TS Exercices sur le logarithme népérien

Progression des exercices : tous jusqu'au $\boxed{23}$ inclus sauf le $\boxed{10}$ puis $\boxed{24}$, $\boxed{25}$, $\boxed{32}$, $\boxed{37}$, $\boxed{38}$.
Exercices 7 à 9 puis 11 à 17 (dans le 17 pas la question 4°))
exercices 18 à 24 (équations et inéquations avec logarithmes népériens)
exercice 25
exercice 37 et 38
Faire le programme montré en classe sur Codabrainy.

1 Sans calculatrice, calculer :
$\text{A} = \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3)$; $\text{B} = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \ln\left(9 - 4\sqrt{5}\right)$.

2 Sans calculatrice, simplifier :
$\text{A} = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\dfrac{1}{4}$; $\text{B} = \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{3}{5} + \ln\dfrac{5}{7} + \ln\dfrac{7}{9}$.

3 Soit a, b, c trois réels strictement positifs donnés.

Écrire en fonction de ln a, ln b, ln c les réels $x = \dfrac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$, $y = \ln\dfrac{a}{b} - \ln\dfrac{c}{b}$, $z = \ln\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)$.

4 Simplifier la somme $\text{S} = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + ... + \ln\dfrac{99}{100}$.

5 Exprimer en fonction de ln 2 et de ln 5 les nombres suivants : ln 1000 ; $\ln\dfrac{8}{25}$; $\ln(0{,}16)$.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\dfrac{2x-1}{x+3}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f (on rédigera ainsi : « $f(x)$ existe si et seulement si … »).
2°) Déterminer une autre écriture de $f(x)$ suivant les intervalles qui constituent $\mathscr{D}$.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\dfrac{3+x}{3-x}$.
Étudier la parité de f.
Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

10 On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (c'est-à-dire $\vec{i} \perp \vec{j}$). On note également $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = \ln x + 4$, $y = \ln(x+4)$, $y = |\ln x|$.

Recopier et compléter les phrases :

« On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_1$ par … ».

« On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_2$ par … ».

« On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ en … »

11 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - \ln x$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto x + 2\ln x$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Étudier f (ensemble de définition, dérivée, tableau de variations, limites et conséquences graphiques pour $\mathscr{C}$).

13 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b\ln x$ où a et b sont des réels.
1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer a et b tels que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifie les deux hypothèses :
H_1 : $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(1\,;2)$.
H_2 : $\mathscr{C}$ admet en A une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y = x$.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b + c\ln x$ où a, b, c sont des réels.
1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer (sans utiliser la calculatrice) les réels a, b, c tels que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifie les trois hypothèses :
H_1 : $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(1\,;1)$.
H_2 : $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{B}(2\,;2\ln 2)$.
H_3 : $\mathscr{C}$ admet en B une tangente horizontale.

N. B. : Cet exercice demande de la persévérance car les calculs semblent un peu longs mais menés intelligemment, ils aboutissent assez vite.

15 Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln x \leqslant x - 1$.
Indication : Faire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \ln x - x + 1$ sans les limites afin d'en déduire son signe.

16 Sans calculatrice, calculer le nombre $\text{A} = 5\ln\left(\text{e}^4\right) - 2\ln\dfrac{1}{\text{e}} + 4\ln\sqrt{\text{e}}$.

$\boxed{17}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^3$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Démontrer que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

3°) Dresser le tableau de variations de *f*.

4°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

5°) Tracer $\mathscr{C}$ et la tangente horizontale en prenant 1 cm pour unité graphique (faire un petit tableau de valeurs).

Vérifier sur la calculatrice graphique.

On peut vérifier les ensembles de solutions des équations et inéquations à l'aide de l'application « photomaths » ou à l'aide du site dcode.

$\boxed{18}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\ln x + 1 = 0 \quad (1)$; $1 - 2\ln x = 0 \quad (2)$.

$\boxed{19}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \quad (1)$.

$\boxed{20}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0 \quad (1)$.

Indication : Utiliser le changement d'inconnue $X = \ln x$.

$\boxed{21}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1) - \ln(x-1) = 1 \quad (1)$.

$\boxed{22}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\left(x^2 - 3\right) \leqslant \ln x + \ln 2 \quad (1)$.

$\boxed{23}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 30 & (1) \\ \ln x + \ln y = 3\ln 5 & (2) \end{cases}$.

$\boxed{24}$ Le but de l'exercice est de déterminer les entiers naturels (ou relatifs) *n* tels que $(0{,}9)^n \leqslant 10^{-3}$.

1°) Utiliser le site dcode, rubrique inéquations, pour trouver la réponse.

On écrira l'inéquation sous la forme 0,9^n<=10^(-3).
Inconnue à trouver : n
Pour l'ensemble de résolution, choisir $\mathbb{R}$ (et pas $\mathbb{Z}$ car dcode n'arrive pas à résoudre dans ce cas).

2°) Retrouver la réponse algébriquement (en utilisant la calculatrice pour effectuer un seul calcul).

$\boxed{25}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse *a* ($a > 0$).

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente passe par le point $\mathrm{B}(0\,;1)$.

On rédigera ainsi : « $\mathrm{B} \in T_a$ si et seulement si … ».

Faire un graphique assez grand. Tracer $\mathscr{C}$, placer A et B et tracer la tangente en A.

$\boxed{26}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x - 3\ln x + 1$ (on observera que *f* n'est pas une fonction polynôme).

On cherche la limite de *f* en $+\infty$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.

3°) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f(x) = x\left(1 - 3\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\right)$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On détaillera bien les calculs en veillant à la présentation.

$\boxed{27}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 - 5\ln x + 1$ (on observera que *f* n'est pas une fonction polynôme).

On cherche la limite de *f* en $+\infty$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.

3°) Factoriser $f(x)$ par $(\ln x)^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\boxed{28}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5\ln x - 2}{\ln x + 1}$ (on observera que *f* n'est pas une fonction rationnelle).

On cherche la limite de *f* en $+\infty$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Identifier la forme indéterminée que l'on rencontre.

3°) Factoriser $f(x)$ par $\ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{1 ; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ au numérateur et au dénominateur ; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\boxed{29}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Étudier les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.

Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{30}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$; étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ dans un tableau.

Vérifier sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

$\boxed{31}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x) - 2}{(\ln x) - 1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

$\boxed{32}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2x - 1)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

2°) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.

Dans les exercices $\boxed{\mathbf{33}}$ à $\boxed{\mathbf{36}}$, on donne une fonction f.
Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f et étudier les limites aux bornes* de $\mathscr{D}$. Préciser chaque fois lorsque l'on rencontre une forme indéterminée.

$\boxed{\mathbf{33}}$ $f : x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x}$

$\boxed{\mathbf{34}}$ $f : x \mapsto x(1-\ln x)$

$\boxed{\mathbf{35}}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2-1}{2x}$

$\boxed{\mathbf{36}}$ $f : x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x+1}$

* Il s'agit des bornes ouvertes.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left| x^2-1 \right|$.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left| 3x-1 \right|$.

Corrigé

1 Calculs d'expressions avec des logarithmes népériens

A = 0 ; B = 0

Solution détaillée :

On peut va utiliser la décomposition en facteurs premiers de 216 :

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc $216 = 2^3 \times 3^3$.

$$\begin{aligned} A &= \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3) \\ &= \ln(2^3 \times 3^3) - 3(\ln 2 + \ln 3) \\ &= \ln(2^3) + \ln(3^3) - 3\ln 2 - 3\ln 3 \\ &= 3\ln 2 + 3\ln 3 - 3\ln 2 - 3\ln 3 \\ &= \cancel{3\ln 2} + \cancel{3\ln 3} - \cancel{3\ln 2} - \cancel{3\ln 3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Variante (moins bien) :

On peut écrire $216 = 6^3$ (en utilisant par exemple la décomposition en facteurs premiers).

$$\begin{aligned} A &= \ln 216 - 3(\ln 2 + \ln 3) \\ &= \ln 6^3 - 3\ln 6 \\ &= 3\ln 6 - 3\ln 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Variantes pour le A :

$A = \ln 216 + \ln 6^{-3}$

$A = \ln(216 \times 6^{-3})$ calcul pas très commode

$A = \ln 216 - \ln 6^3$

$A = \ln\left(\frac{216}{6^3}\right)$ calcul pas très commode

$B = 2\ln(2+\sqrt{5}) + \ln(9-4\sqrt{5})$

$= \ln\left[(2+\sqrt{5})^2\right] + \ln(9-4\sqrt{5})$

$B = \ln\left[2^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\times2\times\sqrt{5}\right] + \ln(9-4\sqrt{5})$ (ligne facultative)

$= \ln(9+4\sqrt{5}) + \ln(9-4\sqrt{5})$

$= \ln\left[(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\right]$

$= \ln\left[9^2 - (4\sqrt{5})^2\right]$

$= \ln(81-80)$

$= \ln 1$

$= 0$

On notera que l'on applique deux fois une identité remarquable durant le calcul.

On applique les propriétés algébriques du logarithme népérien valables pour a et b réels strictement positifs (et n entier relatif).

$$\begin{aligned} &\ln(ab) = \ln a + \ln b \\ &\ln\frac{1}{a} = -\ln a \\ &\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \\ &\ln(a^n) = n\ln a \\ &\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a \end{aligned}$$

2 Simplifications d'expressions

A = ln 5 ; B = – 2 ln 3

Solution détaillée :

- $A = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} &= 3\ln 3 + 3\ln 5 - \ln 3^3 - 2\ln(2\times5) + \ln 4 \\ &= 3\ln 3 + 3\ln 5 - \ln 3^3 - 2(\ln 2 + \ln 5) + \ln 4 \\ &= \cancel{3\ln 3} + 3\ln 5 - \cancel{3\ln 3} - 2\ln 2 - 2\ln 5 + \ln 4 \\ &= 3\ln 5 - 2\ln 2 - 2\ln 5 + \ln 2^2 \\ &= 3\ln 5 - \cancel{2\ln 2} - 2\ln 5 + \cancel{2\ln 2} \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

La calculatrice Numworks permet d'obtenir tout de suite ce résultat.

- $B = \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9}$

$= \cancel{-\ln 3} + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 5} + \cancel{\ln 5} - \cancel{\ln 7} + \cancel{\ln 7} - \ln 9$

$= -\ln 9$ [on peut s'arrêter là ; possible d'écrire ln 1 / 9 pourquoi pas]

$= -2\ln 3$

La calculatrice Numworks permet d'obtenir tout de suite ce résultat.

Il s'agit chaque fois de résultats donnés en valeurs exactes.

3 Simplifications d'expression littérales avec des logarithmes népériens

$x = 2\ln a$; $y = \ln a - \ln c$; $z = 4\ln a - 3\ln b$

Solution détaillée :

$(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$

Écrivons en fonction de ln a, ln b, ln c les réels $x = \frac{1}{4}\ln(a^8)$, $y = \ln\frac{a}{b} - \ln\frac{c}{b}$, $z = \ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$.

$$x=\frac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times 8\ln a$$
$$=2\ln a$$

$$y=\ln\frac{a}{b}-\ln\frac{c}{b}$$
$$=\ln a-\ln b-\ln c+\ln b$$
$$=\ln a-\ln c$$

$$z=\ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$$
$$=\ln\left(a^4\right)-\ln\left(b^3\right)$$
$$=4\ln a-3\ln b$$

Il est possible d'écrire y sous la forme $\ln\frac{a}{c}$, mais cela ne répond pas à la question.

On demande en effet un résultat en fonction de ln a, ln b, ln c.
Le résultat ne doit comporter que des ln a, des ln b et des ln c.

On peut vérifier les résultats sur calculatrice Numworks avec la « technique du π ».

$\boxed{4}$ $\text{S}=-\ln 100=-2\ln 10$

Solution détaillée :

$\mathbf{S=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+...+\ln\frac{99}{100}}$ **(les petits points signifie que la somme est construite de manière « logique »)**

Simplifions S.

On pourrait penser appliquer une formule de somme des termes consécutifs d'une suite. Mais ce n'est pas possible car il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Il y a 2 méthodes.

1ère méthode :

$$\text{S}=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+...+\ln\frac{99}{100}$$

On laisse les petits points. On montre juste le principe de simplification.

$=\cancel{-\ln 2}+\cancel{\ln 2}\cancel{-\ln 3}+...+\ln 99-\ln 100$ (il faut penser aux petits points : après le $\ln\frac{2}{3}$ il y a $\ln\frac{3}{4}$ d'où la simplification de la $-\ln 3$; de même pour ln 99)

$=-\ln 100$

$=-2\ln 10$ (ligne facultative, on peut s'arrêter à la ligne précédente)

Il s'agit d'un procédé de calcul de somme par **« télescopage »** ou **simplification « en cascade »**.
Il reste les termes des extrémités de la somme.
Ce procédé que nous retrouverons plus tard sert à établir des formules sommatoires.

2e méthode :

$$\text{S}=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+...+\ln\frac{99}{100}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times...\times\frac{\cancel{99}}{100}\right)$$
$$=\ln\frac{1}{100}$$
$$=-\ln 100$$
$$=-2\ln 10$$ (ligne facultative, on peut s'arrêter à la ligne précédente)

Avec la 1ère méthode, on peut faire apparaître le télescopage de manière suivante en écrivant une égalité par ligne :

$$\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 2$$
$$\ln\frac{2}{3}=\ln 2-\ln 3$$
$$\ln\frac{3}{4}=\ln 3-\ln 4$$
……………………
$$\ln\frac{99}{100}=\ln 99-\ln 100$$

On fait apparaître ainsi un télescopage des termes deux à deux.

On observe les simplifications en diagonale.
On peut vérifier le résultat avec la calculatrice en utilisant la commande de calcul d'une somme.

On doit taper $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\left(\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)$.

On obtient l'affichage : – 4.605170186.

On peut vérifier que cette valeur coïncide avec celle affichée pour – ln 100.

Autre méthode par produit :

$$\text{S}=\ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times...\times\frac{\cancel{99}}{100}\right)=\ln\frac{1}{100}=-\ln 100=-2\ln 10$$

On simplifie à l'intérieur du produit.

Sans petits points, on peut écrire cette somme avec le symbole Σ de la manière suivante : $\text{S}=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=99}\ln\frac{k}{k+1}$.

5

$\ln 1000=\ln 10^3=3\ln 10=3\ln(2\times 5)=3\ln 2+3\ln 5$; $\ln\dfrac{8}{25}=3\ln 2-2\ln 5$

$\ln(0{,}16)=\ln\dfrac{16}{100}=\ln\dfrac{4}{25}=\ln 4-\ln 25=\ln\left(2^2\right)-\ln\left(5^2\right)=2\ln 2-2\ln 5$

Solution détaillée :

Exprimons en fonction de ln 2 et de ln 5 les nombres suivants : ln1000 ; $\ln\dfrac{8}{25}$; ln(0,16).

On présente les calculs en colonnes.

$$\begin{aligned}\ln 1000&=\ln 10^3\\&=3\ln 10\\&=3\ln(2\times 5)\\&=3\ln 2+3\ln 5\\&=3(\ln 2+\ln 5)\ \text{ligne facultative}\end{aligned}$$

On n'est pas obligé de factoriser.

$$\begin{aligned}\ln\frac{8}{25}&=\ln 8-\ln 25\\&=\ln\left(2^3\right)-\ln\left(5^2\right)\\&=3\ln 2-2\ln 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(0{,}16)&=\ln\frac{16}{100}\\&=\ln\frac{4}{25}\\&=\ln 4-\ln 25\\&=\ln\left(2^2\right)-\ln\left(5^2\right)\\&=2\ln 2-2\ln 5\\&=2(\ln 2-\ln 5)\ \text{ligne facultative}\end{aligned}$$

Pour ln 1000, la meilleure méthode consiste à effectuer la décomposition de 1000 en facteurs premiers.

6

1°) $\mathscr{D}=\left]-\infty\,;-3\right[\,\bigcup\,\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ (faire un tableau de signes **à la règle**)

2°) L'égalité est vraie pour $x\in\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Solution détaillée :

$f:x\mapsto\ln\dfrac{2x-1}{x+3}$

f n'est pas une fonction rationnelle.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x+3\neq 0\\ \dfrac{2x-1}{x+3}>0\end{cases}$ (rappel : l'accolade signifie « et »)

La première condition exprime que le quotient existe.
La deuxième condition exprime que le logarithme népérien existe.

si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+3}>0\\ x\neq -3\end{cases}$

On dresse un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-1}{x+3}>0$.

Astuce pour éviter de faire un tableau de signes :
On dit que le signe du quotient $\dfrac{2x-1}{x+3}$ est le même que celui du produit $(2x-1)(x+3)$ qui est un polynôme du second degré [à un détail près : il y a une valeur interdite].
On se raccroche ensuite à la règle du signe d'un polynôme du second degré sans faire de tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{2x-1}{x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathscr{D}=\left]-\infty\,;-3\right[\,\bigcup\,\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

2°) Déterminons une autre écriture de $f(x)$ suivant les intervalles qui constituent $\mathscr{D}$.

Soit a et b deux réels.

- Si a et b sont tous les deux strictement positifs ($a>0$ et $b>0$), alors le quotient $\dfrac{a}{b}$ est strictement positif et $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$.
- Si a et b sont tous les deux strictement négatifs ($a<0$ et $b<0$), alors le quotient $\dfrac{a}{b}$ est strictement positif et $\ln\dfrac{a}{b}=\ln\left(\dfrac{-a}{-b}\right)=\ln(-a)-\ln(-b)$.

- Si $x>\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\ln\dfrac{2x-1}{x+3}=\ln(2x-1)-\ln(x+3)$ car $2x-1>0$ et $x+3>0$ (cf. tableau de signes).
- Si $x<-3$, $f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{-x-3}=\ln(1-2x)-\ln(-x-3)$ car $2x-1<0$ et $x+3<0$ (cf. tableau de signes).

Il ne s'agit pas exactement d'un développement mais d'une autre écriture à l'aide de deux logarithmes.

On peut aussi utiliser une valeur absolue.

$\boxed{7}$ On commence par cherche $\mathscr{D}_f$: pour cela on utilise un tableau de signes (à la règle).

$\mathscr{D} =]-3\,;3[$ est centré en 0 (il ne faut pas oublier cette condition importante) ; la fonction *f* est impaire.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \ln\dfrac{3+x}{3-x}}$

Étudions la parité de *f*.

f n'est pas une fonction rationnelle.

On commence par chercher l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{3+x}{3-x} > 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$ (2 conditions)

si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{3+x}{3-x} > 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

On dresse un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{3+x}{3-x} > 0$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{3+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\mathscr{D} =]-3\,;3[$

Pour la parité, il y a deux points à démontrer :

• $\mathscr{D}$ est centré en 0.

• On calcule $f(-x)$ et on compare le résultat avec $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}$.

$$\forall x \in \mathscr{D} \quad f(-x) = \ln\frac{3-x}{3+x}$$

$$= \ln\frac{1}{\dfrac{3+x}{3-x}}$$

$$= -\ln\frac{3+x}{3-x} \quad \text{(propriété } \ln\frac{1}{a} = -\ln a \text{ valable pour tout réel } a>0\text{)}$$

$$= -f(x)$$

Démarche un peu moins bonne :

$$\forall x \in \mathscr{D} \quad f(-x) = \ln\frac{3-x}{3+x}$$
$$= \ln(3-x) - \ln(3+x) \quad \text{(autorisé car } 3+x \text{ et } 3-x \text{ sont strictement positifs)}$$
$$= -\left[\ln(3+x) - \ln(3-x)\right]$$
$$= -f(x)$$

Donc ***f* est impaire**.

Registre graphique : La courbe représentative de *f* dans un repère quelconque admet le point O pour centre de symétrie.

Tracer la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 1°) $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$; 2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}}$

f n'est pas une fonction rationnelle.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (2 conditions)

si et seulement si $x > 0$

$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention : *f* n'est pas une fonction rationnelle à cause de la présence du ln.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln x}{x^2}$$ (on utilise la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$)

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$\boxed{9}$ 1°) $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$; 2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

Solution détaillée :

$$f : x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ (2 conditions)

$\Leftrightarrow x > 0$ (le système de conditions se réduit à $x > 0$ puisque si $x > 0$, *x* est forcément différent de – 1)

$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$

Question élève le 7-10-2021 :

Pourquoi on peut enlever $x \neq -1$?
On sait que $x > 0$ donc c'est forcément différent de – 1.

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (x+1) - 1 \times \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

$\boxed{10}$ **Fonctions associées à la fonction logarithme népérien**

Rappel de propriétés :

Soit *f* une fonction et $\mathscr{C}$ sa représentative graphique dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère la fonction $f_1 : x \mapsto f(x) + k$ où *k* est un réel.
On note $\mathscr{C}_1$ sa représentation graphique.
On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_1$ en ajoutant à *k* à toutes les ordonnées des points de $\mathscr{C}$ (tracé point par point).
On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$.
On peut également dire que $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$ et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_1 = t_{k\vec{j}}(\mathscr{C})$.

On considère la fonction $f_2 : x \mapsto f(x+k)$ où *k* est un réel.
On note $\mathscr{C}_2$ sa représentation graphique.
On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_2$ en soustrayant *k* à toutes les abscisses des points de $\mathscr{C}$ (tracé point par point).
On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_2$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.
On peut également dire que $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$ et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_2 = t_{-k\vec{i}}(\mathscr{C})$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x+a) + b$ où *a* et *b* sont deux réels.
On note Γ sa représentation graphique.
On passe de $\mathscr{C}$ à Γ par la translation de vecteur $-a\vec{i} + b\vec{j}$.
On peut également dire que Γ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i} + b\vec{j}$ et écrire en notation symbolique : $\Gamma = t_{-a\vec{i}+b\vec{j}}(\mathscr{C})$.

On peut voir une analogie avec la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.

On considère la fonction $f_3 : x \mapsto -f(x)$.

On note $\mathscr{C}_3$ sa représentation graphique.

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ en multipliant par – 1 toutes les ordonnées des points de $\mathscr{C}$ (tracé point par point).

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ par la symétrie d'axe (O*x*) et de direction (O*y*).

Si on suppose que le repère est orthogonal, on passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses. On peut également dire que $\mathscr{C}_3$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_3 = S_{(\mathrm{O}x)}(\mathscr{C})$.

On considère la fonction $f_4 : x \mapsto f(-x)$.

On note $\mathscr{C}_4$ sa représentation graphique.

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ par la symétrie oblique d'axe (O*y*) et de direction (O*x*).

Si on suppose que le repère est orthogonal, on passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_4$ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées. On peut également dire que $\mathscr{C}_4$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_4 = S_{(\mathrm{O}y)}(\mathscr{C})$.

On considère la fonction $f_5 : x \mapsto kf(x)$ où *k* est un réel.

On note $\mathscr{C}_5$ sa représentation graphique.

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_5$ en multipliant par *k* toutes les ordonnées des points de $\mathscr{C}$ (tracé point par point).

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_5$ par l'affinité d'axe (O*x*), de direction (O*y*) et de rapport *k*.

On peut également dire que $\mathscr{C}_5$ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'affinité d'axe (O*x*), de direction (O*y*) et de rapport *k* et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_5 = \mathrm{Aff}_{(\mathrm{O}x,\, \mathrm{O}y,\, k)}(\mathscr{C})$.

On a vu précédemment le cas particulier $k = -1$. Dans ce cas, l'affinité est la symétrie oblique par rapport à l'axe des abscisses de direction l'axe des ordonnées.

On considère la fonction $f_6 : x \mapsto f(kx)$ où *k* est un réel non nul

On note $\mathscr{C}_6$ sa représentation graphique.

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_6$ par l'affinité d'axe (O*y*), de direction (O*x*) et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

On peut également dire que $\mathscr{C}_6$ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'affinité d'axe (O*y*), de direction (O*x*) et de rapport $\dfrac{1}{k}$. Et écrire en notation symbolique : $\mathscr{C}_6 = \mathrm{Aff}_{\left(\mathrm{O}y,\, \mathrm{O}x,\, \frac{1}{k}\right)}(\mathscr{C})$.

On a vu précédemment le cas particulier $k = -1$. Dans ce cas, l'affinité est la symétrie oblique par rapport à l'axe des ordonnées de direction l'axe des abscisses.

On considère la fonction $f_7 : x \mapsto \left| f(x) \right|$.

On note $\mathscr{C}_7$ sa représentation graphique.

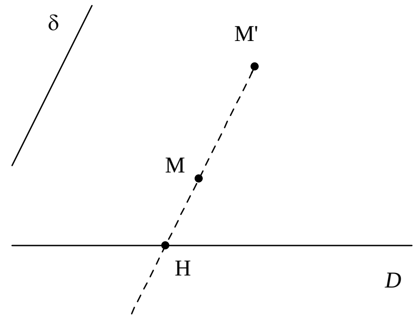
On obtient $\mathscr{C}_7$ à partir de $\mathscr{C}$ en conservant la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et en effectuant la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie située en dessous.

On considère la fonction $f_8 : x \mapsto f(a - x)$.

On note $\mathscr{C}_8$ sa représentation graphique.

On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_8$ par la symétrie oblique d'axe la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$ et de direction (O*x*).

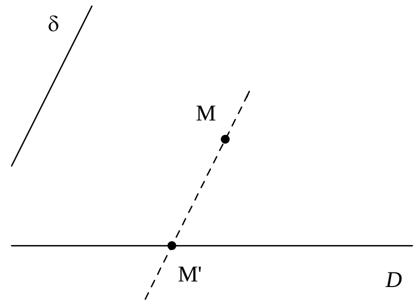
Si on suppose que le repère est orthogonal, on passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_8$ par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.



Projection

Définition

Soit *D* une droite et δ une autre droite non parallèle à *D*.
On appelle projection sur *D* parallèlement à δ l'application qui à tout point M du plan associe le point M' d'intersection de *D* avec la parallèle à δ passant par M.



On dit que M' est le projeté de M sur *D* parallèlement à δ.

Cas particulier :

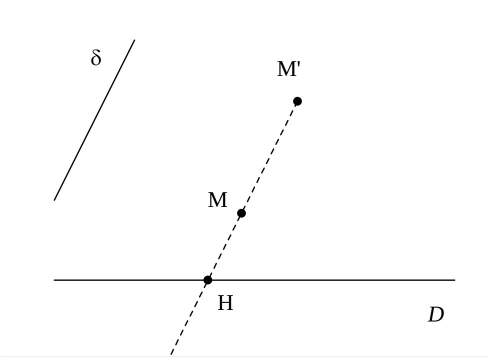
Lorsque δ est orthogonale à *D*, on parle de projection orthogonale.

Affinité

Définition

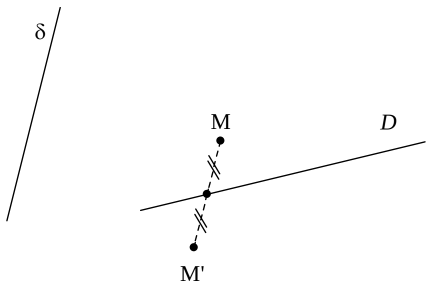
Soit D une droite et delta une autre droite δ non parallèle à D.
Soit k un réel non nul.

On appelle affinité d'axe D parallèlement à δ et de rapport k l'application du plan dans lui-même notée $\mathrm{Aff}_{(D,\delta,k)}$ qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur D parallèlement à δ.



Cas particuliers

• Lorsque $k = -1$, on parle de symétrie oblique par rapport à D parallèlement à δ.



• Lorsque $D \perp \delta$, on parle d'affinité orthogonale.

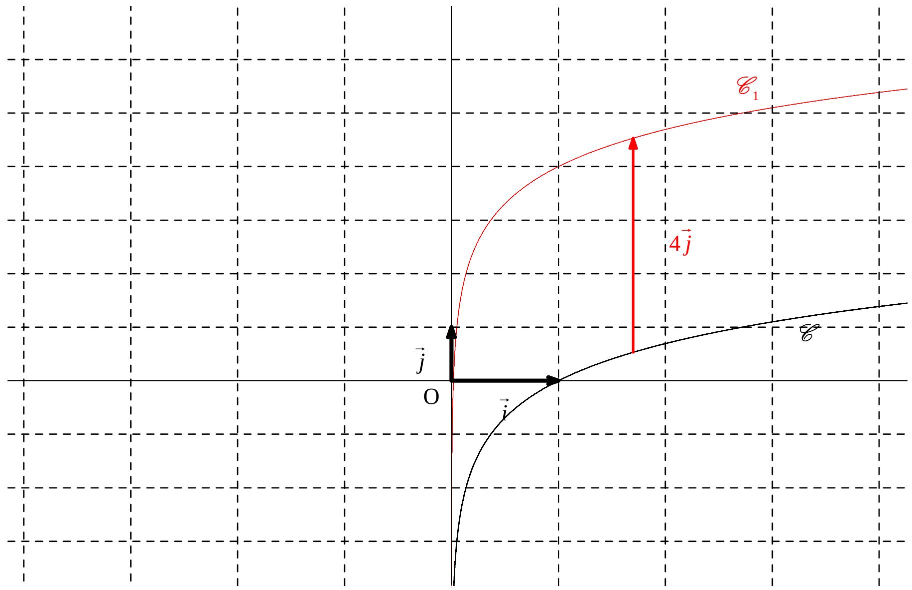
Réponses de l'exercice :

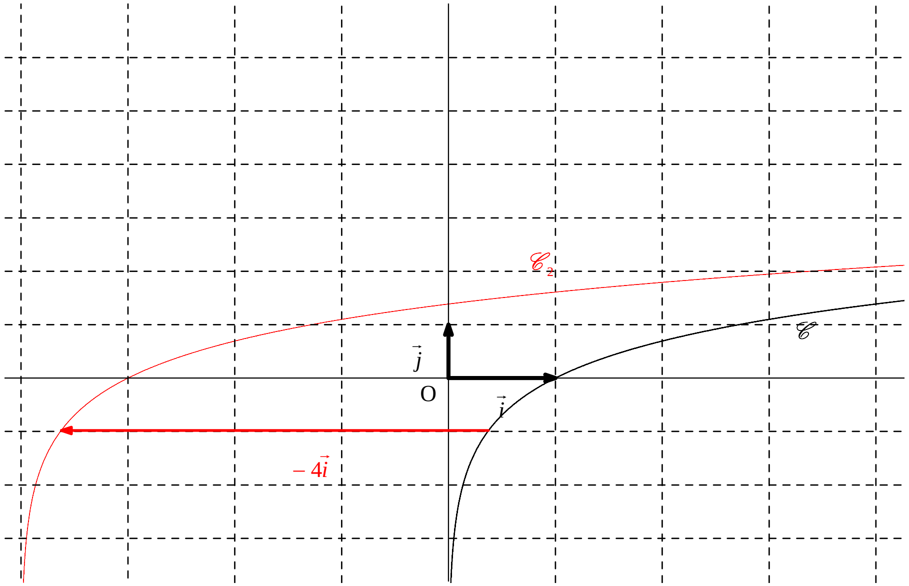
• On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $4\vec{j}$.

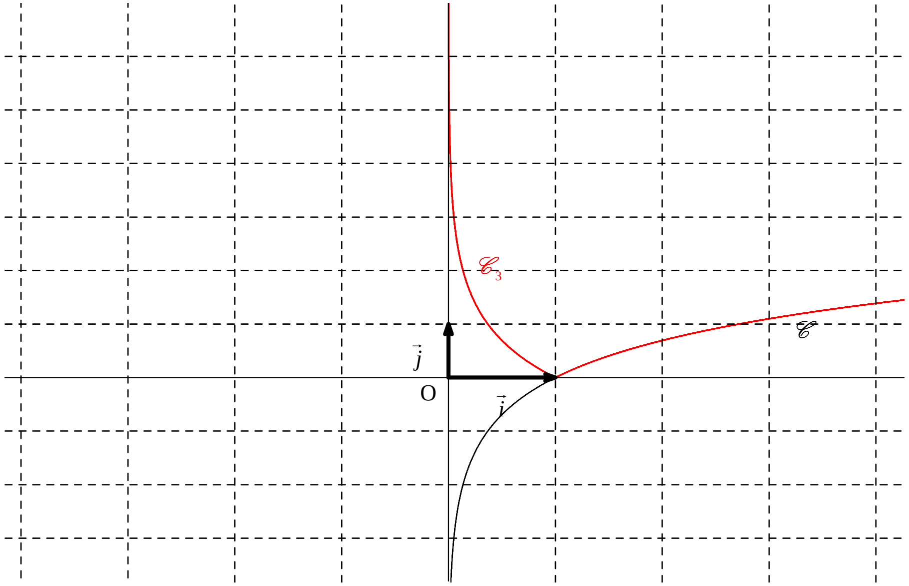
• On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_2$ par la translation de vecteur $-4\vec{i}$.

• On passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_3$ en conservant la partie située au-dessus de l'axe des abscisses c'est-à-dire pour $x > 1$ et en effectuant la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie située en dessous c'est-à-dire pour $x \in]0\,;1[$.

N.B. : L'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel de tracé de courbes est très intéressante pour ce type d'exercices.







$\boxed{11}$

$T:\ y=5x-2$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto 3x^2 - \ln x$

$\mathscr{C}$: courbe représentative de f

Déterminons l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

$\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 6x - \dfrac{1}{x}$

On laisse le résultat de la dérivée sous cette forme car on n'a pas besoin d'arranger le résultat pour la suite.

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 - \ln 1 \\ &= 3 - 0 \\ &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f'(1) &= 6 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ (formule en situation) soit $y = 5x - 5 + 3$ c'est-à-dire $y = 5x - 2$.

$\boxed{12}$

$f : x \mapsto x + 2\ln x$

Étudions f (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques pour $\mathscr{C}$).

L'ensemble de définition de f est $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$.

On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$ mais il ne faut pas faire cette transformation d'écriture avant d'avoir trouvé l'ensemble de définition. Pour trouver un ensemble de définition, on ne doit pas modifier l'expression de la fonction.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 + 2 \times \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$ (présentation préférable en colonne)

Il n'y a pas besoin de transformer davantage l'expression de $f'(x)$ pour lire le signe de la dérivée pour $x > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) > 0$ donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de *f*	$-\infty \nearrow +\infty$

Remarque : Il n'est pas forcément utile d'avoir recours à la dérivée pour déterminer le sens de variation de *f*.
Considérons les fonctions *u* et *v* définies par $u(x) = x$ et $v(x) = 2\ln x$.
La fonction *u* est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction *v* est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$f = u + v$
Donc *f* est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Pour déterminer les limites de *f* aux bornes de l'ensemble de définition, on effectue la limite d'une somme.

• Limite de *f* en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2\ln x) = +\infty \quad \text{(provient de la limite de référence } \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty)\end{array}\right\} \text{donc par limite d'une somme}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

• Limite de *f* en 0^+ :

x tend vers 0^+ signifie que *x* tend vers 0 mais en restant strictement supérieur à 0 (c'est-à-dire strictement positif).

On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite de référence).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (2\ln x) = -\infty\end{array}\right\} \text{donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

On met les limites dans le tableau de variations.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de *f* dans un repère admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On visualise la courbe $\mathscr{C}$ sur calculatrice ou sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

13

1°) $\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$

2°) Penser à traduire l'hypothèse H_2 par $f'(1) = 1$ (en effet, le nombre dérivé de *f* en 1 est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et Δ a pour coefficient directeur 1).
Ne pas utiliser l'équation réduite de la tangente qui complique beaucoup les choses.
On trouve $a = 2$; $b = -1$.
Remarque : On peut aussi « faire » un système.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto ax + b\ln x} \quad (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$

a et *b* sont des paramètres.

1°) **Calculons $\boldsymbol{f'(x)}$.**

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les règles d'opérations sur les dérivées (somme et produit par un réel).
On utilise le fait que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$ (attention, *f* n'est pas une fonction polynôme).

2°)

H_1 : $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 2)

H_2 : $\mathscr{C}$ admet en A une tangente parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y = x$

On dit plutôt « condition » que « hypothèse ».

Déterminons *a* et *b*.

H_1 permet d'écrire que $f(1) = 2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow a \times 1 + b\ln 1 = 2$
$\Leftrightarrow a = 2 \quad (1')$
H_2 permet de dire que le coefficient directeur de la tangente en A a pour coefficient directeur 1 donc on a :
$f'(1) = 1 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow a + b = 1 \quad (2')$
Compte tenu de $(1')$, $(2')$ donne $2 + b = 1$ donc $b = -1$.

Conclusion : $\boldsymbol{a = 2}$ **et** $\boldsymbol{b = -1}$

On peut donc donner l'expression de *f* : $\boldsymbol{f(x) = 2x - \ln x}$.

14

Solution détaillée :

$f : x \mapsto ax + b + c\ln x \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

a, b, c sont trois **paramètres**.

1°) **Calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention, f n'est pas une fonction polynôme).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = a + \dfrac{c}{x}$

2°) $\mathscr{C}$: courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

H_1 : $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 1).
H_2 : $\mathscr{C}$ passe par le point $\mathrm{B}(2\,;2\ln 2)$.
H_3 : $\mathscr{C}$ admet en B une tangente horizontale.

Déterminons *a*, *b*, *c*.

H_1 permet d'écrire $f(1) = 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow a \times 1 + b + c \times \ln 1 = 1$

$(1) \Leftrightarrow a + b = 1 \quad (1')$ [car $\ln 1 = 0$]

H_2 permet d'écrire $f(2) = 2\ln 2 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow 2a + b + c\ln 2 = 2\ln 2 \quad (2')$

H_3 permet d'écrire $f'(2) = 0 \quad (3)$.

$(3) \Leftrightarrow a + \dfrac{c}{2} = 0 \quad (3')$

Le triplet $(a\,;b\,;c)$ est donc solution du système formé par les équations $(1')$, $(2')$, $(3')$.

Il s'agit d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.
On le résout par substitution puis l'on effectue une vérification (obligatoire pour les systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues).

On peut également résoudre ce système avec la calculatrice ou avec les matrices (cf. chapitre sur la résolution matricielle des systèmes).

$(1')$ donne : $b = 1 - a \quad (1'')$.
$(3')$ donne : $c = -2a \quad (3'')$.

En remplaçant dans $(2')$ on obtient alors : $2\ln 2 = 2a + 1 - a - 2a\ln 2 \quad (2'')$.

$(2'')$ donne : $2\ln 2 - 1 = a(1 - 2\ln 2)$ soit $a = \dfrac{2\ln 2 - 1}{1 - 2\ln 2}$ ou encore $a = -1$.

$(1'')$ donne alors : $b = 2$.

$(3'')$ donne alors : $c = 2$.

On obtient donc $a = -1$ et $b = c = 2$.
On vérifie que ces solutions conviennent (vérification à faire par écrit).
On obtient donc l'expression de la fonction f suivante : $\boldsymbol{f(x) = -x + 2 + 2\ln x}$.

15 **Solution détaillée :**

Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x - 1$.

L'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$ est équivalente à $\ln x - x + 1 \leqslant 0$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln x - x + 1$ (il s'agit d'une fonction auxiliaire).

On va étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ (on peut donner cet ensemble de définition directement sans détailler la recherche)

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

La dérivée doit être donnée sous la forme $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$ pour pouvoir étudier le signe de $f'(x)$.

On dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (faire attention de mettre une double barre sur la dernière ligne au niveau du 0 ; par contre, on ne descend pas les barres simples).

Faire les flèches de variations à la règle.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		+	0^{num}	–	
Signe de x	$0^{\text{déno}}$	+		+	
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	–	
Variations de f	‖	↗	0	↘	

On peut aussi dire que le signe du quotient $\frac{1-x}{x}$ est le même que celui du produit $x(1-x)$ qui est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1 (évidentes d'après la forme factorisée).

Pour les lignes « Signe de $f'(x)$ » et « Variations de *f* », on met une double barre (sachant que la « paroi » de gauche sert pour la première barre, il n'y a donc qu'une barre à ajouter).
$f(1)=0$ (on met cette valeur dans le tableau de variations).

On ne cherche pas les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition car elles ne servent pas pour répondre à la question.

D'après le tableau de variations, *f* admet un maximum global sur $\mathbb{R}_+^*$ égal à 0 (obtenu pour $x=1$).
On peut donc en conclure que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \leqslant 0$ soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x - x + 1 \leqslant 0$ qui donne finalement
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x-1$.

Il s'agit d'une inégalité fondamentale sur le logarithme népérien.

16 $\mathrm{A}=24$

On utilise l'égalité $\ln \mathrm{e}=1$ et les règles algébriques sur la fonction logarithme népérien.

Solution détaillée :

Calculons A.

$\mathrm{A}=5\ln\left(\mathrm{e}^4\right)-2\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+4\ln\sqrt{\mathrm{e}}$

$=5\times 4\ln \mathrm{e}-2(-\ln \mathrm{e})+4\times\frac{1}{2}\ln \mathrm{e}$ (on utilise les règles algébriques du logarithme népérien)

$=20\ln \mathrm{e}+2\ln \mathrm{e}+2\ln \mathrm{e}$

$=20+2+2$

$=24$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

Autre méthode plus rapide :

On utilise directement l'égalité $\ln\left(\mathrm{e}^n\right)=n$ pour tout entier relatif *n* et $\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$.

17

Solution détaillée :

$f : x \mapsto (\ln x)^3$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Démontrons que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculons $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathscr{D}$.
En effet, *f* est une fonction de la forme u^n avec $n=3$ et $u : x \mapsto \ln x$ et on sait que *u* est dérivable sur $\mathscr{D}$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction à une certaine puissance entière : $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$.
On prend $n=3$ et la fonction $u : x \mapsto \ln x$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=3\times\frac{1}{x}\times(\ln x)^2$

$=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

3°) **Dressons le tableau de variations de *f*.**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $3(\ln x)^2$	‖	$+$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

La dérivée de la fonction *f* s'annule en 1.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4°) **Déterminons les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.**

Pour déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition, on utilise les limites de référence de la fonction ln.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc par limite d'un produit (en écrivant $f(x)=\ln x\times\ln x\times\ln x$), $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

On peut aussi utiliser le théorème sur la limite d'une composée qui sera vue dans un chapitre ultérieur.

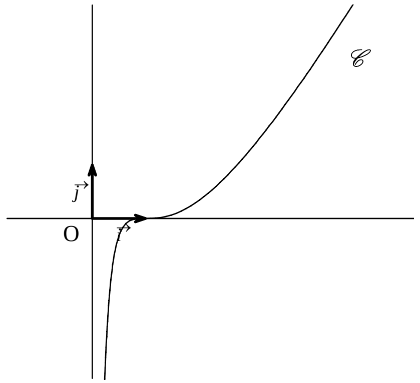
• $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

5°) **Tracé de la courbe**

On effectue un tableau de valeurs en choisissant quelques valeurs de *x*.

x	0,5	1	2	4
$f(x)$ (valeur arrondie au centième)	– 0,33	0	0,33	2,66



La tangente au point d'abscisse 1 est déjà tracée (puisqu'elle est confondue avec l'axe des abscisses).

On a $f'(1) = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
Comme $f(1) = 0$, cette tangente est confondue avec l'axe des abscisses.
Comme *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]1\,;+\infty[$; $\mathscr{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in]0\,;1[$; $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. (La courbe $\mathscr{C}$ traverse la tangente horizontale ; on dit que le point A d'abscisse 1 est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$).

La courbe $\mathscr{C}$ présente une branche parabolique de direction (O*x*) en + ∞ car on peut démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

On vérifie sur calculatrice graphique.

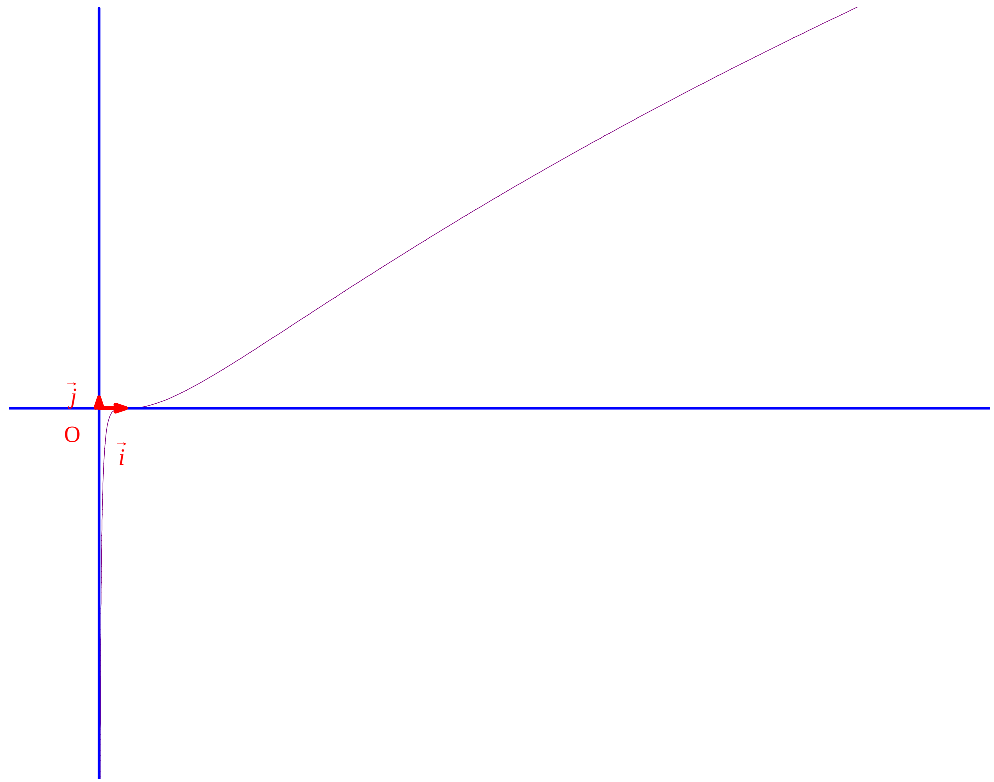
Pour aller plus loin :

La courbe présente également d'ailleurs un deuxième point d'inflexion (autre que le point de coordonnées (1 ; 0)).

On s'en rend compte visuellement en changeant de fenêtre graphique.

Par calcul, on obtient : $f''(x) = \dfrac{3\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.
On voit que la dérivée seconde s'annule et change de signe en 1 et e^2.

Donc $\mathscr{C}$ admet les points d'abscisses 1 et e^2 pour points d'inflexion.



$\boxed{18}$ Ne pas oublier les conditions d'existence. Commencer par donner les conditions d'existence afin d'établir l'ensemble de résolution. $S_1 = \left\{ \dfrac{1}{e} \right\}$; $S_2 = \left\{ \sqrt{e} \right\}$

Solution détaillée :

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + 1 = 0$ (1).

Condition d'existence :

On doit avoir : $x > 0$.
On résout donc l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$(1) \Leftrightarrow \ln x = -1$$
$$\Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \left\{ \dfrac{1}{e} \right\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $1-2\ln x=0$ (2).

Condition d'existence :

On doit avoir : $x>0$.
On résout donc l'équation (2) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(2) \Leftrightarrow -2\ln x=-1$

$\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln\sqrt{\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\mathrm{e}}$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left\{\sqrt{\mathrm{e}}\right\}$.

Autre méthode :

$1-2\ln x=0$
$2\ln x=1$
$\ln\left(x^2\right)=1$
$\ln\left(x^2\right)=\ln\mathrm{e}$
$x^2=\mathrm{e}$
$x=\sqrt{\mathrm{e}}$ ou $x=-\sqrt{\mathrm{e}}$

$\boxed{19}$

Ne pas oublier les conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases}$ soit $x>-2$.

On représente les 3 intervalles sur un même axe (droite réelle en utilisant différentes couleurs).

On cherche les x qui vérifient les 3 conditions « réunies ».

On résout l'équation dans l'intervalle $\left]-2\,;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{1\}$.

N.B. : On peut utiliser le **discriminant réduit** ou les **racines évidentes**.

Rappel :

$ax^2+bx+c\neq 0 \quad (a\neq 0)$

$b'=\dfrac{b}{2}$

$\boxed{\Delta'=b'^2-ac}$

1er cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2e cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3e cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ (1).

Commencer par la (les) condition(s) d'existence.

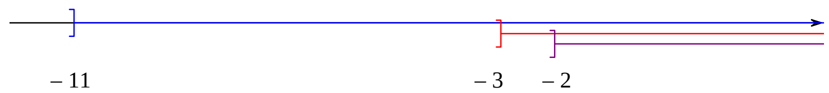
On doit avoir : $\begin{cases} x+3>0 \\ x+2>0 \\ x+11>0 \end{cases}$ (système de conditions).

Ce système est équivalent à $\begin{cases} x>-3 \\ x>-2 \\ x>-11 \end{cases}$ ou encore $x>-2$ (on a réduit le système de conditions).

• Il faut « réduire » le système au maximum.

• Le système est finalement équivalent à une seule inéquation. Comme il y a une seule inéquation, on l'écrit sans accolades.

On cherche l'intersection des 3 intervalles $\left]-11\,;+\infty\right[$, $\left]-3\,;+\infty\right[$ et $\left]-2\,;+\infty\right[$.



On résout l'équation (1) dans l'intervalle $\left]-2\,;+\infty\right[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln\left[(x+2)(x+3)\right]=\ln(x+11)$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)=x+11$

$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (racine évidente) ou $x=-5$ (valeur obtenue par produit des racines)

On a $1\in\left]-2\,;+\infty\right[$ et $-5\notin\left]-2\,;+\infty\right[$.

L'équation (1) a pour solution 1 (unique solution).

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S=\{1\}$.

$\boxed{\textbf{20}}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2-3\ln x-4=0$ (1).

Commencer par la condition d'existence.

On doit avoir $x>0$.
Le domaine de résolution est donc $]0\,;+\infty[$.

On pose $X=\ln x$ (changement d'inconnue).

On peut aussi ne pas poser $X=\ln x$, autrement dit ne pas passer par un changement d'inconnue.

L'équation (1) s'écrit $X^2-3X-4=0$ (1′).
Considérons le polynôme X^2-3X-4.
Les racines sont – 1 (racine évidente) et 4 (obtenue par le produit).

Le discriminant est égal à $\Delta=9+16=25$. $\Delta>0$ donc (1′) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $X_1=\dfrac{3-5}{2}=-1$ et $X_2=\dfrac{3+5}{2}=4$

Or $X=\ln x$.

Donc $(1) \Leftrightarrow \ln x=-1$ ou $\ln x=4$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ou $\ln x=\ln \mathrm{e}^4$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ou $x=\mathrm{e}^4$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln \mathrm{e}^{-1}$ ou $\ln x=\ln \mathrm{e}^4$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-1}$ ou $x=\mathrm{e}^4$

Ces deux solutions appartiennent bien à l'ensemble de résolution.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S=\left\{\mathrm{e}^4\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ (car $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$).

On peut aussi utiliser les racines évidentes ou un programme sur calculatrice pour déterminer les racines d'un polynôme du second degré.

Une méthode fausse :

$(1) \Leftrightarrow 2\ln x-3\ln x-4=0$

$\Leftrightarrow -\ln x-4=0$

$\Leftrightarrow \ln x=-4$

$\Leftrightarrow \ln x=-\ln \mathrm{e}^4$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$

$\boxed{\textbf{21}}$ **Solution détaillée :**

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1)-\ln(x-1)=1$ (1).

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases}$ soit $\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\x>1\end{cases}$ soit $x>1$.

On résout l'équation (1) dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln\dfrac{2x+1}{x-1}=1$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{2x+1}{x-1}=\ln \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}=\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow 2x+1=\mathrm{e}(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-\mathrm{e}x=-\mathrm{e}-1$

$\Leftrightarrow (2-\mathrm{e})x=-\mathrm{e}-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-\mathrm{e}-1}{2-\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$

$(1) \Leftrightarrow \ln(2x+1)=1+\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+1)=\ln \mathrm{e}+\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \ln(2x+1)=\ln[\mathrm{e}(x-1)]$

$\Leftrightarrow 2x+1=\mathrm{e}(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x+1=\mathrm{e}x-\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow 2x-\mathrm{e}x=-\mathrm{e}-1$

$\Leftrightarrow (2-\mathrm{e})x=-\mathrm{e}-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-\mathrm{e}-1}{2-\mathrm{e}}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$

Pour passer de $\dfrac{-\mathrm{e}-1}{2-\mathrm{e}}$ à $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par – 1 : $\dfrac{(-\mathrm{e}-1)\times(-1)}{(2-\mathrm{e})\times(-1)}=\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$. On n'est pas obligé d'effectuer cette transformation. Cette transformation n'a pas d'autre but que d'obtenir un résultat sous une forme plus esthétique.

Il faut vérifier que $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}$ appartient au domaine de résolution c'est-à-dire que $\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-2}\in\,]1\,;+\infty[$.

$\dfrac{e+1}{e-2}$ est un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont positifs.

Comme le numérateur est strictement supérieur au numérateur, on en déduit que $\dfrac{e+1}{e-2}>1$.

> Autres méthodes :
> - calcul mental en disant que e est environ égal à 2,7.
> - calculatrice
> - étude en faisant la différence avec 1 (car le domaine de résolution est $]1\,;+\infty[$ donc on compare $\dfrac{e+1}{e-2}$ avec 1) et en montrant que cette différence est strictement positive (mieux qu'avec la calculatrice).
>
> $\dfrac{e+1}{e-2}-1=\dfrac{3}{e-2}$
>
> $e>2$ donc $e-2>0$ d'où $\dfrac{e+1}{e-2}-1>0$ soit $\dfrac{e+1}{e-2}>1$.

On peut aussi dire que $\dfrac{e+1}{e-2}$ est un quotient à termes positifs dont le numérateur est plus grand que le dénominateur (car $e+1>e-2$) ; par conséquent, ce quotient est plus grand que 1.

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

On a $S=\left\{\dfrac{e+1}{e-2}\right\}$.

22

Pour les conditions d'existence, faire un tableau de signes.

Attention : $x^2>3 \Leftrightarrow x>\sqrt{3}$ ou $x<-\sqrt{3}$ *

Pour la résolution de l'inéquation, faire un tableau de signes.

$S=\left]\sqrt{3}\,;3\right]$

* $x^2-3>0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $x-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	+	
Signe de $x+\sqrt{3}$		$-$	0	+		+	
Signe de $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$		+	0	$-$	0	+	

On peut aussi dire que x^2-3 est un polynôme qui admet $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ pour racines évidentes.

Ce polynôme est donc du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire positif sauf pour x entre les racines.

On peut aussi utiliser la représentation graphique de la fonction « carré ».

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\left(x^2-3\right)\leqslant \ln x+\ln 2$ (1).

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x^2>3 \\ x>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x>\sqrt{3} \text{ ou } x<-\sqrt{3} \\ x>0 \end{cases}$ ce qui donne finalement $x>\sqrt{3}$ (faire un graphique).

On résout donc l'inéquation dans l'intervalle $\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

(1) $\Leftrightarrow \ln\left(x^2-3\right)\leqslant \ln(2x)$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3\leqslant 0$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$ [le polynôme x^2-2x-3 admet pour racines – 1 (racine évidente) et 3 (racine obtenue par le produit des racines d'un polynôme du second degré) ; on peut utiliser un programme sur calculatrice]

On tient compte de l'intervalle de résolution $\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

On fait l'intersection de l'intervalle $[-1\,;3]$.

$[-1\,;3]\cap\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[=\left]\sqrt{3}\,;3\right]$

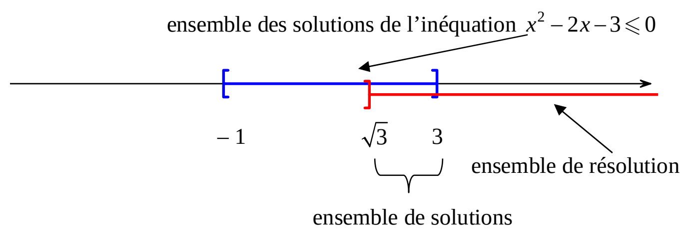
Point important :

On résout l'inéquation dans l'intervalle $\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$ (grâce aux conditions d'existence).

On obtient un polynôme du second degré x^2-2x-3 dont les racines sont – 1 et 3.

On vient donc « croiser » les deux intervalles $[-1\,;3]$ et $\left]\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

D'où $\left]\sqrt{3}\,;3\right]$.



Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\left]\sqrt{3}\,;3\right]$

Autre façon :

$\Delta = 4+12 = 16$

$x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$

$\boxed{23}$ Attention, il s'agit d'un système non linéaire. La seule méthode possible est la méthode de substitution.

$S = \{(5,\ 25)\,;(25,\ 5)\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x+y=30 & \textbf{(1)} \\ \ln x + \ln y = 3\ln 5 & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Ce système est un système non linéaire de deux équations d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.
En effet, l'équation (1) est bien une équation linéaire car de la forme $ax+by=c$ mais pas l'équation (2).

Conditions d'existence de solutions :

On doit avoir $x>0$ et $y>0$.

Le domaine de résolution du système est $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Ou :
On résout le système dans l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$(2) \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln(5^3)$

$\Leftrightarrow \ln(xy) = \ln 125$

$\Leftrightarrow xy = 125 \quad (2')$

L'égalité (1) donne la somme des nombres cherchés et l'égalité $(2')$ donne le produit des nombres cherchés.

On se réfère à une propriété du cours sur le second degré : « recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit ».

Pour déterminer les couples solutions, on considère le polynôme $P(X) = X^2 - 30X + 125$.

> *x* et *y* sont les racines de $P(X)$.

> On utilise la variable *X* (et pas *x*).
> On peut aussi nommer la variable *t*, *u* … toute lettre à l'exception de *x* et *y* pour ne pas engendrer de confusion.

> En effet, deux nombres ont pour somme *S* et pour produit *P*, si et seulement si ils sont racines du polynôme $X^2 - SX + P$ (polynôme du second degré).

On calcule le discriminant réduit de $P(X)$.

$\Delta' = (-15)^2 - 1\times 125 = 225 - 125 = 100$

$\Delta' > 0$ donc $P(X)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $X_1 = \dfrac{15-10}{1} = 5$ et $X_2 = \dfrac{15+10}{1} = 25$.

Les solutions du système sont donc les couples $(5\,;25)$ et $(25\,;5)$ [les deux couples appartiennent bien au domaine de résolution].

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=25\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=25\\y=5\end{cases}$

Ancienne version :

On résout donc le système dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ \ln(xy) = \ln(5^3)\end{cases}$

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ \ln(xy) = \ln 125\end{cases}$

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\ xy = 125\end{cases}$

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow$ *x* et *y* sont les solutions de l'équation du second degré $X^2 - 30X + 125 = 0$ (cf. explication plus bas)

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=25\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=25\\y=5\end{cases}$ (voir explication ci-après, résolution de l'équation à l'aide du discriminant réduit ou de la calculatrice)

→ On cherche deux réels *x* et *y* connaissant leur somme (30) et leur produit (125).
On sait donc que *x* et *y* sont les solutions de l'équation $X^2 - 30X + 125 = 0$ (E).

> En effet, si deux nombres ont pour somme *S* et pour produit *P*, alors ils sont solutions de l'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$.

Le discriminant réduit de (E) est égal à $\Delta' = 100$.

Les solutions de (E) sont $X_1=\dfrac{15-10}{1}=5$ et $X_2=\dfrac{15+10}{1}=25$.

→ Si on n'utilise pas la propriété de recherche de deux réels connaissant leur somme et leur produit, on effectue la substitution.

L'ensemble des solutions du système est $S=\{(5\,;25)\,;(25\,;5)\}$.

On effectue immédiatement la vérification dans le système initial. On peut aussi vérifier la résolution à l'aide de la calculatrice ou de dcode.

Rappel :

Soit x et y deux nombres de somme S et de produit P.
x et y sont solutions de l'équation du second degré $X^2-SX+P=0$.

On aurait pu observer dès le début que ce système est « symétrique » : si (x ; y) est solution, alors (y ; x) est aussi solution d'où la répercussion dans l'ensemble des solutions.

24

On utilise le logarithme népérien ; les entiers naturels cherchés sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 66.

Solution détaillée :

Déterminons par le calcul les entiers naturels n tels que $(0,9)^n\leqslant 10^{-3}$ (1).

On utilise la fonction logarithme népérien ou la fonction logarithme décimal ou n'importe quelle fonction logarithme de base quelconque.
Le plus logique est toutefois la fonction logarithme népérien.

La première étape consiste à composer chacun des deux membres. On a tout fait le droit.
On utilise l'équivalence fondamentale liée au fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: pour $(a\,;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $a\leqslant b \Leftrightarrow \ln a\leqslant \ln b$.

On écrit d'une couleur différente les ln que l'on « rajoute » de part et d'autre.

(1) $\Leftrightarrow \ln\left[(0,9)^n\right]\leqslant \ln\left(10^{-3}\right)$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$)

$\Leftrightarrow n\ln 0,9\leqslant -3\ln 10$ (on peut laisser $\ln\left(10^{-3}\right)$; cela ne change rien pour la calculatrice)

$\Leftrightarrow n \boxed{\geqslant} -\dfrac{3\ln 10}{\ln 0,9}$ (en effet, $0,9<1$ donc $\ln 0,9<0$)

Il est fondamental de bien noter que ln 0,9 est strictement négatif.
Quand on multiplie ou que l'on divise les deux membres d'une inégalité par un réel négatif, le sens de l'inégalité change de sens.

Avec la fonction logarithme décimal, on a $n\geqslant -\dfrac{3}{\log 0,9}$.

D'après la calculatrice, on a : $-\dfrac{3\ln 10}{\ln 0,9}=65,563...$ (il est possible de démontrer qu'il s'agit d'un nombre irrationnel).

Or $n\in\mathbb{N}$ donc (1) $\Leftrightarrow n\geqslant 66$ (car le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $-\dfrac{3\ln 10}{\ln 0,9}$ est 66).

On peut dire que l'ensemble des entiers naturels n cherchés est $[\![66\,;+\infty[$ (notation d'intervalle d'entiers).

Autre idée de Vicente Texeira donnée le 13-10-2021 :
On écrit $(0,9)^n=\mathrm{e}^{n\ln 0,9}$.

Autre idée toujours de Vicente Texeira :

On utilise le logarithme de base 0,9.
(1) $\Leftrightarrow \log_{0,9}(0,9)^n\geqslant \log_{0,9}\left(10^{-3}\right)$ (la fonction $\log_{0,9}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\Leftrightarrow n\geqslant -3\log_{0,9}10$

L'application photomaths donne l'affichage :
$-3\log_{0,9}10=65,56304$ (évidemment, il ne s'agit pas d'un signe égal ; photomaths s'en fiche)

$\left[\!\left[-3\log_{\frac{9}{10}}(10)\,;+\infty\right[\right.$

Remarque :

Le plus petit entier naturel n tel que $(0,9)^n\leqslant 10^{-3}$ est 66.

L'énoncé demandait de résoudre l'exercice par le calcul.

Sinon, on aurait pu le résoudre avec la calculatrice :

- soit par essais successifs après avoir défini la suite de terme général $(0,9)^n$;

- soit par la programmation (programme classique de détermination de valeur seuil avec un « While »).

Attention, la résolution proposée par photomaths n'est pas très claire.

25

Réponses : 1°) T_a : $y=\dfrac{x}{a}-1+\ln a$; 2°) $a=\mathrm{e}^2$.

Solution détaillée :

$f: x\mapsto \ln x$
$\mathscr{C}$: courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan

1°) Déterminons l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a ($a>0$).

On sait que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

T_a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$, soit $y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\ln a$, ou encore $y=\dfrac{x}{a}-1+\ln a$.

2°) Déterminons l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(0, 1).

On rédige par chaîne d'équivalences.

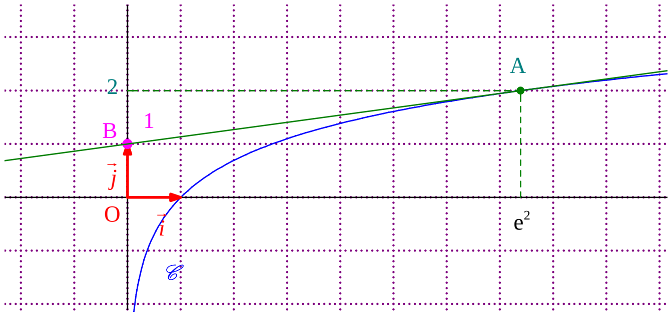
$$\begin{aligned} \mathrm{B}\in T_a &\Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}=\frac{x_{\mathrm{B}}}{a}-1+\ln a \quad {}^*\\ &\Leftrightarrow \frac{0}{a}-1+\ln a=1\\ &\Leftrightarrow \ln a=2\\ &\Leftrightarrow a=\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Pour que T_a passe par B, <u>il faut et il suffit que</u> a soit égal à e^2.

*On peut particulariser x et y pour un point de la droite (il faut bien évidemment que ce soit le même point).
Le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}$ donc $y_{\mathrm{A}}=\ln\left(\mathrm{e}^2\right)=2$.

$\mathrm{A}\left(\mathrm{e}^2, 2\right)$

Avec la calculatrice, on trouve : $\mathrm{e}^2=7{,}3890...$.
On fait un graphique. On place le point A (approximativement) et le point B.



On peut aussi utiliser le fait que A appartient à T_a.

Par contre, utiliser le fait que A appartient à la fois à $\mathscr{C}$ et à T_a en écrivant l'équation $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}^2}-1+\ln \mathrm{e}^2$ … ne conduit à rien du tout.
La droite (AB) est la tangente à $\mathscr{C}$ en A (il s'agit de la tangente T_{e^2}).
On peut démontrer que $\mathscr{C}$ est en dessous de (AB). En fait, $\mathscr{C}$ est en dessous de toutes ses tangentes.

À partir de cet exercice, voir le corrigé détaillé beaucoup plus loin.

$\boxed{26}$ 1°) $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; 2°) On rencontre une forme indéterminée du type : "$\infty-\infty$".
3°) Le but de cette question est lever l'indétermination.
Il s'agit d'une « factorisation forcée ».
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\boxed{27}$ 1°) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}_+^*$; 2°) On rencontre une F.I du type "$\infty-\infty$".
3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
La technique du changement de variable est possible mais à éviter pour l'instant.

$\boxed{28}$ 1°) $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$; 2°) On rencontre une F.I. du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$". 3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$

$\boxed{29}$ 1°) $\mathscr{D}=]0\,;1[\bigcup]1\,;+\infty[$
Il y a trois bornes pour l'ensemble de définition : 0, 1, + ∞.
On étudie la limite de f en 0 (uniquement à droite car la fonction est n'est pas définie pour des valeurs de x inférieures à 0), la limite de f en 1 par valeurs supérieures et inférieures (à gauche et à droite).

2°) $\lim\limits_{0^+} f=0$; $\lim\limits_{+\infty} f=0$; $\lim\limits_{1^-} f=-\infty$; $\lim\limits_{1^+} f=+\infty$

30 **Reconnaissance d'asymptote oblique**

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

• Démontrons que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en + ∞.

On observe la forme de l'expression de la fonction *f*.

$$f(x)=\underbrace{x+1}_{\text{partie affine}}\underbrace{-\frac{\ln x}{x}}_{\text{partie qui tend vers 0 quand } x\to+\infty \text{ (limite de référence)}}$$

On observe que cette expression est constituée d'une partie affine et d'une partie qui tend vers 0.

Pour démontrer que la courbe admet une asymptote oblique, on effectue un calcul de limite.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ (limite de référence) donc on en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=x+1$ pour asymptote oblique <u>en + ∞</u> (précision qu'il ne faut pas oublier de donner).

• Étudions la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ dans un tableau.

On pose $g(x)=f(x)-(x+1)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad g(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$

x	0		1		+ ∞
Signe de – ln x	||	+	0	–	
Signe de x	0	+		+	
Signe de $-\dfrac{\ln x}{x}$	||	+	0	–	
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ	||	$\mathscr{C}$ est strict. au-dessus de Δ	$\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 1	$\mathscr{C}$ est strict. au-dessous de Δ	

$\forall x\in\left]0\,;1\right[\quad g(x)>0$ soit $f(x)-(x+1)>0$ donc $f(x)>x+1$.

$\forall x\in\left]1\,;+\infty\right[\quad g(x)<0$ soit $f(x)-(x+1)<0$ donc $f(x)<x+1$.

Donc :

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de Δ pour $x\in\left]1\,;+\infty\right[$.
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de Δ pour $x\in\left]0\,;1\right[$.
- $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 1.

Ou mieux :

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de Δ sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$.
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de Δ sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.
- $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 1.

Le caractère « asymptote » de Δ ne concerne que le voisinage de + ∞.
Rien n'empêche cependant d'étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ sur le domaine tout entier.

Vérifions sur la calculatrice graphique.

On vérifie avec la calculatrice graphique.

31 $f : x\mapsto \dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$ (on observera que *f* n'est pas une fonction rationnelle)

1°) **Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}\ln x-1\neq 0\\ x>0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}\ln x\neq 1\\ x>0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x\neq \mathrm{e}\\ x>0\end{cases}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*\setminus\{\mathrm{e}\}$

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer $f'(x)$.**

f est dérivable sur $\mathscr{D}$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$, la fonction figurant au dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathscr{D}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{\mathrm{e}\}\quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x-2)\times\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{\ln x}-1-\cancel{\ln x}+2}{x}}{(\ln x-1)^2}\quad \left(\text{ou moins bien }=\frac{\frac{\ln\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}-\frac{\ln\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{2}{x}}{(\ln x-1)^2}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{x(\ln x-1)^2}$$

$\boxed{32}$

$f : x \mapsto \ln(2x-1)$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.**

$f(x)$ existe si et seulement si $2x-1>0$

si et seulement si $x>\frac{1}{2}$

$\mathscr{D}=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

2°) **Justifions que *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculons $f'(x)$.**

f est la composée d'une fonction affine (non nulle) suivie de la fonction logarithme népérien donc *f* est dérivable sur $\mathscr{D}$.

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ (formule du cours donnant la dérivée de $x\mapsto\ln(ax+b)$ ou dérivée de ln *u* où *u* est une fonction : $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$)

$\boxed{33}$ $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f=0$ (FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; il faut faire une réécriture : $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$).

$\boxed{34}$ $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f=0$ (FI du type « $0\times\infty$ » : écrire $f(x)=x-x\ln x$ et on utilise $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$) ; $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ (pas de problème ; limite d'un produit)

$\boxed{35}$ $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f=-\infty$ (écrire : $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$ et faire chaque limite ; il faut détailler $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ qui n'est pas une limite de référence) ; $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ (on utilise la même réécriture)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}x=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty.$$

$\boxed{36}$ $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{0^+} f=0$ (on utilise la limite de référence $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$) ; $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ (FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; écrire $f(x)=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$).

$\boxed{37}$

$f : x\mapsto \ln\left|x^2-1\right|$

On commence par donner l'ensemble de définition de *f*.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et $\forall x\in\mathscr{D}\quad f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ (propriété et formule sur $\ln|\,u\,|$)

$\boxed{38}$

$f : x\mapsto \ln|3x-1|$

On commence par donner l'ensemble de définition de *f*.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$

f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et $\forall x\in\mathscr{D}\quad f'(x)=\frac{3}{3x-1}$ (propriété et formule sur $\ln|\,u\,|$)

Rédaction pour les ensembles de définition : présentation à l'aide d'une chaîne d'équivalences

« $f(x)$ existe si et seulement si …..

si et seulement si …..

si et seulement si ….. »

$f(x)$ et pas f !

Ne pas confondre CE (conditions d'existence) pour les équations et les inéquations et ensemble de définition d'une fonction.

Exercices $\boxed{\mathbf{6}}$ et $\boxed{\mathbf{7}}$:

Pour étudier l'ensemble de définition, on est obligé d'analyser les **types de problèmes** qui se posent.

Tableaux de signes : je demande qu'ils soient faits à la règle (pas à main levée !).

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$

1°) **Ensemble de définition**

La fonction f est la composée d'une fonction rationnelle suivie de la fonction logarithme népérien.

2 types de problèmes :

- le quotient doit exister ;
- le quotient doit être strictement positif

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+3} > 0 \end{cases}$ (l'accolade signifie « et »)

On dresse un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
SGN de $2x-1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de $x+3$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $\dfrac{2x-1}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

2°) Pour quels x de $\mathscr{D}$ peut-on écrire $f(x) = \ln(2x-1) - \ln(x+3)$ (1) ?

L'égalité $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ est valable pour $a > 0$ et $b > 0$.

L'égalité (1) est valable pour tout réel x tel que $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases}$, soit finalement $x > \dfrac{1}{2}$.

Exercices $\boxed{8}$ et $\boxed{9}$:

Pour les ensembles de définition, on étudie les **types de problèmes** qui se posent.

On a dans le cours que ln *x* ne peut s'exprimer à l'aide des symboles algébriques usuels ; une fonction avec un (ou plusieurs) ln **n'est pas une fonction rationnelle**.

« Une fonction *f* est dérivable sur D » signifie qu'il existe une fonction dérivée *f'* sur D.

Il n'existe qu'une fonction logarithme népérien ; dire « *f* est dérivable comme fonction logarithme népérien » est faux.

On utilise les règles sur les sommes, produits, quotients de fonctions dérivables.

Solution détaillée du $\boxed{8}$:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

1°) **Ensemble de définition**

Il y a deux types de problèmes :

- le ln *x* doit exister ;
- le *x* doit être non nul.

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ (rappel : l'accolade signifie « et »)

si et seulement si $x>0$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Dérivabilité et dérivée**

f n'est pas une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes).
Pour justifier la dérivabilité, on est donc obligé d'utiliser les règles sur les opérations de fonctions dérivables.
Ceci est propre à la Terminale car la plupart des fonctions étudiées en 1[ère] étaient des fonctions polynômes ou rationnelles (à part, quelques fonctions trigonométriques).

Considérons les fonctions *u* et *v* définies par $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x$.
La fonction *u* est dérivable sur]0 ; +∞[(premières lignes du cours sur la fonction logarithme népérien : « la fonction logarithme népérien est dérivable sur]0 ; +∞[).
La fonction *v* est dérivable sur ℝ donc par restriction sur]0 ; +∞[et ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

D'après la règle sur les quotients de fonctions dérivables sur un intervalle, *f* est dérivable sur]0 ; +∞[.

On applique la formule $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Solution détaillée du $\boxed{9}$:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

1°) **Ensemble de définition**

Il y a deux types de problèmes :

- le ln *x* doit exister ;
- le $x+1$ doit être non nul.

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x\neq -1 \end{cases}$

si et seulement si $x>0$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Dérivabilité et dérivée**

Considérons les fonctions *u* et *v* définies par $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x+1$.
La fonction *u* est dérivable sur]0 ; +∞[.
La fonction *v* est dérivable sur ℝ donc par restriction sur]0 ; +∞[et ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

D'après la règle sur les quotients de fonctions dérivables sur un intervalle, *f* est dérivable sur]0 ; + ∞[.

On applique la formule $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(x+1)-\ln x\times 1}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x\ln x}{x}\times\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

Version courte pour justifier la dérivabilité :

f est dérivable sur]0 ; + ∞[comme quotient de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[(celle du dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle).

$\boxed{26}$ 1°) $\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$; 2°) On rencontre une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$". ; 3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x - 3\ln x + 1$ (on observera que f n'est pas une fonction polynôme).

On cherche la limite de f en $+\infty$.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.**

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Identifions la forme indéterminée que l'on rencontre.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-3\ln x+1)=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type : "}\infty-\infty\text{".}$$

3°)

• **Démontrons que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=x\left(1-3\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)$.**

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f(x)=x-3\ln x+1$$
$$=x\left(1-3\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)\qquad\text{(factorisation forcée)}$$

• **Déduisons-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3\dfrac{\ln x}{x}\right)=0\ \text{ (provient de la limite de référence }\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\text{)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-3\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-3\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}.$$

$\boxed{27}$ $f : x\mapsto (\ln x)^2-5\ln x+1$

On cherche la limite de f en $+\infty$.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.**

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

2°) **Identifions la forme indéterminée que l'on rencontre.**

On rencontre une F.I du type "$\infty-\infty$".

3°)

• **Factorisons $f(x)$ par $(\ln x)^2$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.**

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\quad \ln x\neq 0$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\quad f(x)=(\ln x)^2\left[1-\frac{5}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right]$$

• **Déduisons-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.**

Cette nouvelle écriture permet de lever l'indétermination.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{\ln x}+\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{5}{\ln x}+\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right]=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}.$$

Autre façon pour déterminer la limite de f en $+\infty$

On peut aussi factoriser par $\ln x$ au lieu de $(\ln x)^2$ en effectuant une *factorisation partielle*.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\quad f(x)=\underbrace{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\ln x}}\,(\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\ln x-5}})}_{}+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Remarque pour les exercices $\boxed{28}$ à $\boxed{36}$:

Seules les bornes ouvertes d'un domaine de définition nécessitent un calcul de limite.

$\boxed{28}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{5\ln x - 2}{\ln x + 1}}$ (on observera que f n'est pas une fonction rationnelle).

On cherche la limite de f en $+\infty$.

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.**

$$f(x) \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right\}$.

2°) **Identifions la forme indéterminée que l'on rencontre.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (5\ln x - 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc en } +\infty \text{ on rencontre une F.I. du type } \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}.$$

3°) **Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{\mathrm{e}} ; 1\right\} \quad f(x) = \frac{\cancel{\ln x}\left(5 - \dfrac{2}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)} = \frac{5 - \dfrac{2}{\ln x}}{1 + \dfrac{1}{\ln x}}$$

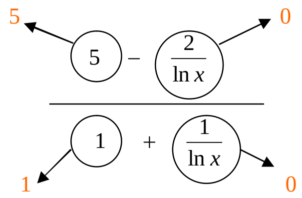
On écrit $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}} ; 1\right\}$ car en mettant $\ln x$ en facteur, on fait apparaître des quotients dont le dénominateur est $\ln x$.

$\ln x$ doit donc être non nul.

Il est bien évident que normalement, on ne peut pas le savoir avant d'avoir fait la mise en facteur.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 - \dfrac{2}{\ln x}\right) = 5 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5}.$$

Autre présentation (au brouillon) :



$\boxed{29}$

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.**

$$f(x) \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \ln 1 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{ 1 \}$.

On peut aussi écrire : $\mathscr{D} = \left]0 ; 1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$.

2°) **Étudions les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.**

Les bornes de $\mathscr{D} = \left]0 ; 1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$ sont 0, 1 et $+\infty$ (trois bornes « ouvertes »).

La fonction f est définie dans un voisinage de 0 à droite mais pas à gauche.
On étudie donc seulement la limite en 0^+.

La fonction f est définie dans un voisinage de 1 à gauche et à droite.
On étudie donc seulement la limite en 1^+ et en 1^-.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty}$.

On vérifie les résultats sur la calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

Remarque :

$x\longrightarrow1^+$ signifie $x\longrightarrow1$ avec $x>1$

$x\longrightarrow1^-$ signifie $x\longrightarrow1$ avec $x<1$

On sait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc comme *f* est l'inverse de la fonction logarithme népérien, on en déduit que *f* est strictement décroissante sur chacun des intervalle sur lesquels elle est définie.

On peut dresser le tableau de variations de *f* sur son ensemble de définition avec les limites.

x	0		1		$+\infty$
Variations de *f*	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

x	0		1		$+\infty$
Limites et variations	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

33 $f: x\mapsto \dfrac{1-\ln x}{x}$

• Déterminons l'ensemble de définition de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x>0\\x\neq0\end{cases}$

si et seulement si $x>0$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

• Calculons les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.

Limite en 0^+

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(1-\ln x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+} x=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty}$.

important car détermine

On précise le « signe » du 0 car cette limite est une limite intermédiaire qui nous permet de trouver la limite « finale ».

Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On effectue une réécriture.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ (limite de référence)}\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une différence $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

34

$f: x\mapsto x(1-\ln x)$

• Déterminons l'ensemble de définition de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $x>0$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

• Calculons les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.

Limite en 0^+

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} x=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}(1-\ln x)=+\infty\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une FI du type « $0\times\infty$ ».

(on ne marque pas les signes de l'infini dans les formes indéterminées)

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=x-x\ln x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{(limite de référence)}\end{array}\right\}$ donc par limite d'une différence $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0}$.

Limite en $+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

$\boxed{35}$ $f: x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x}$

• Déterminons l'ensemble de définition de *f*.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$

• Calculons les limites de *f* aux bornes de $\mathscr{D}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}$

Limite en 0^+ :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=-\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$.

(sans transformer l'écriture on peut aussi faire :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0^+\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{2x}=-\infty$).

Limite en $+\infty$:

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

$\boxed{36}$

$f: x\mapsto \dfrac{x\ln x}{x+1}$

Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x>0\\x+1\neq 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x>0\\x\neq -1\end{cases}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathscr{D}=\left]0\,;+\infty\right[$)

Limite en 0^+

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0}$.

Ludovic Regnault le 15-1-2013

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

On peut parler de limite de $x+1$ en 0^+ même si ce n'est pas une limite.
« C'est une valeur » comme il m'a dit à l'oral me semble-t-il.

Limite en $+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\end{array}\right\}$ donc on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On effectue une réécriture.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}=\dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

37

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left| x^2 - 1 \right|$.

On commence par déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $\left| x^2 - 1 \right| > 0$

si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

On peut aussi écrire $\mathscr{D}$ comme réunion de deux intervalles : $\mathscr{D} = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]-1\,;1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$ (écriture pas intéressante ici car beaucoup plus longue).

Pour calculer la dérivée, on applique directement le résultat sur la dérivée du logarithme népérien de la valeur absolue d'une fonction ce qui évite de distinguer des cas.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

38

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left| 3x - 1 \right|$.

On commence par déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de *f*.

$f(x)$ existe si et seulement si $\left| 3x - 1 \right| > 0$

si et seulement si $\left| 3x - 1 \right| \neq 0$

si et seulement si $3x - 1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq \dfrac{1}{3}$

$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

On peut aussi écrire $\mathscr{D}$ comme réunion de deux intervalles : $\mathscr{D} = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Pour calculer la dérivée, on applique directement le résultat sur la dérivée du logarithme népérien de la valeur absolue d'une fonction ce qui évite de distinguer des cas.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3}{3x - 1}$