on va démontrer que la phrase « $u_n > 0$ » (il s'agit d'une phrase ouverte) est vraie pour $n = 0$ et qu'elle est **héréditaire** ou **transmissible**.

Tout d'abord, on a $u_0 > 0$ de manière évidente.

$u_1 = \dfrac{u_0}{3u_0+1}$ donc $u_1 > 0$ (sans faire de calcul).

$u_2 = \dfrac{u_1}{3u_1+1}$ donc $u_2 > 0$.

On montre aisément que la propriété passe d'un indice au suivant.

Si pour $\boxed{\text{un}}$ entier naturel *k*, on a : $u_k > 0$, alors comme $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{3u_k+1}$, on a : $u_{k+1} > 0$.

Donc si la propriété est vraie pour un indice *k*, alors elle vraie pour l'indice suivant $k+1$.

On a donc démontré que la propriété de positivité est héréditaire ou transmissible.

Le « passage du fini à l'infini » (selon la formule célèbre du mathématicien Poincaré) sera justifié plus tard avec un nouveau type de raisonnement appelé **« raisonnement par récurrence »**.

On retiendra que le raisonnement s'organise en deux grandes parties (outre l'introduction et la conclusion).

2°) **Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).**

On utilise la méthode par différence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3u_n+1} - u_n$$

$$= \frac{u_n - (3u_n+1)u_n}{3u_n+1}$$

$$= -\frac{3u_n^{\ 2}}{3u_n+1}$$ (Il faut absolument aboutir à cette forme simplifiée pour pouvoir conclure).

On analyse le signe du quotient obtenu.

Or $\left.\begin{array}{l} -3u_n^{\ 2} < 0 \\ 3u_n + 1 > 0 \text{ car on a démontré dans la question précédente que } u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

On en déduit que **la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0**.

Quelques commentaires :

• Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n), on ne peut pas seulement étudier le signe de la différence $u_1 - u_0$. En effet, ce serait « local », comme me l'a dit Baptiste Salaun le mercredi 18-9-2013, jour où nous avons corrigé les exercices en classe.
Ça n'aurait rien de général.

• On pourrait aussi utiliser la méthode par quotient car on a démontré que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

• Une présentation possible au brouillon pour analyser le signe est la suivante :

$$-\frac{3u_n^{\ 2} \ \}\oplus}{3u_n+1 \ \}\oplus}$$

On évitera cependant d'adopter cette présentation dans une version rédigée au propre.

3°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{u_n}$

a) **Démontrons que la suite (v_n) est arithmétique.**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}}$ (on remarquera la répercussion du changement d'indice sur *u* à *v* : c'est la notion de variable muette)

$$= \frac{1}{\dfrac{u_n}{3u_n+1}}$$

$$= \frac{3u_n+1}{u_n}$$

$$= \frac{3u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}$$

$$= 3 + \frac{1}{u_n}$$

$$= 3 + v_n$$

On en déduit que **(v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $r = 3$.**

b) **Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.**

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + nr$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3n + 3$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{v_n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{3n+3}$.

On teste la formule obtenue pour $n=0$ (calcul mental).

9 (u_n) $\begin{cases} u_0=-1 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$ (on admet que $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\neq 3$)

Il s'agit de l'étude guidée d'une suite homographique (passage du mode récurrent au mode explicite).

1°) **Calculons v_0.**

$$v_0=\frac{1}{-1-3}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

2°)

• **Exprimons v_{n+1} en fonction de u_n.**

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n}-3}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{3u_n-9}{6-u_n}}$$
$$=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$$
$$=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}$$

• **Calculons $v_{n+1}-v_n$.**

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{1}{u_n-3}.$$
$$=\frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)}$$
$$=\frac{3-u_n}{3(u_n-3)}$$
$$=\frac{-\cancel{(u_n-3)}}{3\cancel{(u_n-3)}} \quad \text{(simplification)}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

À propos de la simplification : écrit le 20-10-2021

$3-x$ est l'opposé de $x-3$

$$\frac{3-x}{3(x-3)}=\frac{-\cancel{(x-3)}}{3\cancel{(x-3)}}$$

$$-\frac{1}{3}$$

• **Déduisons-en que la suite (v_n) est arithmétique.**

On a démontré que $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}-v_n=-\dfrac{1}{3}$ (la différence est un nombre fixe qui ne dépend pas de *n*) donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=-\dfrac{1}{3}$.

Point-méthode :
On retiendra le point suivant pour démontrer qu'une suite est arithmétique.
On utilise une méthode de différence.

3°)

a) **Exprimons v_n en fonction de *n*.**

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{n}{3}$ (formule donnant le terme explicite d'une suite arithmétique : $v_n=v_0+nr$)

b) **Exprimons u_n en fonction de *n*.**

On a $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$ donc $u_n-3=\dfrac{1}{v_n}$ d'où $u_n=\dfrac{1}{v_n}+3$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{1}{v_n}+3$$
$$=\frac{1}{-\frac{1}{4}-\frac{n}{3}}+3$$
$$=\frac{1}{-\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{3}\right)}+3$$
$$=\frac{1}{-\frac{3+4n}{12}}+3$$
$$=-\frac{12}{3+4n}+3$$
$$=\frac{9+12n-12}{3+4n}$$
$$=\frac{12n-3}{3+4n}$$

On teste la formule obtenue pour $n=0$ (calcul mental).

On doit savoir refaire l'exercice dans la version suivante où les questions sont moins détaillées.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=-1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ (on admettra que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n\neq 3$).

1°) Calculer v_0.
2°) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
3°) Exprimer v_n en fonction de *n* ; en déduire u_n en fonction de *n* (sous la forme d'un seul quotient).

Dans cette version, il faudra penser dans la question 2°) à employer la méthode de la différence.

$\boxed{10}$ (u_n) $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\dfrac{-3u_n-1}{2u_n}\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+1}$ (on admet que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\neq -1$)

1°) **Calculons v_0.**

$$v_0=\frac{2u_0+1}{u_0+1}=\frac{3}{2}$$

2°) **Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.**

Pour cela, exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+1}=\frac{2\times\frac{-3u_n-1}{2u_n}+1}{\frac{-3u_n-1}{2u_n}+1}=\frac{\frac{-6u_n-2+2u_n}{2u_n}}{\frac{-3u_n-1+2u_n}{2u_n}}=\frac{\frac{-4u_n-2}{2u_n}}{\frac{-u_n-1}{2u_n}}=\frac{-4u_n-2}{-u_n-1}=2\frac{2u_n+1}{u_n+1}=2v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q=2$.

3°) **Exprimons v_n en fonction de *n*.**

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{3}{2}\times 2^n$ (on peut aussi écrire $v_n=3\times 2^{n-1}$)

4°) **Exprimons u_n en fonction de *n*.**

On a $v_n(u_n+1)=2u_n+1$ donc $v_nu_n+v_n=2u_n+1$ d'où $v_nu_n-2u_n=1-v_n$ soit $u_n(v_n-2)=1-v_n$

Donc $u_n=\frac{1-v_n}{v_n-2}$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{1-v_n}{v_n-2}=\frac{1-\frac{3}{2}\times 2^n}{\frac{3}{2}\times 2^n-2}=\frac{2\times\left(1-\frac{3}{2}\times 2^n\right)}{2\times\left(\frac{3}{2}\times 2^n-2\right)}=\frac{2-3\times 2^n}{3\times 2^n-4}$.

Autre technique (maladroite) : $u_n=\frac{1-v_n}{v_n-2}=\frac{1-\frac{3}{2}\times 2^n}{\frac{3}{2}\times 2^n-2}=\frac{2-3\times 2^n}{2}\times\frac{2}{3\times 2^n-4}=\frac{2-3\times 2^n}{3\times 2^n-4}$

On teste la formule obtenue pour $n=0$ (calcul mental).

Autre forme possible :

$u_n=\dfrac{1-3\times 2^{n-1}}{3\times 2^{n-1}-2}$ (un tel résultat est tout à fait acceptable)

Dans les exercices $\boxed{11}$, $\boxed{12}$, $\boxed{13}$, on applique les **formules sommatoires** du cours.
Tirer les traits de fraction à la règle.

$\boxed{11}$ $S=u_1+u_2+...+u_{20}=20\times\dfrac{u_1+u_{20}}{2}=20\times\dfrac{-2+\left(-2+19\times 3\right)}{2}=10\times 53=530$

Solution détaillée :

(u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1=-2$ et de raison $r=3$

Calculons la somme $S=u_1+u_2+...+u_{20}$.

1ère méthode :

On calcule tous les termes de u_1 à u_{20}.

2e méthode :

On applique la formule donnant l'expression d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\begin{aligned}S&=u_1+u_2+...+u_{20}\\&=20\times\frac{u_1+u_{20}}{2}\\&=20\times\frac{-2+\left(-2+19\times 3\right)}{2}\quad *\\&=20\times\frac{53}{2}\\&=10\times 53\\&=530\end{aligned}$$

* On peut aussi calculer à part u_{20}.

$$\begin{aligned}u_{20}&=-2+\left(20-1\right)\times 3\\&=-2+19\times 3\\&=55\end{aligned}$$

3e méthode :
On utilise la commande de calcul d'une somme de la calculatrice.

$$\sum_{\mathrm{K}=1}^{20}\left(-2+\left(\mathrm{K}-1\right)*3\right)$$

$\boxed{12}$ $S=-15\ 453$

Attention à la syntaxe : $S=101\times\left(-153\right)$

Attention erreur de syntaxe s'il n'y a pas les parenthèses.

Solution détaillée :

(u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=-3$ et de raison $r=-2$
Calculons la somme $S=u_{25}+u_{26}+...+u_{125}$.

$$\begin{aligned}u_{25}&=u_0+25r\\&=-3+25\times(-2)\\&=-3-50\\&=-53\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}u_{125}&=u_0+125r\\&=-3+125\times(-2)\\&=-3-250\\&=-253\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=u_{25}+u_{26}+...+u_{125}\\&=101\times\frac{u_{25}+u_{125}}{2}\\&=101\times\frac{-53-253}{2}\\&=101\times(-153)\\&=-15\ 453\end{aligned}$$

On peut aussi écrire : $S=\displaystyle\sum_{k=25}^{k=125}u_k$.

$\boxed{13}$ **Solution détaillée :**

(u_n) : suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1=-2$ et de raison $q=3$

1°) **Exprimons u_n en fonction de n.**

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=u_1\times q^{n-1}$ (on peut, si on le désire, se référer à la formule $u_n=u_p\times q^{n-p}$)

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=-2\times 3^{n-1}$

2°) **Calculons la somme $S=u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$.**

On applique la formule sommatoire pour les termes consécutifs d'une suite géométrique (on ne va pas calculer tous les termes).

On peut écrire : $S=\sum_{k=1}^{k=7}u_k$.

$$S=\left(1^{\text{er}}\text{ terme}\right)\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\quad\text{ou}\quad S=\left(1^{\text{er}}\text{ terme}\right)\times\frac{q^{\text{nombre de termes}}-1}{q-1}$$

$\begin{aligned}&=-2\times\frac{q^7-1}{q-1}\\&=-2\times\frac{3^7-1}{3-1}\\&=-\cancel{2}\times\frac{2186}{\cancel{2}}\\&=-2186\end{aligned}$	$\begin{aligned}&=-2\times\frac{1-q^7}{1-q}\\&=-2\times\frac{1-3^7}{1-3}\\&=-2\times\left(\frac{-2186}{-2}\right)\\&=-2186\end{aligned}$

$\boxed{14}$ On introduit la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_1=1$ et de raison 2.

On cherche n tel que $u_n=47$. On trouve $n=24$.

On peut donc écrire : $\text{A}=u_1+u_2+\ldots+u_{24}=24\times\frac{u_1+u_{24}}{2}=24\times\frac{1+47}{2}=576$.

Solution détaillée :

Calculons la somme $\mathbf{A=1+3+5+\ldots+47}$.

1ère méthode :

On calcule directement la somme (éventuellement en utilisant la calculatrice). Cette méthode est faisable car on a un petit nombre de termes.

2e méthode :

On introduit la suite (u_n) arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1=1$ et de raison 2.

[On peut aussi introduire la suite (u_n) arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=1$ et de raison 2.]

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n&=u_1+(n-1)\times 2\\&=1+2(n-1)\\&=2n-1\end{aligned}$$

On cherche $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $u_n=47\quad(1)$.

$(1)\ \Leftrightarrow\ u_1+(n-1)\times 2=47$ à enlever

$(1)\ \Leftrightarrow\ 1+(n-1)\times 2=47$ à enlever

$\Leftrightarrow\ 2n-1=47$

$\Leftrightarrow\ 2n=48$

$\Leftrightarrow\ n=24$

On écrit : $\text{A}=u_1+u_2+\ldots+u_{24}$ (phase de réécriture de la somme à l'aide de la suite (u_n) fondamentale).

Il est possible d'écrire directement cette égalité sans résoudre l'équation (1).

$$\begin{aligned}\text{A}&=24\times\frac{u_1+u_{24}}{2}\\&=24\times\frac{1+47}{2}\\&=24\times 24\\&=576\end{aligned}$$

3e méthode : écriture d'une formule avec le symbole Σ puis utilisation de la calculatrice

Il est possible d'écrire la somme avec le symbole Σ.

On réfléchit sur l'écriture générique des termes de la somme. Les termes de la somme sont de la forme $2k+1$ ou $2k-1$ avec k entier naturel. Il s'agit de l'écriture générique d'un entier impair. On réfléchit ensuite sur les bornes de la somme.

Par exemple, on peut écrire $\text{A}=\sum_{k=0}^{k=23}(2k+1)$ ou $\text{A}=\sum_{k=1}^{k=24}(2k-1)$.

On utilise ensuite la commande de calculatrice d'une somme de la calculatrice.

$\boxed{15}$ **Solution détaillée :**

Calculons la somme $\mathbf{B=1,05+1,05^2+\ldots+1,05^{10}}$.

1ère méthode :

On calcule directement la somme en utilisant la calculatrice.

2e méthode :

On observe que B est la somme des puissances consécutives de 1,05 avec exposant allant de 1 à 10.

On sait que les puissances consécutives d'un même nombre d'exposants entiers forment une suite géométrique.

Ici il s'agit d'une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 1,05 (attention, ici la raison est égale au premier terme).

Il est inutile d'introduire une suite (u_n). On peut cependant le faire si on est plus à l'aise.

$$B = 1{,}05 \times \frac{1{,}05^{10} - 1}{1{,}05 - 1} \quad \text{(la somme comprend 10 termes)}$$

$$= 1{,}05 \times \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}$$

$$= \frac{1{,}05}{0{,}05}\left(1{,}05^{10} - 1\right)$$

$$= 21 \times \left(1{,}05^{10} - 1\right)$$

$$= 13{,}206787162326282 \quad \text{(résultat exact obtenu avec Python)}$$

Plus maladroit :

$$B = 1{,}05 \times \frac{1 - 1{,}05^{10}}{1 - 1{,}05} \quad \text{(la somme comprend 10 termes)}$$

$$B = 1{,}05 \times \frac{1 - 1{,}05^{10}}{-0{,}05}$$

$$B = \frac{1{,}05}{-0{,}05}\left(1 - 1{,}05^{10}\right)$$

$$B = 21 \times \left(1{,}05^{10} - 1\right)$$

On peut laisser le résultat sous cette forme (valeur exacte) ou en donner une valeur approchée.
On peut donne par calcul mental une valeur approchée de B en utilisant la formule classique de meilleure approximation affine de la puissance d'un nombre proche de 1 :

Étant donné un réel quelconque fixé α, pour h proche de 0, le réel $(1+h)^{\alpha}$ est peu différent de $1+\alpha h$.

$$(1+h)^{\alpha} \underset{\text{pour } h \text{ proche de } 0}{\approx} 1+\alpha h$$

On peut facilement expliquer le résultat pour $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ etc.

On l'applique ici pour $h = 0{,}05$ et $\alpha = 10$.

$$1{,}05^{10} = (1+0{,}05)^{10}$$

Comme 0,05 est proche de 0, $1{,}05^{10}$ est proche de $1 + 10 \times 0{,}05 = 1{,}5$.

$\boxed{16}$ Solution détaillée :

Calculons la somme *S* de tous les entiers naturels pairs jusqu'à 1000.

Écriture en extension de la somme : $S = 0+2+4+\ldots+1000$.

Il s'agit de trouver une formule sommatoire.

1ère méthode : utilisation d'une suite arithmétique

On introduit la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison 2.

Cherchons n tel que $u_n = 1000 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow u_0 + n \times 2 = 1000\\ &\Leftrightarrow 2n = 1000\\ &\Leftrightarrow n = 500\end{aligned}$$

On écrit : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{500}$.

$$S = 501 \times \frac{u_0 + u_{500}}{2}$$

$$= 501 \times 500$$

$$= 250\,500$$

2e méthode :

$$S = 0+2+4+\ldots+1000$$

On factorise par 2 la somme.

$$S = 2(1+2+\ldots+500)$$

On utilise la formule sommatoire qui donne la somme de tous les entiers naturels jusqu'à n.

$$\boxed{1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

Donc $S = \cancel{2} \times \dfrac{500 \times (500+1)}{\cancel{2}}$
$= 500 \times 501$
$= 250500$

N.B. : La somme peut s'écrire sous la forme $S = \sum_{k=1}^{k=500} (2k)$.

17 **Solution détaillée :**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 2^{n+1}$

Déterminons la nature de la suite (u_n).

On peut éventuellement calculer les premiers termes pour avoir une idée de la réponse.

Pour démontrer le résultat, on transforme le terme général.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= 2^n + 2^n \times 2 \\ &= 2^n \times (1+2) \\ &= 3 \times 2^n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

18 **Solution détaillée :**

$u_0 = 5$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4} u_n$

Déterminons la nature de la suite (u_n).

On peut éventuellement calculer les premiers termes pour avoir une idée de la réponse.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} &= u_n - \frac{1}{4} u_n \\ &= u_n \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Le lundi 8 novembre 2021

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n$

Cette relation exprime que chaque terme sauf le premier est égal au précédent multiplié par $\frac{3}{4}$ (langage naturel).

Quand vous prenez un terme et que vous le multipliez par $\frac{3}{4}$, vous obtenez le suivant.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}. \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

19

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$

Déterminons une expression simplifiée de S_n.

Cet exercice donne un exemple de suite définie par une somme.

Il s'agit d'un exercice sans formule.

On peut rentrer la suite sur la calculatrice $\mathrm{Y1} = \displaystyle\sum_{\mathrm{K}=0}^{\mathrm{X}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}} + \sqrt{\mathrm{K}+1}}$.

On obtient un tableau de valeurs permettant d'obtenir les valeurs exactes pour les premières valeurs de *n*.

On peut aisément conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sqrt{n+1} - 1$.

On raisonne sur le terme générique de la somme en le transformant.

Pour démontrer ce résultat (cette formule), on travaille sur le terme général.

1ère étape : On s'occupe du terme général de la somme.

On laisse tomber la somme et on considère le terme général de la somme.

On pose $u_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ pour $k \geqslant 1$.

C'est le terme général de la somme. On s'occupe de ce terme. On va le transformer car on voit qu'on ne peut rien faire.

La suite (u_k) n'est ni arithmétique ni géométrique. Il n'y a donc pas de formule dans le cours que l'on puisse appliquer.

Quelques mots clefs :
- quantité conjuguée
- identité remarquable
- télescopage

L'expression de u_k fait intervenir des racines carrées au dénominateur.
On va faire en sorte d'éliminer la racine carrée au dénominateur en appliquant la technique classique de la quantité conjuguée.

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad u_k=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}\right)^2-\left(\sqrt{k}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k}$$

$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ (l'inverse de $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$ est égal au conjugué au sens des racines carrées – pas des complexes ! – de $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$).

2[e] étape : On reprend la somme.

On observe que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k$ (réécriture indispensable).

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ (utilisation de la quantité conjuguée du dénominateur)

$$=\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\ldots+\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}$$

Les termes s'annulent 2 à 2.
On parle de télescopage ou de simplification en dominos.

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{n+1}$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

On a obtenu une formule sommatoire simple de S_n.
On observe une simplification en cascade ou en dominos.
Cette méthode est appelée méthode du télescopage.
Une manière plus visuelle consiste à écrire les termes les uns en dessous des autres et à les barrer.
Les logiciels de calcul permettent de simplifier (réduire) de telles sommes.
Il semble cependant que le logiciel XCas ne parvient pas à trouver l'expression simplifiée de notre somme.

Question supplémentaire :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $S_n=\sqrt{n+1}-1$.

20

Cet exercice donne un exemple de suite définie par une somme.

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\qquad(n\geqslant 1)$$

S_n est la somme des $\frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à n.

Il s'agit d'un exemple de suite définie par une somme.

Il s'agit d'un exercice sans formule.

1°) Calculons S_1, S_2, S_3 « à la main ».

Objectif : calculer une somme « à la main » (comprendre l'utilisation du symbole Σ)

$$S_1=\sum_{k=1}^{k=1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}=1$$

$S_2=\sum_{k=1}^{k=2}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ($S_2=$ somme des $\frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à 2)

$S_3=\sum_{k=1}^{k=3}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ ($S_3=$ somme des $\frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à 3)

2°) Calculons S_{50} et S_{100} à l'aide de la calculatrice.

Le lundi 8 novembre 2021

Calculer une somme sur Numworks :

Aller dans : somme ⇒ boîte à outil → analyse

$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{i}\right)$ exemple ⇒ $S_{50}=\sum_{i=1}^{50}\left(\frac{1}{i}\right)\approx 4{,}99$

On tape directement les sommes à l'écran. C'est beaucoup plus rapide que de rentrer la suite.

$S_{50}=4{,}49920533\ldots$

$S_{100}=5{,}18737751\ldots$

Sur TI 83 bleue

somme(suite(1/K, K, 1, 100))

Sur TI-83 CE Premium ou TI-83 Plus.fr

Pour faire une somme sur TI 83 premium CE

On tape sur la touche $\boxed{\text{2nde}}$ puis sur la touche $\frac{\square}{\square}$.

On peut aussi faire $\boxed{\text{math}}$ puis MATH , 0 : summation $\sum($ $\boxed{\text{entrer}}$ .Taper dans les carrés $\sum_{K=1}^{50}(1/K)$ puis

$\boxed{\text{entrer}}$.

Sur TI-nSpire

On obtient le résultat sous forme d'une fraction.

S_{50} affichage : 4,499205338

S_{100} affichage : 5,187377518

Il s'agit de valeurs approchées.
Tous les termes de la suite sont des rationnels.

On ne peut écrire $S_{50}=4,499205338$ mais $S_{50}=4,49920533....$

On peut rentrer la suite : u_n = somme des $\frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à n

Mode suite.

TI-83 bleue $u(n)=\text{somme}(\text{suite}(1/\text{K},\text{K},1,n))$

TI-83 Plus.fr et TI-83 Premium $u(n)=\sum_{\text{K}=1}^{n}(1/\text{K})$

Ensuite, on va dans le tableau de valeurs $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{graphe}}$.
Auto ou Dém

3°) Déterminons le sens de variation de la suite (S_n).

Il y a deux méthodes.

1ère méthode : méthode directe (mieux car plus courte)

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}$$

Comme $\frac{1}{n+1}>0$, on en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_{n+1}>S_n$.
Donc la suite (S_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

2e méthode : par différence (possible mais un peu plus longue)

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_{n+1}-S_n=\left(\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\cancel{\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\right)}+\frac{1}{n+1}-\cancel{\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\right)} \quad (k \text{ : variable muette})$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_{n+1}-S_n>0$ donc la suite (S_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

Remarque : La suite (S_n) tend vers + ∞. La suite va lentement.

$\boxed{21}$ **Situations concrètes**

Attention, u_n est un nombre d'habitants en milliers.

$10000=10\times1000$ donc $u_0=10$

1°) On est dans une situation d'augmentation constante en quantité. Le modèle correspondant est celui d'une suite arithmétique.
L'information « chaque année, la ville gagne 100 habitants » permet d'écrire la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=u_n+0{,}1$.

$100=0{,}1\times1000$

La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0=10$ et de raison 0,1.

2°) On est dans une situation d'augmentation constante en pourcentage. Le modèle correspondant est celui d'une suite géométrique.
Le pourcentage de 5 % exprime l'augmentation entre deux années consécutives.
Il s'applique toujours sur la valeur de l'année précédente.

Pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, il y a deux méthodes.

1ère méthode :

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est égal à 1,05 $\left(1+\frac{5}{100}=1{,}05\right)$ ce qui permet d'écrire la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=1{,}05u_n$.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05.

On écrit toujours les coefficients multiplicateurs sous forme décimale.

2^e^ méthode :

On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} u_n$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1{,}05 u_n$ ce qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3°) Les informations « 2 % des habitants migrent vers une grande ville » et « chaque année, 50 nouveaux habitants arrivent » permettent d'écrire la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0{,}98 u_n + 0{,}05$.
La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique (relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$ où a et b sont deux réels).

Pour une suite arithmético-géométrique, on ne parle pas de raison.

$\boxed{22}$

On s'intéresse à la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = \mathrm{e}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln u_n$.

On se demande si cette suite est définie sur $\mathbb{N}$.

On peut utiliser la calculatrice de deux manières :
- rentrer la suite dans la calculatrice ;
- utiliser la touche Ans.

On calcule les premiers termes.

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln u_0 \\ &= \ln \mathrm{e} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \ln u_1 \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En revanche, on est bloqué pour u_3. Il n'est pas possible de calculer u_3 car 0 n'a pas de logarithme népérien.

Il n'est pas possible de calculer u_3 car 0 n'a pas d'image par la fonction logarithme népérien.

La suite (u_n) n'est donc pas définie sur $\mathbb{N}$.

On peut aussi rentrer la suite dans la calculatrice. À partir de l'indice 3, un message d'erreur apparaît dans le tableau de valeurs.

- On peut dire que la suite (u_n) est finie.

Elle est définie sur l'intervalle d'entiers $[\![0\,;2]\!]$.

- On ne dit pas qu'elle est bornée.

Le lundi 8 novembre 2021

$u_0 = 100$ méthode Ans

message : unreal

ln(ln(ln(ln())))

Ce qui me plaît dans cet affichage.
On comprend bien ce qu'est une suite définie par récurrence, à savoir les termes sont les images de u_0 par les itérées de *f*.
ITÉRÉ « itérer » (réitérer en français)

Allitérations

En mathématiques, les itérées d'une fonction *f* désignent *f*, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ …

$u_1 = f(u_0)$, $u_2 = (f \circ f)(u_0)$, $u_3 = (f \circ f \circ f)(u_0)$

$$u_n = \Big(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}\Big)(u_0)$$

verbe itérer : vient du latin eo, is, ire : aller
iter : la route

« Ite missa est »

$\boxed{23}$ **Méthode de dichotomie et suites**

n	u_n	v_n	c_n	$f(c_n)$	Signe de $f(c_n)$
0	1	2	1,5	– 0,125	–
1	1	1,5	1,25	0,609375	+
2	1,25	1,5	1,375	0,291015625	+
3	1,375	1,5	1,4375	0,09547265625	+
4	1,4375	1,5	1,46875	– 0,011199951171875	–
5	1,4375	1,46875	1,453125	0,0431931713867138671875	+

$u_0 = 1$ et $v_0 = 2$

On calcule $c_0 = 1{,}5$ puis $f\left(c_0\right)$.

Comme $f\left(c_0\right) \leqslant 0$ donc $u_1 = u_0 = 1$ et $v_1 = c_0 = 1{,}5$.

On calcule $c_1 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = 1{,}25$ puis $f\left(c_1\right)$. On observe que le résultat est strictement positif.

Donc $u_2 = c_1 = 1{,}25$ et $v_2 = v_1 = 1{,}5$.

On peut démontrer que les suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont respectivement croissante et décroissante.

Proposition d'algorithme (Côme de Solère, T1 spécialité le 3 novembre 2020)

$u \leftarrow 5$

$v \leftarrow 5$

Pour i allant de 1 à n **Faire**

  $c \leftarrow \dfrac{u+v}{2}$

  Si $-c^3 + c^2 + 1 > 0$

    Alors $u \leftarrow c$

  …………… Sinon $v \leftarrow c$

  FinSi

FinPour

Programme Simon Nougué

```python
def dichotomie(n):
    u = int(input("saisir la borne inférieure"))
    v = int(input("saisir la borne supérieure"))
    for i  in range(n+1):
        c = (u+v)/2
    y = -c ** 3 + c ** 2 + 1
    print("étape = ",i,
        "borne inférieure = ",u,
        "borne supérieure = ",v,
        "milieu = ",c,
        "f(c)",y)
        if 0 < y:
            u = c
        elif 0 > y:
            v = c
        elif y == 0:
            break
```

24

$\left(u_n\right)$: suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \left(u_n\right)^3 - 3u_n$

Déterminons les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $\left(u_n\right)$ est constante.

La définition d'une suite constante est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$$

Cette définition n'est pas exploitable ici.

On va utiliser une propriété du cours qui s'applique à une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

On introduit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$. Il s'agit de la fonction associée à la suite de sorte que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

IV. Sens de variation d'une suite

5°) Propriété sur les suites constantes

Énoncé :

> Soit f une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$.
> On suppose que D est stable par f.
> Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in D$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.
> La suite $\left(u_n\right)$ est constante si et seulement si $f\left(u_0\right) = u_0$.

Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est évidemment stable par f.

La propriété du cours dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(u_n\right)$ soit constante est que $u_0 = f\left(u_0\right)$ soit $u_0 = \left(u_0\right)^3 - 3u_0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \left(u_0\right)^3 - 4u_0 = 0$

$\Leftrightarrow u_0\left[\left(u_0\right)^2 - 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow u_0 = 0$ ou $u_0 = 2$ ou $u_0 = -2$

Les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $\left(u_n\right)$ est constante sont 0, 2 et – 2.

① On peut directement pour que (u_n) soit constante, il faut et il suffit que $u_0 = (u_0)^3 - 3u_0 \quad (1)$ sans introduire une fonction *f*.

② On peut aussi directement écrire que pour que (u_n) soit constante, il faut et il suffit que u_0 soit solution de l'équation $x = x^3 - 3x \quad (1)$ [sans introduire une fonction *f*].

$\boxed{25}$

1er cas :

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$ pour tout entier naturel n

On cherche une formule explicite de u_n en fonction de n.

On calcule les premiers termes de la suite pour avoir une idée.

$u_1 = 3^2$ (on laisse sous cette forme)

$u_2 = \left(3^2\right)^2 = 3^{2\times 2} = 3^{\left(2^2\right)}$ (on laisse sous cette forme)

$u_3 = \left(3^{\left(2^2\right)}\right)^2 = 3^{2^2\times 2} = 3^{\left(2^3\right)}$ (on laisse sous cette forme) etc.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^{\left(2^n\right)}$.

On peut ensuite démontrer ce résultat par récurrence.

2e cas :

(u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

On cherche une formule explicite de u_n en fonction de n.

On calcule les premiers termes de la suite pour avoir une idée.

$u_1 = 1$ (par hypothèse dans la définition de la suite (u_n))

$u_2 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{1}$ (on laisse sous cette forme)

$u_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{\frac{1}{1}}{2} = \dfrac{1}{1\times 2}$ (on laisse sous cette forme)

$u_4 = \dfrac{u_3}{3} = \dfrac{\frac{1}{1\times 2}}{3} = \dfrac{1}{1\times 2\times 3}$ (on laisse sous cette forme)

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$.

La formule fonctionne pour $n \geqslant 1$ car $(1-1)! = 0! = 1$.

On peut ensuite démontrer ce résultat par récurrence.

$\boxed{26}$

1er cas :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n\, 2^{3n} \times 2$$
$$= (-1)^n \times 8^n \times 2$$
$$= (-8)^n \times 2$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison – 8 et de premier terme 2.

2e cas :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n \times 3^{2n} \times 3^{-1}$$
$$= (-1)^n \times 9^n \times \frac{1}{3}$$
$$= (-9)^n \times \frac{1}{3}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison – 9 et de premier terme $\dfrac{1}{3}$.

3e cas :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathrm{e}^{3n-1}$$
$$= \mathrm{e}^{3n} \times \mathrm{e}^{-1}$$
$$= \left(\mathrm{e}^3\right)^n \times \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison e^3 et de premier terme $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

27

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(3^k - 1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} 3^k - \sum_{k=0}^{k=n} 1$$

$$= \frac{3^{n+1}-1}{3-1} - (n+1)$$

$$= \frac{3^{n+1}-1-2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3^{n+1}-2n-3}{2}$$

On teste la formule pour $n=0$.

Fiche sur symbole sigma « Les deux formules sont équivalentes ».

28

Exercice écrit le 30-11-2020

1ère méthode :

On transforme $3^{2k-1} = 3^{2k} \times 3^{-1} = \left(3^2\right)^k \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 9^k$.

On utilise ensuite les propriétés du symbole Σ.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 3^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(9^k \times \frac{1}{3}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3} \times 9^k\right)$$

$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n} 9^k$ (la constante $\frac{1}{3}$ ne dépend pas de k, on peut la sortir devant la somme ; il s'agit en fait d'une factorisation)

$= \frac{1}{3} \times \frac{9^{n+1}-1}{8}$ (on applique la formule $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q \neq 1$)

$$= \frac{9^{n+1}-1}{24}$$

On peut facilement tester la formule obtenue pour $n=0$.

On a $\frac{9^{0+1}-1}{24} = \frac{9-1}{24} = \frac{1}{3}$.

Or $S_0 = \sum_{k=0}^{k=0} 3^{2k-1} = 3^{2\times 0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

On obtient bien le même résultat.

$\sum_{k=0}^{k=n} \left(3^k \times 2^k\right)$ on ne peut pas séparer

2e méthode :

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 3^{2n-1}$.

On dit ensuite que (u_n) est une suite géométrique de raison 9.
On applique la formule donnant l'expression simplifiée de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

29

$$S = \sum_{k=0}^{k=100} \sqrt{k}$$

$$S = \underbrace{\sqrt{0}}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100}$$

Il n'y a pas de formule pour calculer la somme c'est-à-dire pour trouver une formule simplifiée.

671.4629

30

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 3n^2$.

Démontrer que la suite (u_n) est majorée. Donner trois majorants de la suite.

Le 6-11-2023

Qu'est-ce qu'un majorant d'une suite ?

Baptiste Estadieu le 6-11-2023 élève de Terminale spécialité année scolaire 2023-2024

« Un chiffre que la suite elle peut pas dépasser »
« Une valeur que la suite elle peut pas dépasser »

bonne formulation :

nombre M tel que tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à M

une piste pour trouver : Représenter la suite sur la calculatrice.

On travaille avec des inégalités.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -3n^2 \leqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5-3n^2 \leqslant 5$
soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 5$

On en déduit que 5 est un majorant de (u_n).
5 est le « meilleur » majorant. C'est le maximum de l'ensemble des valeurs de la suite.

6, 7 … 2023 sont aussi des majorants de la suite.
On trouve d'autres majorants en prenant n'importe quel nombre supérieur ou égal à 5.
Il y a une infinité de majorants.

2π, 10^5, 10^{2023} sont des majorants de la suite.
Les majorants de la suite sont tous les nombres de l'intervalle $[5\,;+\infty[$.

Ici, 5 est un majorant « évident » (d'après l'expression $5-\underbrace{3n^2}_{\text{positif}}$).

On retire à 5 quelque chose de positif.

On met de côté le sens de variation et les limites.

$\boxed{\textbf{31}}$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\sqrt{n}-4$.

Démontrer que la suite (u_n) est minorée. Donner trois minorants de la suite.

– 4 est un minorant évident.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2\sqrt{n} \geqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2\sqrt{n}-4 \geqslant -4$
soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant -4$

On en déduit que – 4 est un minorant de (u_n).

– 5, – 6, – 7 sont aussi des minorants de la suite.

$\boxed{\textbf{32}}$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1-\dfrac{2}{n}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

On écrit le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On n'est pas obligé d'écrire le meilleur encadrement possible mais il est plus logique de procéder ainsi.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

On multiplie ensuite chaque membre de cet encadrement par – 2.
Comme – 2 est un réel strictement positif, le sens des inégalités est renversé.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 > -\dfrac{2}{n} \geqslant -2$ soit $-2 \leqslant -\dfrac{2}{n} < 0$.

On ajoute 1 à chaque membre de cet encadrement.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant 1-\dfrac{2}{n} < 1$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant u_n < 1$.

On en déduit l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant u_n \leqslant 1$ qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est bornée (on peut rajouter, mais ce n'est pas obligatoire « entre – 1 et 1 »).

On met de côté le sens de variation et les limites.

$\boxed{\textbf{33}}$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Minorant 0 : évident (quotient de deux réels positifs).
Majorant 1 : quotient de deux réels avec numérateur inférieur au dénominateur positif.
On en déduit que la suite (u_n) est bornée (on peut rajouter, mais ce n'est pas obligatoire « entre 0 et 1 »).

On a en fait $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n < 1$. L'inégalité de droite est stricte (le 1 n'est jamais atteint) mais on s'en fiche ici.

Il est possible de démontrer par le calcul que 1 est un majorant : $1-u_n = 1-\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

On met de côté le sens de variation et les limites.

34

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2+1 \geqslant 1$.

Par passage à l'inverse, on a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \dfrac{1}{n^2+1} \leqslant 1$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

On en déduit l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

On en déduit que la suite (u_n) est bornée (on peut rajouter, mais ce n'est pas obligatoire « entre 0 et 1 »).

35

(u_n) $u_0 = 4$

$u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier naturel n.

Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui donne en sortie a valeur de u_n.

Proposer une version fonction de ce programme.

Écrire une fonction Python d'en-tête `def terme(n):` qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

Solution :

On utilise une seule variable u et une boucle for.
Pour calculer u_n, on doit effectuer n calculs. On doit donc effectuer une boucle avec n itérations.
Le tiret du bas _ évite d'introduire une variable de boucle.
On a une étape d'initialisation.

```
n=int(input('Entrer l'indice'))
for i in range (n) :
      u=2*u-4
print (u)
```

Pour la première instruction, attention à mettre le bon nombre de parenthèses.
Attention à la place de l'instruction print : hors ou dans la boucle.

```
def terme(n):
    u=4
    for _ in range(n):
       u=2*u-3
    return u
```