

Dans tous les exercices, on veillera à respecter scrupuleusement le protocole des récurrences.

**1** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 0$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq u_n < 4$ .

On rappelle ci-dessous les **étapes à respecter**. On recopiera ce qui suit (ne rien écrire sur cette feuille).

**Début :**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : « ..... ».

**Initialisation :**

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.  
.....

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k \geq 0$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie c'est-à-dire .....

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie c'est-à-dire.....

**Conclusion :**

On a démontré que  $P(0)$  est vraie et que si  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k \geq 0$ , alors  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

**2** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 4$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$ .

**3** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = \frac{1}{4}$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n)^2 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < 1$ .

**4** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = (n+1)^2$ .

**5** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 0$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

**6** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = -1$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 3u_n + 4 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = 3^n - 2$ .

Le but des exercices **7** à **9** est de démontrer des **formules sommatoires** par récurrence.

Lire l'encadré ci-dessous avant de commencer ces trois exercices.

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$ .

Pour tout entier naturel, on pose  $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$ .

On notera que  $p$  est une variable muette. Elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre autre que  $n$  et  $u$  (ce peut être  $i$  par exemple).

On a l'égalité  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$  valable pour tout entier naturel  $n$  (relation fondamentale).

Exemples (pour comprendre) : On a  $S_0 = u_0$ ,  $S_1 = S_0 + u_1$ ,  $S_2 = S_1 + u_2$ ,  $S_3 = S_2 + u_3$  etc. .

Démonstration :

On écrit les deux sommes en extension :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$$

On comprend alors bien la relation  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ .

Autre explication :

$S_n$  = somme des termes consécutifs de  $u_0$  à  $u_n$

$S_{n+1}$  = somme des termes consécutifs de  $u_0$  à  $u_{n+1}$

On notera l'égalité  $\sum_{p=0}^{p=n+1} u_p = \left( \sum_{p=0}^{p=n} u_p \right) + u_{n+1}$  qu'il faut savoir utiliser sans difficulté.

Exemple sans suite :

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{1}{p} = \left( \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{n+1}$$

Cette propriété est utilisée en algorithmique et programmation (cf. algorithme de calcul d'une somme avec une variable qui sert à accumuler les termes).

On peut établir une relation analogue concernant le produit des termes consécutifs d'une suite.

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$ .

Pour tout entier naturel, on pose  $P_n = \prod_{p=0}^{p=n} u_p$ .

On a  $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ .

On a l'égalité  $P_{n+1} = P_n \times u_{n+1}$  valable pour tout entier naturel  $n$  (relation fondamentale).

**7** Dans cet exercice, on suppose que l'on ne connaît pas la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

**Version 1 :**

Pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $u_p = 2^p$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$ .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $S_n = 2^{n+1} - 1$ .

**Indication pour l'hérédité :** On observera que l'on a  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ .

**Version 2 :**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} 2^p$ .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $S_n = 2^{n+1} - 1$ .

**Indication pour l'hérédité :** On observera que l'on a  $S_{n+1} = S_n + \dots$

**8** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \sum_{p=0}^{p=n} p$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**9** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{p=0}^{p=n} p^3$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**10**

On rappelle la définition suivante :

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.  
On dit que  $a$  **divise**  $b$  lorsqu'il existe un entier relatif  $q$  tel que  $b = a \times q$ .

On considère l'énoncé suivant :

**Démontrer par récurrence** que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n - 1$  est divisible par 3.

La démonstration est donnée dans l'encadré ci-contre.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $4^n - 1$  est divisible par 3 ».

**Initialisation :**

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.

$$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3 \text{ donc } 4^0 - 1 \text{ est divisible par 3.}$$

On en déduit que  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie.

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

1<sup>ère</sup> façon :

Puisque  $P(k)$  est vraie, il existe un entier naturel  $q$  tel que  $4^k - 1 = 3q$  (1).

Cette dernière égalité permet donc d'écrire  $4^k = 3q + 1$  (1').

On va ensuite utiliser l'astuce  $4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1$  (car  $4^{k+1} = 4 \times 4^k$ ).

On remplace alors  $4^k$  par  $3q + 1$  en utilisant l'égalité (1') :  $4^{k+1} - 1 = 4 \times (3q + 1) - 1$ .

On obtient alors  $4^{k+1} - 1 = 12q + 3$ .

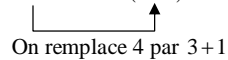
On met alors 3 en facteur dans le second membre :  $4^{k+1} - 1 = 3(4q + 1)$ .

Or  $4q + 1$  est un entier naturel donc on en déduit que  $4^{k+1} - 1$  est divisible par 3.

Par conséquent, la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

2<sup>e</sup> façon :

$$\text{On a } 4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = (3+1) \times 4^k - 1 = 3 \times 4^k + 4^k - 1.$$



Puisque  $P(k)$  est vraie (hypothèse de récurrence),  $4^k - 1$  est divisible par 3.

Or  $3 \times 4^k$  l'est aussi de manière évidente.

Donc  $4^{k+1} - 1$  est divisible par 3.

Par conséquent, la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

On en déduit que la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Commentaire :**

On peut être un peu surpris par cette récurrence car la propriété à démontrer n'est pas formulée sous la forme d'une égalité ou d'une inégalité mais sous la forme d'une phrase en français.

**Adapter la démonstration précédente pour démontrer par récurrence** que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $10^n - 1$  est divisible par 9.

**Autre méthode :**

On utilise la formule sommatoire  $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$  pour  $q \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  qui donne l'identité algébrique :

$$(q - 1)(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n - 1.$$

En appliquant cette identité pour  $q = 10$ , retrouver le résultat précédent.

**11** On considère une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [1; 5]$  dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

$x$	1	5
Variation de $f$	2	4

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  [ $f$  étant la fonction dont on donne le tableau de variations].

1°) Démontrer que l'intervalle  $I$  est stable par  $f$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que tous les termes sont dans  $I$ .

2°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n < u_{n+1}$ .

Définition [partie de  $\mathbb{R}$  stable par une fonction]

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On considère une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  incluse dans  $D$ .

On dit que  $I$  est stable par  $f$  pour exprimer que  $\forall x \in I \quad f(x) \in I$ .

Exemples :

① On considère la fonction  $f: x \mapsto x^2$ .

L'intervalle  $I = [0; 1]$  est stable par  $f$  (tout réel compris entre 0 et 1 a son image par  $f$  également comprise entre 0 et 1).

L'intervalle  $I' = [-1; 1]$  est stable par  $f$ .

② On considère la fonction  $f: x \mapsto x$ .

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est stable par  $f$ .

On peut remarquer que pour toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , l'intervalle  $I = \mathbb{R}$  est stable par  $f$ .

Contre-exemples :

① On considère la fonction  $f: x \mapsto x^2$ .

L'intervalle  $I = [0; 2]$  n'est pas stable par  $f$ .

② On considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ .

L'intervalle  $[1; +\infty[$  n'est pas stable par  $f$ .

Lorsqu'une partie n'est pas stable, on ne dit pas qu'elle est instable !

**12** À faire après avoir étudié la fonction exponentielle

On considère la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{3x}$ .

On sait que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$  a pour expression  $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$ .

**13** On considère une phrase  $P(n)$  portant sur un entier naturel  $n$  telle que, si  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  l'est également.

On suppose qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que la phrase  $P(n_0)$  soit vraie.

Quelles conclusions peut-on déduire avec certitude ?

- (1)  $P(n_0+1)$  est vraie.
- (2)  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ .
- (3)  $P(n_0-1)$  est fausse.
- (4)  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \leq n_0$ .
- (5)  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ .

**14** On considère le raisonnement suivant.

Pour  $n$  entier naturel tel que  $n \geq 2$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $n$  points quelconques du plan sont toujours alignés ».

Vérifions que la phrase  $P(2)$  est vraie.

Deux points du plan sont toujours alignés donc la phrase  $P(2)$  est vraie.

Considérons un entier naturel  $k \geq 2$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie.

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Soit  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$   $k+1$  points du plan.

D'après la phrase  $P(k)$ , les  $k$  premiers points  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  sont alignés sur une droite  $\Delta$  et de même les  $k$  points  $A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$  sont alignés sur une droite  $\Delta'$ .

Les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont confondues car elles ont les points  $A_2, A_3, \dots, A_k$  en commun.

Les  $k+1$  points  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$  sont donc alignés sur  $\Delta$ .

Par conséquent, la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

On a démontré que  $P(2)$  est vraie et que si  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k \geq 2$ , alors  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 2$ .

Ce raisonnement est évidemment faux.

Repérer la (ou les) faille(s).

**15** On considère la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

On sait que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$  a pour expression

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

**16** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\sum_{p=0}^{p=n} (p \times p!) = (n+1)! - 1$ .

**17** On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $u_0 = 3$  et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$ .

# Deux compléments utiles :

## 1. Factorielle d'un entier naturel

### • Définition :

On définit la **factorielle** d'un entier naturel  $n \geq 2$  de la manière suivante :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad (\text{on lit « factorielle de } n \text{ »}).$$

Par convention :  $0! = 1$  et  $1! = 1$ .

### • Exemple :

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

### • Autre écriture :

$$n! = \prod_{k=1}^{k=n} k$$

Il s'agit d'un cas particulier d'utilisation du symbole  $\prod$  pour désigner un produit.

### • Calculatrice :

On peut obtenir la factorielle d'un entier sur calculatrice.

Sur calculatrice TI,  $\boxed{\text{math}}$  sélectionner PROB puis 4.

Il est à noter que la calculatrice ne sait plus calculer à partir de 70 ! (dépassement de capacités).

### • Propriété immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

Cette formule permettrait de définir la factorielle d'un entier à l'aide d'une suite.

## 2. Dérivées successives d'une fonction

### Définition :

La dérivée première d'une fonction  $f$  est notée  $f'$ .

La dérivée seconde d'une fonction  $f'$  est notée  $f''$ . C'est la dérivée de  $f'$ .

La dérivée troisième d'une fonction  $f$  est notée  $f^{(3)}$ . C'est la dérivée de  $f''$ .

### Propriété :

De manière générale,  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

### Convention :

$$f^{(0)} = f$$

# Corrigé

**1** Dans la partie déductive, on procède à un « élargissement » de l'encadrement. On peut toujours élargir un encadrement mais on ne peut pas le rétrécir. On a le droit d'élargir un encadrement d'un seul côté comme c'est le cas ici.

Dans l'hérédité, on utilise la relation de récurrence qui définit la suite.

## Solution détaillée :

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que **pour tout** entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq u_n < 4$ .

**⚠** On évite d'utiliser des quantificateurs dans la récurrence.

Variante :

Démontrons par récurrence que **pour tout**  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n < 4$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $0 \leq u_n < 4$  ».

## Initialisation :

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.

On sait, d'après la définition de la suite  $u$ , que  $u_0 = 0$  (premier terme de la suite, c'est une donnée, une hypothèse).

On a donc  $0 \leq u_0 < 4$ .

D'où  $P(0)$  est vraie.

## Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $0 \leq u_k < 4$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 \leq u_{k+1} < 4$ .

On part de  $0 \leq u_k < 4$  (hypothèse de récurrence).

On applique ensuite les propriétés sur les inégalités.

En ajoutant 12 à chaque membre, on obtient  $12 \leq u_k + 12 < 16$ .

Par passage à la racine carrée, on obtient  $\sqrt{12} \leq \sqrt{u_k + 12} < \sqrt{16}$  (propriété :  $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$  pour  $a$  et  $b$

positifs ou nuls) soit  $\sqrt{12} \leq u_{k+1} < 4$ .

(autre argument possible : la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ ).

On peut éventuellement effectuer la simplification suivante :  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  grâce à la propriété fondamentale de la racine carrée d'un produit :  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  pour  $a$  et  $b$  réels positifs ou nuls quelconques. On notera cependant que cette écriture n'est d'aucune utilité ici.

Or  $0 \leq \sqrt{12}$  donc par transitivité de la relation d'ordre, on a  $0 \leq u_{k+1} < 4$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

## Rappels :

Si  $a < b$  et  $b < c$ , alors  $a < c$ .

Si  $a < b$ , alors  $a \leq b$ .

$a < b$	$a = b$	$a \leq b$ ( $a < b$ ) ou ( $a = b$ )
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

## Proposition $P$ ou $Q$

$P$	$Q$	$P$ ou $Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**La proposition «  $P$  ou  $Q$  » est vraie uniquement lorsque l'une des deux propositions au moins est vraie ; Elle est fausse lorsque les deux propositions sont fausses.**

## Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

2

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n > 1$  ».

**Initialisation :**

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

$u_0 = 4$  par hypothèse (définition de la suite) donc  $u_0 > 1$ .

D'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k > 1$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} > 1$ .

On a :  $u_k > 1$  par hypothèse de récurrence.

Par passage à la racine carrée, on a  $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$ .

Autre manière de dire :

On a  $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$  car la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

En langage parlé :

- « On rajoute les racines carrées de chaque côté ». (Pauline Sébillotte le 17-11-2021)
- « On passe à la racine carrée. »

On en déduit que  $u_{k+1} > 1$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

3

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $0 < u_n < 1$  ».

**Initialisation :**

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.

On a  $u_0 = \frac{1}{4}$  par hypothèse de définition de la suite donc  $0 < u_0 < 1$ .

D'où  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $0 < u_k < 1$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 < u_{k+1} < 1$ .

On a :  $0 < u_k < 1$  par hypothèse de récurrence.

Donc  $0^2 < (u_k)^2 < 1^2$  car la fonction « carré » est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Par suite,  $0 < u_{k+1} < 1$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

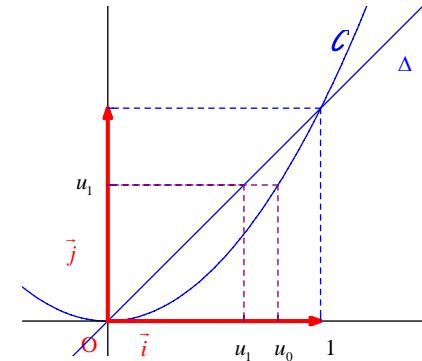
On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Pour aller plus loin : représentation graphique des premiers termes de la suite  $(u_n)$ .**

On a tracé la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = x^2$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

On applique la méthode traditionnelle (on a choisi une valeur quelconque de  $u_0$  sur l'axe des abscisses).



4

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

**Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = (n+1)^2$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n = (n+1)^2$  ».

### Initialisation :

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.

1<sup>ère</sup> méthode :

$u_0 = 1$  par hypothèse donc on peut écrire  $u_0 = (0+1)^2$ .

2<sup>e</sup> méthode :

D'une part,  $u_0 = 1$  par hypothèse.

D'autre part,  $(0+1)^2 = 1$ .

On peut donc écrire  $u_0 = (0+1)^2$ .

D'où  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k = (k+1)^2$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} = (k+2)^2$ .

On a :  $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$  (relation de récurrence).

Or par hypothèse de récurrence,  $u_k = (k+1)^2$  donc

$$u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3$$

D'où  $u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$ .

Par suite,  $u_{k+1} = k^2 + 4k + 4$ .

Donc  $u_{k+1} = (k+2)^2$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

### Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

### Remarque de méthode :

Dans la partie hérédité, on peut aussi procéder par « ajouts successifs » (ou « par habillages successifs »).

5

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n = \frac{n}{n+1}$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

1<sup>ère</sup> méthode :

$u_0 = 0$  par hypothèse donc on peut écrire  $u_0 = \frac{0}{0+1}$ .

2<sup>e</sup> méthode :

D'une part,  $u_0 = 0$  par hypothèse.

D'autre part,  $\frac{0}{0+1} = 0$ .

On peut donc écrire  $u_0 = \frac{0}{0+1}$ .

D'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k = \frac{k}{k+1}$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$  (pour écrire cela, on peut, si on veut poser  $k' = k+1$ ).

On a :  $u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k}$  (\*).

Or par hypothèse de récurrence,  $u_k = \frac{k}{k+1}$  donc en remplaçant dans l'égalité (\*), on obtient  $u_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}}$ .

D'où  $u_{k+1} = \frac{1}{\frac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}}$ .

On obtient finalement  $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.



### Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**6**

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n = 3^n - 2$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

D'une part,  $u_0 = -1$  par hypothèse (définition de la suite).

D'autre part,  $3^0 - 2 = -1$ .

On peut donc écrire  $u_0 = 3^0 - 2$  d'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k = 3^k - 2$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$ .

1<sup>ère</sup> façon :

On a :  $u_{k+1} = 3u_k + 4$ .

Or par hypothèse de récurrence,  $u_k = 3^k - 2$ .

En remplaçant, on obtient  $u_{k+1} = 3(3^k - 2) + 4$  donc  $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$ .

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

2<sup>e</sup> façon :

On part de l'égalité  $u_k = 3^k - 2$ .

On multiplie les deux membres par 3.

On obtient  $3u_k = 3^{k+1} - 6$ .

On ajoute 4 à chaque membre ce qui donne  $3u_k + 4 = 3^{k+1} - 2$  soit  $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2$ .

### Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Bilan des exercices **4** et **5**

Dans ces deux exercices, nous venons de voir que le raisonnement par récurrence est un moyen puissant pour démontrer une expression de terme générale de suite ni arithmétique, ni géométrique.

Les exercices **7**, **8**, **9** ont pour but de démontrer des **formules sommatoires** par récurrence.

L'intérêt de la démonstration par récurrence est de retrouver des formules sommatoires déjà connues mais aussi d'en découvrir d'autres.

**Cependant, appliquer la formule sommatoire sans passer par la récurrence peut-être plus rapide.**

**Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour simplifier des sommes.**

Pour démontrer par récurrence les sommes des exercices **7** et **8**, on fait comme si on ne connaissait pas les formules (à aucun moment on utilise les formules connues). On utilise juste  $P(k)$  (et le symbole  $\Sigma$ , mais ça c'est normal).

Dans les exercices **7** et **8**, il s'agit de démontrer par récurrence des formules de sommes dont on donne une expression simplifiée. Il est bien évident qu'il est beaucoup plus rapide de démontrer ces formules grâce aux formules du cours (formules sommatoires de sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique). Néanmoins, ces deux exercices n'ont d'autre but que de montrer comment on procède pour des récurrences sur des sommes. Dans l'exercice **9** nous voyons tout l'intérêt d'un raisonnement par récurrence puisque la suite  $(k^3)$  n'est ni arithmétique ni géométrique. Donc la récurrence constitue un moyen extrêmement puissant de démontrer certaines formules sommatoires.

Dans les exercices **7** et **8**, il s'agit de quelque chose qu'on connaît (de simple). Ça ne sera pas toujours aussi simple, et là, on pourra utiliser (employer) un raisonnement par récurrence.

Evidemment, on ne réservera le raisonnement par récurrence qu'à des sommes de termes consécutifs de suites qui ne sont ni arithmétiques, ni géométriques.

**7** On peut retrouver le résultat directement en utilisant la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Dans cet exercice, on doit calculer  $S_0 = u_0 = 2^0 = 1$  contrairement aux exercices précédents.

On retrouve le même genre de démarche dans les exercices suivants.

### Solution détaillée de la version 1 :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad u_p = 2^p$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$$

**Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $S_n = 2^{n+1} - 1$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $S_n = 2^{n+1} - 1$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

On commence par calculer  $S_0$ , ce qui revient à calculer  $u_0$ .

$$\text{D'une part, } S_0 = \sum_{p=0}^{p=0} u_p = u_0 = 2^0 = 1.$$

$$\text{D'autre part, } 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

On peut donc écrire  $S_0 = 2^{0+1} - 1$  d'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $S_k = 2^{k+1} - 1$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $S_{k+1} = 2^{k+2} - 1$ .

On doit montrer le passage de  $P(k)$  à  $P(k+1)$ .

$$\text{On a : } S_{k+1} = \sum_{p=0}^{p=k+1} u_p = \left( \sum_{p=0}^{p=k} u_p \right) + u_{k+1} \text{ soit } S_{k+1} = S_k + \boxed{u_{k+1}}.$$

Or par hypothèse de récurrence au « rang »  $k$ ,  
 $S_k = 2^{k+1} - 1$ .

$$\text{Donc } S_{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1.$$

Par conséquent,  $S_{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1$

$$\text{soit } S_{k+1} = 2^{k+2} - 1 \text{ (car } 2 \times 2^{k+1} = 2^1 \times 2^{k+1} = 2^{1+k+1} = 2^{k+2}).$$

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On peut donc écrire avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

### Le 21-11-2021

#### 8 Formule sommatoire donnant la somme de tous les entiers de 0 à $n$

On peut retrouver le résultat directement en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique.

Pour l'hérédité, il y a deux méthodes :

• on peut partir de  $S_{k+1} = S_k + (k+1)$ .

Cette relation traduit tout simplement que la somme de tous les entiers de 0 à  $k+1$  est égale à la somme de tous les entiers de 0 à  $k$  plus  $k+1$ .

• on peut aussi commencer par  $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$  et ajouter  $k+1$  aux deux membres.

N.B. : Contrairement à l'exercice précédent, on n'a pas défini de suite  $(u_n)$ .

#### Solution détaillée :

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} p$$

$$\text{Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel } n \text{ on a } S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Comme dans l'exercice précédent, on peut éventuellement poser  $\forall p \in \mathbb{N} \quad u_p = p$ .

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on définit la phrase } P(n) : \ll S_n = \frac{n(n+1)}{2} \gg.$$

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

$$\text{D'une part, } S_0 = \sum_{p=0}^{p=0} p = 0.$$

$$\text{D'autre part, } \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0.$$

On peut donc écrire  $S_0 = \frac{0 \times (0+1)}{2}$  d'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

$$\text{On a : } S_{k+1} = S_k + (k+1).$$

(En effet, la somme des entiers de 0 à  $k+1$  est égale à (la somme des entiers de 0 à  $k$ ) +  $(k+1)$  ; on n'a pas défini de suite contrairement à l'exercice précédent).

$$S_{k+1} = 0+1+2+\dots+(k+1)$$

$$S_k = 0+1+2+\dots+k$$

Exemple :

$$S_{100} = 0+1+2+\dots+100$$

$$S_{99} = 0+1+2+\dots+99$$

$$S_{100} = S_{99} + 100$$

Schéma pour comprendre :

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= \underbrace{S_k}_{\substack{\text{hypothèse} \\ \text{de récurrence}}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\substack{\text{utiliser l'hypothèse } u_p = p}} \\
 &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
 \end{aligned}$$

On a  $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$  par hypothèse de récurrence donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
 &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad (\text{on met au même dénominateur}) \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{on factorise})
 \end{aligned}$$

On a effectué une factorisation qui permet de réaliser le miracle de la récurrence.

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Commentaire :**

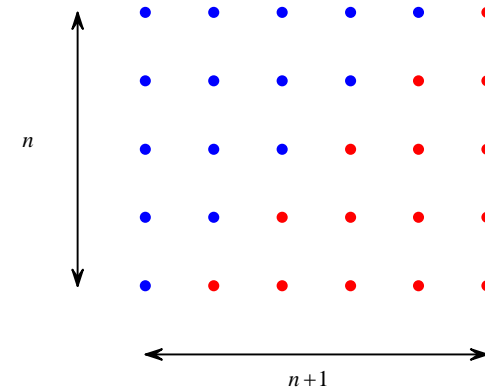
On a établi par récurrence la formule sommatoire suivante donnant la somme des cubes des entiers de 0 à  $n$  :

$$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette formule sommatoire pouvait être établie sans utiliser de récurrence en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Un logiciel de calcul formel permet de retrouver cette formule.

On peut noter qu'il existe également une « preuve sans paroles » de cette formule avec des boules.



**9** Formule sommatoire donnant la somme des cubes des entiers de 0 à  $n$

$$S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{p=0}^{p=n} p^3$$

Dans la partie « hérédité », on assiste au « miracle de la récurrence ».

**Remarque :** Il est conseillé d'apprendre par cœur le résultat :  $\sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

On peut observer que  $\sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \left( \sum_{p=0}^{p=n} p \right)^2$ .

**Solution détaillée :**

$$S_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{p=0}^{p=n} p^3$$

Comme dans les exercices précédents, on peut éventuellement introduire une suite.

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

D'une part, on a  $S_0 = \sum_{p=0}^0 p^3 = 0^3 = 0$ .

D'autre part, on a  $\frac{0^2 \times (0+1)^2}{4} = 0$ .

On en déduit que  $S_0 = \frac{0^2 \times (0+1)^2}{4}$  d'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $S_k = \frac{k^2 \times (k+1)^2}{4}$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ .

On a :  $S_{k+1} = S_k + (k+1)^3$ .

En effet, la somme des cubes des entiers de 0 à  $k+1$  est égale à :

$$\text{(la somme des cubes des entiers de 0 à } k) + (k+1)^3.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4} \quad \text{(on factorise par } (k+1)^2) \\ &= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

### Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

### Commentaire :

On a établi par récurrence la formule sommatoire suivante donnant la somme des cubes des entiers de 0 à  $n$  :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On observe que pour la somme des cubes on obtient une expression de degré 4 en  $n$  (la somme des cubes des entiers de 0 à  $n$  donne un résultat de degré 4) : si on développe l'expression du second membre, on obtient un terme  $n$  exposant 4 qui sera le terme de plus haut degré.

Dans l'exercice précédent, on a établi la formule sommatoire suivante :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En comparant les deux formules sommatoires suivantes,

$$\sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

on constate que l'on peut mettre en relation la somme des entiers de 0 à  $n$  et la somme des cubes des entiers de 0 à  $n$  de la manière suivante :

$$\sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \left( \sum_{p=0}^{p=n} p \right)^2$$

c'est-à-dire que la somme des cubes des entiers naturels de 0 à  $n$  est égale au carré de la somme des entiers de 0 à  $n$ .

Ce résultat n'est pas « logique » (au sens où il ne pouvait pas être déduit directement).

La déduction est faite à partir des formules sommatoires qui ont été établies.

### Remarques :

1. La remarque sur le degré de l'expression obtenue est généralisable :

La somme des entiers naturels de 0 à  $n$  donne une expression de degré 2.

La somme des carrés des entiers naturels de 0 à  $n$  donne une expression de degré 3.

La somme des cubes des entiers naturels de 0 à  $n$  donne une expression de degré 4.

La somme des puissances 4 des entiers naturels de 0 à  $n$  donne une expression de degré 5 etc.

2. Il n'y a pas de formule sommatoire donnant la somme des carrés, des cubes des termes consécutifs d'une suite quelconque.

Les formules trouvées sont propres aux sommes des  $n$  premiers entiers et des cubes des  $n$  premiers entiers naturels.

Dans les exercices **7**, **8**, **9**, on ne pose pas forcément  $S_n = \dots\dots\dots$ .

Les exercices peuvent être rédigés de la manière suivante :

**7** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $\sum_{p=0}^{p=n} 2^p = 2^{n+1} - 1$ .

**8** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $\sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**9** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a  $\sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

**10** **Démonstration de divisibilité par récurrence**

**Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $10^n - 1$  est divisible par 9.**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $10^n - 1$  est divisible par 9 ».

On peut aussi écrire la phrase  $P(n)$  sous la forme : «  $9/10^n - 1$  ».

**Initialisation :**

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

$10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 9$  donc  $10^0 - 1$  est divisible par 9.

On en déduit que la phrase  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $10^k - 1$  est divisible par 9.

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $10^{k+1} - 1$  est divisible par 9.

1<sup>ère</sup> façon :

2 rédactions possibles pour le début :

Puisque la phrase  $P(k)$  est vraie, il existe un entier naturel  $q$  tel que  $10^k - 1 = 9q$  (1).

Par hypothèse de récurrence,  $10^k - 1$  est divisible par 9 donc  $10^k - 1 = 9q$  (1) avec  $q$  entier naturel.

(1) permet d'écrire  $10^k = 9q + 1$  (1').

On va ensuite utiliser l'astuce  $10^{k+1} = 10 \times 10^k$  qui permet d'écrire  $10^{k+1} - 1 = 10 \times 10^k - 1$  (ligne indépendante de la précédente).

On remplace alors  $10^k$  par  $9q + 1$  [égalité (1')].

On obtient alors  $10^{k+1} - 1 = 10 \times (9q + 1) - 1 = 9 \times 10q + 9 = 9(10q + 1)$ .

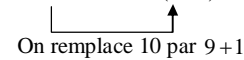
On notera que l'on met 9 en facteur dans le second membre.

Or  $10q + 1$  est un entier naturel donc on en déduit que  $10^{k+1} - 1$  est divisible par 9.

Par conséquent, la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

2<sup>e</sup> façon :

On a  $10^{k+1} - 1 = 10 \times 10^k - 1 = (9 + 1) \times 10^k - 1 = 9 \times 10^k + 10^k - 1$ .



Puisque la phrase  $P(k)$  est vraie (hypothèse de récurrence),  $10^k - 1$  est divisible par 9.

Or  $9 \times 10^k$  l'est aussi de manière évidente.

Donc  $10^{k+1} - 1$  est divisible par 9 (on utilise la propriété :  $a \mid b$  et  $a \mid c$  alors  $a \mid b + c$ ,  $a, b, c$  étant des entiers relatifs).

Par conséquent, la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

On en déduit que la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Il faut être capable de refaire le raisonnement sans indication.

**Remarque de Louis Méraud (TS1) le lundi 26-9-2016 :**

Je la retranscris telle qu'il me l'a écrite malgré quelques petites maladresses d'expression.

Un nombre écrit sous la forme  $10^n$  où  $n$  est un nombre positif non nul est une puissance de 10, à laquelle lorsque l'on soustrait 1, soit  $10^n - 1$ , alors nous obtenons un nombre exclusivement composé de 9 ; or un chiffre divise son chiffre ou un nombre composé  $n$  fois de son propre chiffre.

**Exercice personnel :**

**Démontrer par récurrence** que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{2n} - 2^n$  est divisible par 7.

Cette propriété est généralisable. On peut démontrer que si  $a$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $a^n - 1$  est divisible par  $a - 1$ .

**Autre méthode :**

On part de la formule sommatoire  $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$  pour  $q \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On obtient l'égalité :  $(1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n$ .

En multipliant les deux membres par  $-1$ , on obtient l'égalité :  $(q - 1)(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n - 1$ .

En remplaçant  $q$  par 10 dans l'égalité précédente (c'est-à-dire en faisant  $q = 10$ ), on obtient :

$(10 - 1)(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) = 10^n - 1$

soit  $9 \times (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) = 10^n - 1$

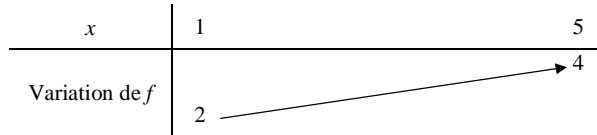
Or  $1+10+\dots+10^{n-1}$  est un entier naturel.  
 Donc on en déduit que  $10^n - 1$  est divisible par 9.

\* On peut présenter la démarche avec une flèche :

$$\begin{array}{l} (1-q)(1+q+\dots+q^{n-1})=1-q^n \\ (q-1)(1+q+\dots+q^{n-1})=q^n-1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \times (-1)$$

**11** 2°) Utiliser  $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$  d'après le tableau de variations.

**Solution détaillée :**



Rappel : La flèche du tableau de variations signifie la stricte croissance et la continuité de la fonction sur l'intervalle  $[1; 5]$ .

La continuité d'une fonction sur un intervalle peut être comprise en première lecture comme le fait que l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.  
 La notion sera travaillée dans plusieurs chapitres.

Dans tout l'exercice,  $I$  désigne l'intervalle  $[1; 5]$ .

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction  $f$  qui intervient dans la relation de récurrence est la fonction précédente.

On ne connaît pas l'expression de  $f$ .

1°) D'après le tableau de variations de  $f$ ,  $\forall x \in I \quad 2 \leq f(x) \leq 4$  donc  $\forall x \in I \quad 1 \leq f(x) \leq 5$ .

On en déduit que  $\forall x \in I \quad f(x) \in I$ .

Ainsi,  $I$  est stable par  $f$ .

$u_0 = 1$  par hypothèse (définition de la suite) donc  $u_0 \in I$ .

Un théorème du cours sur les suites permet d'affirmer que la suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I.$$

2°) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n < u_{n+1}$  ».

**Initialisation :**

Vérifions que  $P(0)$  est vraie.

On a  $u_0 = 1$  d'après la définition de la suite.

Par ailleurs,  $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ .

On ne connaît pas l'expression de  $f$  mais le tableau de variations de  $f$  fournit les images de deux réels.

On a donc  $u_0 < u_1$ .

On en déduit que  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k < u_{k+1}$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} < u_{k+2}$ .

Puisque la phrase  $P(k)$  est vraie, on a :  $u_k < u_{k+1}$ .

Or  $f$  est strictement croissante sur  $I$  et d'après la question 1°), les nombres  $u_k$  et  $u_{k+1}$  appartiennent à  $I$  donc  $f(u_k) < f(u_{k+1})$  soit  $u_{k+1} < u_{k+2}$  (car, d'après la relation de récurrence,  $f(u_k) = u_{k+1}$  et  $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ ).

Il n'y a pas de calculs.

$$\begin{array}{ccc} f(u_k) < f(u_{k+1}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ u_{k+1} < u_{k+2} & & \end{array}$$

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

La phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On peut donc dire que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante à partir de l'indice 0.

**Commentaires :**

- Ce type de raisonnement sera employé assez fréquemment dans des cas où la fonction  $f$  sera définie de manière explicite.
- Dans la question 1°), on a établi que la suite  $(u_n)$  est bornée par 1 et 5.
- Dans la question 2°), on a établi que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir de l'indice 0.

**12** Utiliser  $f^{(k+1)} = [f^{(k)}]'$ .

**Solution détaillée :**

$$f: x \mapsto e^{3x}$$

**Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$  a pour expression  $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$ .**

- On pourrait avoir une idée du résultat en calculant la dérivée première de  $f$  notée  $f^{(1)}$  ou  $f'$  («  $f$  prime », notation traditionnelle de Lagrange), la dérivée seconde de  $f$  notée  $f^{(2)}$  ou  $f''$  («  $f$  seconde »), la dérivée troisième de  $f$  notée  $f^{(3)}$  ou  $f'''$  («  $f$  tierce »), la dérivée quatrième de  $f$  notée  $f^{(4)}$  (on laisse tomber la notation de Lagrange avec les primes au-delà de l'ordre 4) etc.
- Conventionnellement, l'ordre de dérivation est noté entre parenthèses pour ne pas confondre avec une puissance.
- On peut facilement conjecturer l'expression  $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$  pour tout entier naturel  $n$ .
- On peut aussi conjecturer la relation  $f^{(n+1)} = 3f^{(n)}$  pour tout entier naturel  $n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$  ».

**Initialisation :**

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

D'une part, on a  $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{3x}$ .

D'autre part, on a  $3^0 e^{3x} = e^{3x}$ .

On peut donc écrire  $f^{(0)}(x) = 3^0 e^{3x}$  et on en déduit alors que la phrase  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité :**

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie.

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Puisque  $P(k)$  est vraie,  $f^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$ .

En dérivant, on obtient l'égalité  $(f^{(k)})'(x) = 3^k \times 3e^{3x}$ .

D'où  $f^{(k+1)}(x) = 3^{k+1} e^{3x}$  et donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :**

On en déduit que la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**13**

• On peut affirmer avec certitude que les propositions (1) et (2) sont vraies.  
Pour la proposition (2), il s'agit du théorème de récurrence.

• En revanche, on ne peut rien dire pour les propositions (3), (4) et (5).

En particulier, pour la proposition (5) : «  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  » car on ne sait pas si la phrase  $P(0)$  est vraie : on ne connaît pas la valeur de vérité de  $P(0)$  donc on ne peut rien dire.

**14**

Cet exercice repose sur une imprécision de l'énoncé :

Les  $k$  points peuvent être distincts ou confondus.

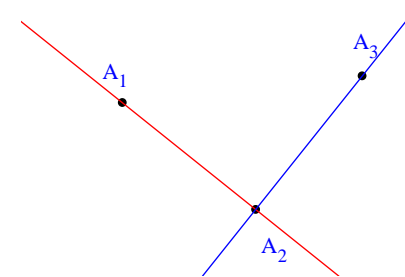
Rappel : des points confondus sont « forcément » alignés.

Dans la partie hérédité, dire que «  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont confondues car elles ont les points  $A_2, A_3, \dots, A_k$  en commun » est faux.

En effet, les points  $A_2, A_3, \dots, A_k$  peuvent tous être confondus auquel cas on ne peut absolument pas en déduire que les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont confondues.

Les points  $A_1$  et  $A_2$  sont alignés ainsi que les points  $A_2$  et  $A_3$ .

Cela ne veut pas dire que les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont alignés.



**15** Même astuce de départ qu'à l'exercice **12**.

**Solution détaillée :**

$$f: x \mapsto \frac{1}{x} \text{ définie sur } \mathbb{R}^*$$

**Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$  a pour**

**expression  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x}; \text{ or } \frac{(-1)^0 \times 0!}{x^{0+1}} = \frac{1}{x} \text{ donc } f^{(0)}(x) = \frac{(-1)^0 \times 0!}{x^{0+1}}.$$

On en déduit que la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \times k!}{x^{k+1}}$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \times (k+1)!}{x^{k+2}}$ .

Puisque  $P(k)$  est vraie,  $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \times k!}{x^{k+1}}$ .

On peut aussi écrire  $f^{(k)}(x) = (-1)^k \times k! \times \frac{1}{x^{k+1}}$  afin de faciliter la dérivation.

En dérivant, on obtient l'égalité  $(f^{(k)})'(x) = (-1)^k \times k! \times \left(-\frac{k+1}{x^{k+2}}\right)$ .

On notera que  $(-1)^k \times k!$  est une constante multiplicative qui ne dépend pas de  $x$ .

Il reste donc « intact » lors de la dérivation.

On notera également que l'on a utilisé la formule de dérivation suivante :  $\left(\frac{1}{x^p}\right)' = -\frac{p}{x^{p+1}}$ .

On peut aussi écrire :  $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \times k! \times \left(-1\right) \times \frac{k+1}{x^{k+2}}$  soit  $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \times (-1) \times \frac{k! \times (k+1)}{x^{k+2}}$ .

Or  $k! \times (k+1) = (k+1)!$  d'où  $f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \times (k+1)!}{x^{k+2}}$  et donc  $P(k+1)$  est vraie.

**Conclusion :** La phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  c'est-à-dire que pour tout entier naturel  $n$ , la

fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$  a pour expression  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ .

### Application (sur exemple) :

On applique la formule pour calculer  $f^{(7)}(x)$ .

$$f^{(7)}(x) = \frac{(-1)^7 \times 7!}{x^{7+1}} = -\frac{720}{x^8}$$

### Remarque :

Il est possible de retrouver la formule générale donnée dans l'énoncé et que nous avons démontrée par récurrence en effectuant le calcul « à la main » des premières dérivées de  $f$ .

Ainsi :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(3)} = 2 \times \left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{6}{x^4}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = -6 \times \left(-\frac{4}{x^5}\right) = \frac{24}{x^5}$$

D'où l'idée de la formule  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ .

**16** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\sum_{p=0}^{p=n} p \times p! = (n+1)! - 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la phrase  $P(n)$  : «  $\sum_{p=0}^{p=n} p \times p! = (n+1)! - 1$  ».

*Remarque :* il vaudrait mieux écrire  $\sum_{p=0}^{p=n} (p \times p!)$  avec des parenthèses autour de  $(p \times p!)$ .

Cela permet de rendre la somme plus lisible.



### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

On commence par calculer  $\sum_{p=0}^{p=0} p \times p!$ .

D'une part, on a :  $\sum_{p=0}^{p=0} p \times p! = 0 \times 0! = 0$ .

D'autre part, on a :  $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$ .

On peut donc écrire  $\sum_{p=0}^{p=0} p \times p! = (0+1)! - 1$ .

D'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $\sum_{p=0}^{p=k} p \times p! = (k+1)! - 1$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $\sum_{p=0}^{p=k+1} p \times p! = (k+2)! - 1$ .

On a :  $\sum_{p=0}^{p=k+1} p \times p! = \left( \sum_{p=0}^{p=k} p \times p! \right) + (k+1) \times (k+1)!$ .

$\sum_{p=0}^{p=k+1} p \times p! = (k+1)! - 1 + (k+1) \times (k+1)!$  (on utilise l'hypothèse de récurrence)

$$= (k+1)! + (k+1) \times (k+1)! - 1$$

$$= (k+1)! [1 + (k+1)] - 1 \quad \text{(on factorise par } (k+1)! \text{ les deux premiers termes de la somme)}$$

$$= (k+1)! (k+2) - 1$$

$$= (k+2)! - 1$$

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

### Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ , c'est-à-dire que

pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\sum_{p=0}^{p=n} p \times p! = (n+1)! - 1$ .

On a démontré une formule sommatoire.

### 17

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

**Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$ .**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on définit la phrase  $P(n)$  : «  $u_n > 1$  ».

### Initialisation :

Vérifions que la phrase  $P(0)$  est vraie.

$u_0 = 3$  par hypothèse de définition de la suite donc  $u_0 > 1$ .

D'où la phrase  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité :

Considérons un entier naturel  $k$  tel que la phrase  $P(k)$  soit vraie, c'est-à-dire  $u_k > 1$ .

Démontrons qu'alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{k+1} > 1$ .

On a :  $u_{k+1} = \frac{4u_k - 2}{u_k + 1}$ .

Méthode : Pour comparer  $u_{k+1}$  et 1, on va utiliser la méthode par différence, c'est-à-dire que l'on va démontrer que  $u_{k+1} - 1 > 0$ . En effet, il n'y a pas de règle concernant le quotient pour les inégalités. **Il n'y a ici pas d'autre méthode.**

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - 1 &= \frac{4u_k - 2}{u_k + 1} - 1 \\
&= \frac{4u_k - 2 - (u_k + 1)}{u_k + 1} \\
&= \frac{4u_k - 2 - u_k - 1}{u_k + 1} \\
&= \frac{3u_k - 3}{u_k + 1} \\
&= \frac{3(u_k - 1)}{u_k + 1}
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence,  $u_k > 1$  donc  $u_k - 1 > 0$  et de manière évidente  $u_k + 1 > 0$ .

On en déduit que  $u_{k+1} - 1 > 0$  (d'après la règle des signes : le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif).

Par conséquent,  $u_{k+1} > 1$  et par suite la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

### Conclusion :

On a démontré que la phrase  $P(0)$  est vraie et que si la phrase  $P(k)$  est vraie pour un entier naturel  $k$ , alors la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

### Autre méthode pour la partie hérédité :

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \frac{4u_k - 2}{u_k + 1} \\
&= \frac{4(u_k + 1) - 6}{u_k + 1} \\
&= 4 - \frac{6}{u_k + 1}
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence,  $u_k > 1$  donc  $u_k + 1 > 2$ .

$$\text{Par suite, } \frac{1}{u_k + 1} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où } -\frac{6}{u_k + 1} > -3.$$

$$\text{Donc } 4 - \frac{6}{u_k + 1} > 1 \text{ soit } u_{k+1} > 1.$$

Donc la phrase  $P(k+1)$  est vraie.

### Remarque :

Le calcul des premiers termes donne :  $u_1 = \frac{5}{2}$ ,  $u_2 = \frac{16}{7}$  ...

### Autre méthode : assez efficace

On étudie la fonction  $f: x \mapsto \frac{4x-2}{x+1}$ .

On démontre que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

Donc si  $x > 1$ , alors  $f(x) > 1$ .

### Autre façon :

$$\begin{aligned}
u_k &> 1 \\
3u_k &> 3 \\
4u_k - 2 &> u_k + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_k + 1 &> 0 \\
\text{Donc } \frac{4u_k - 2}{u_k + 1} &> 1
\end{aligned}$$

D'où  $u_{k+1} > 1$

### Remarque :

Pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 1$  donc  $u_n + 1 > 2$ ,  $u_n + 1 \neq 0$ .

Donc on peut écrire :  $u_{n+1} = \frac{\dots}{u_n + 1}$ .

Donc  $(u_n)$  existe.

### Raisonnement faux :

On minore le numérateur et le dénominateur :

$$4u_k - 2 > 2 \text{ et } u_k + 1 > 2$$

Donc en divisant membre à membre les deux inégalités on obtient :

$$\frac{4u_k - 2}{u_k + 1} > 1.$$

Critique de ce raisonnement : On n'a pas le droit de diviser membre à membre des inégalités de même sens.

Si  $a > b$  et  $c > d$ , on ne peut écrire  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .

# Commentaires

- L'initialisation de certaines récurrences nécessite un calcul, d'autres, non.

Dans les exercices **1**, **2**, **3**, l'initialisation ne nécessite pas de calcul.

Dans les exercices **4** et **5**, l'initialisation nécessite un calcul.

- Dans la partie sur l'hérédité, « On travaille avec  $k + 1$  . »

- À l'intérieur de la récurrence pour les sommes, on utilise les techniques algébriques usuelles : techniques de factorisations, développements, mises au même dénominateur.
- 

## Classification des exercices

- Démonstration d'une inégalité
  - Démonstration d'une égalité
  - Démonstration d'une formule sommatoire
  - Démonstration de divisibilité
- 

## Je préconise de lire :

- la fiche sur les inégalités (propriétés sur l'ordre) ;
- le cours sur la logique (notamment sur l'implication  $P \Rightarrow Q$ ).