$1^{\text{ère}}$ S

Valeur absolue (3)

Plan :

I. Notation de la distance entre deux réels

II. Notation de la valeur absolue d'un réel

III. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues en utilisant la définition

IV. Propriétés (déjà vues dans le chapitre précédent)

V. Règle pour la résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue

VI. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues par le calcul

VII. Expression de la distance de deux réels à l'aide de la valeur absolue

VIII. Propriétés algébriques de la valeur absolue

Dans ce chapitre, nous allons donner la notation mathématique de la valeur absolue. Cela permettra d'écrire plus commodément les calculs et les propriétés.

I. Notation de la distance entre deux réels

1°) Notation

La distance entre deux réels *x* et *y* est notée $\mathrm{d}(x\,;y)$ ou $\mathrm{d}(y\,;x)$. On lit « distance entre *x* et *y* » ou « distance entre *y* et *x* ».

2°) Exemple

On cherche la distance entre les nombres – 1 et 4.

$\mathrm{d}(-1\,;4)=\mathrm{d}(4\,;-1)=4-(-1)=5$

3°) Commentaires

Il n'y a pas d'ordre dans la notation pour écrire la distance de deux réels. Pour désigner la distance entre deux réels *x* et *y*, on peut tout aussi bien écrire $\mathrm{d}(x\,;y)$ ou $\mathrm{d}(y\,;x)$.
En revanche, il y a un ordre dans le calcul. La distance est égale au plus grand des deux nombres moins le plus petit.

Il n'y a pas d'intérêt à mettre dès le départ les nombres dans l'ordre dans la notation $\mathrm{d}(x\,;y)$.

Le résultat d'une distance est toujours positif ou nul.

La distance entre deux réels *x* et *y* est parfois appelée écart entre les réels *x* et *y*.

II. Notation de la valeur absolue d'un réel

1°) Notation

La valeur absolue d'un réel *x* quelconque est notée $|\,x\,|$. On lit « valeur absolue de *x* ».
Par définition, on a : $|\,x\,|=\mathrm{d}(0\,;x)$.

2°) Exemples

$|\,2{,}54\,|=2{,}54$

$|\,-5{,}7\,|=5{,}7$

$|\,-2\sqrt{3}\,|=2\sqrt{3}$

$|\,1-6\,|=|\,-5\,|=5$

x désigne un réel quelconque.
$|\,x+4\,|=$ valeur absolue de $x+4$

3°) Commentaires

• Il s'agit de la notation qui apparaît à l'écran des calculatrices TI pour les modèles les plus récents.

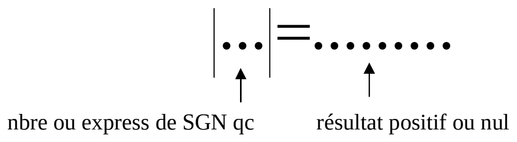
• Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul mais la quantité entre les barres peut être positive ou négative.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\, x \,| \geqslant 0$

$|\, x \,| = 0$ si et seulement si $x = 0$

• On peut faire des calculs à l'intérieur d'une valeur absolue.

À mettre sur fiche :



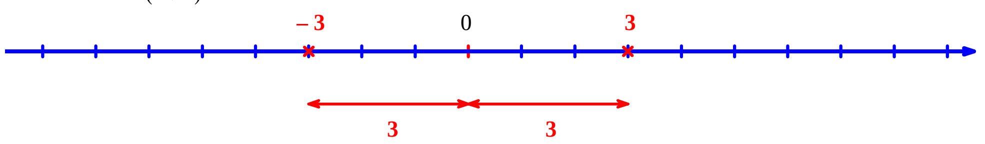
III. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues en utilisant la définition

1°) Exemple 1

Résoudre l'équation $|\, x \,| = 3$ (1).

(1) signifie que la distance entre 0 et x est égale à 3.

$\mathrm{d}(0\,;\,x) = 3$



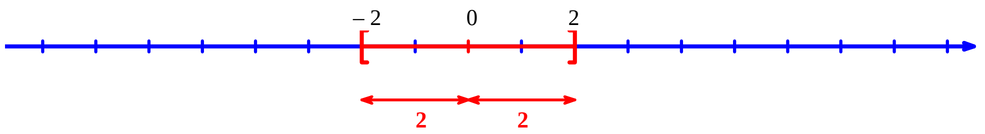
L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{-3\,;3\}$.

2°) Exemple 2

Résoudre l'inéquation $|\, x \,| \leqslant 2$ (2).

(2) signifie que la distance entre 0 et x est inférieure ou égale à 2.

$\mathrm{d}(0\,;\,x) \leqslant 2$



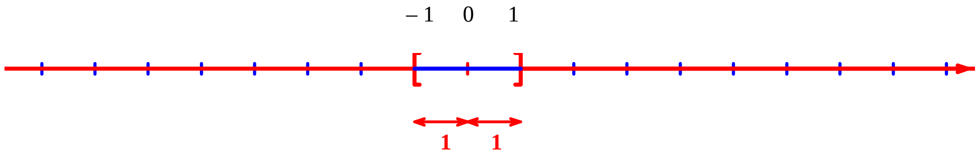
L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = [-2\,;2]$.

3°) Exemple 3

Résoudre l'inéquation $|\, x \,| > 1$ (3).

(3) signifie que la distance entre 0 et x est strictement supérieure à 1.

$\mathrm{d}(0\,;\,x) > 1$



L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

IV. Propriétés (déjà vues dans le chapitre précédent)

On réécrit les propriétés de la valeur absolue en utilisant la notation de la valeur absolue qui a été donnée dans le paragraphe **II**.

1°) Propriété 1

x est un réel quelconque.

On a : $|-x| = |\, x \,|$.

2°) Propriété 2

x et y sont deux réels quelconques.

On a :

$|\, x \,| = |\, y \,|$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.

3°) Propriété 3

$$|\, x \,| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Il faut vraiment retenir de manière complète cette propriété.
Surtout ne pas écrire, $|x| = x$ ou $-x$ car sans précision supplémentaire, cela ne veut rien dire.
Ne pas écrire non plus $|x| = \pm x$.
Donc ne pas retenir la propriété sous la forme $|x| = x$ ou $-x$ ni sous la forme $|x| = \pm x$.

4°) Propriété 4

x est un réel quelconque.

$\sqrt{x^2} = |x|$

On peut également noter que pour tout réel x, on a : $|x|^2 = x^2$.

V. Règle pour la résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue

1°) Énoncé

a est un réel strictement positif fixé.

$|X| = a$ équivaut à $X = a$ ou $X = -a$.

$|X| \leqslant a$ équivaut à $-a \leqslant X \leqslant a$.

$|X| \geqslant a$ équivaut à $X \leqslant -a$ ou $X \geqslant a$.

2°) Commentaires

Il est important de souligner qu'il s'agit chaque fois d'une équivalence.
Ces propriétés se retiennent aisément si l'on a en tête les images mentales associées en termes de distances faites dans le paragraphe **III**.

VI. Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues par le calcul

1°) Exemple 1

Résoudre l'équation $|x-2| = 3$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x-2=3$ ou $x-2=-3$
$x=5$ ou $x=-1$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{5\,;-1\}$.

2°) Exemple 2

Résoudre l'inéquation $|x-1| \leqslant 2$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$-2 \leqslant x-1 \leqslant 2$
$-1 \leqslant x \leqslant 3$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = [-1\,;3]$.

3°) Exemple 3

Résoudre l'inéquation $|x+4| > 5$ (3).

(3) est successivement équivalente à :

$x+4 < -5$ ou $x+4 > 5$
$x < -9$ ou $x > 1$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-9[\cup]1\,;+\infty[$.

VII. Expression de la distance de deux réels à l'aide de la valeur absolue

1°) Règle

La distance entre deux réels a et b est donnée par la formule $\mathrm{d}(a\,;b) = |a-b|$.

On a aussi : $\mathrm{d}(a\,;b) = |b-a|$.
En effet, $b-a = -(a-b)$ et l'on sait qu'un nombre et son opposé ont la même valeur absolue ($\forall x \in \mathbb{R}$ $|-x| = |x|$).
On retiendra que **la distance entre deux réels a et b est égale à $|a-b| = |b-a|$.**

2°) Démonstration

<u>1[er] cas</u> : $a \geqslant b$

$\mathrm{d}(a\,;b) = a-b$

$|a-b| = a-b$

<u>**2[e] cas**</u> **:** $a \geqslant b$

$\mathrm{d}(a\,;b) = b - a$

$|\,a - b\,| = -(a - b) = b - a$

Conclusion : Dans les deux cas, on a : $\mathrm{d}(a\,;b) = |\,a - b\,|$.

3°) Exemples

$\mathrm{d}(1\,;\pi) = |\,1 - \pi\,|$
$\mathrm{d}(x\,;2) = |\,x - 2\,|$
$\mathrm{d}(x\,;-1) = |\,x + 1\,|$

VIII. <u>Propriétés algébriques de la valeur absolue</u>

Les propriétés sont admises sans démonstration.

1°) Valeur absolue d'un produit

Pour tous réels *x* et *y*, on a : $|\,xy\,| = |\,x\,| \times |\,y\,|$

La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues.

2°) Valeur absolue d'un quotient

Pour tous réels *x* et *y* ($y \neq 0$), on a : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|\,x\,|}{|\,y\,|}$.

La valeur absolue d'un quotient est égale au quotient des valeurs absolues.

● Cas particulier

Pour tout $x \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|\,x\,|}$.

3°) Valeur absolue d'une somme (inégalité triangulaire)

● Règle

Pour tous réels *x* et *y*, on a : $|\,x + y\,| \leqslant |\,x\,| + |\,y\,|$.

La valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues.

● En général, la valeur absolue d'une somme n'est pas égale à la somme des valeurs absolues.
Exemple :

$x = 5$ et $y = -3$

$|\,x + y\,| = |\,5 - 3\,| = 2$
$|\,x\,| + |\,y\,| = |\,5\,| + |-3\,| = 5 + 3 = 8$

Les deux résultats sont différents.

● Lorsque *x* et *y* sont deux nombres de même signe, on a : $|\,x + y\,| = |\,x\,| + |\,y\,|$ (démonstration facile).

Le 20 septembre 2015

J'avais noté :

$\boxed{\mathbf{1}}$ application de la propriété $|\,x\,| = x$ si ….

$|\,x\,| = -x$ si ….

$\boxed{\mathbf{2}}$ $|\,x\,|^2 = x^2$

Résolution de l'équation $|\,x\,| = m$ (E) où m est un réel donné.

On discute suivant le signe de m.

1$^{\text{er}}$ cas : $m > 0$

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{-m\,;m\}$.

2$^{\text{e}}$ cas : $m = 0$

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{0\}$.

3$^{\text{e}}$ cas : $m < 0$

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \varnothing$.

Inéquations « casse-pieds »

$|\,x\,| > m$ et $|\,x\,| < m$

Histoire de la valeur absolue

• Livre Symbole 1$^{\text{ère}}$ S édition 2011 page 58 (Un peu d'histoire…)

Les différentes définitions de la valeur absolue

Jusqu'à la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, la notion de valeur absolue n'existe pas encore, mais les mathématiciens en parlent implicitement en écrivant par exemple qu'un nombre négatif est construit à partir « d'un signe » et « d'un nombre », ou encore en parlant de « la distance à partir de zéro ». C'est le mathématicien Augustin Louis Cauchy (1789-1857) qui introduit en 1821 le concept de valeur absolue dans son cours d'analyse de l'École Polytechnique.

Avant la définition proposée par Cauchy, on disait qu'un réel était construit à partir « d'un signe » et « d'un nombre ».