TS1

Contrôle du jeudi 2 février 2017 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

• Le barème est donné sur 20.

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

Une entreprise fabrique divers produits à base de chocolat pour lesquels elle se fait livrer des fèves de cacao.
Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents.
Le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième apporte 30 % et le dernier apporte 20 %.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

Pour cet exercice, aucune justification n'est demandée.
On écrira les réponses directement.

1°) On choisit au hasard une fève dans le stock reçu.
Déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur 1 sachant qu'elle est conforme.
On donnera le résultat sous la forme de fraction irréductible.

2°) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion des fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes.
Le fournisseur 1 fournit alors une proportion p de fèves et l'entreprise 2 fournit le reste.
Déterminer la valeur de p pour que l'objectif soit atteint.
On donnera le résultat sous forme décimale.

3°) L'entreprise lance un nouveau produit à base de chocolat. Une enquête de satisfaction effectuée la première année a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits du produit.
L'entreprise souhaite vérifier si le niveau de satisfaction reste le même la deuxième année. Pour cela, elle décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

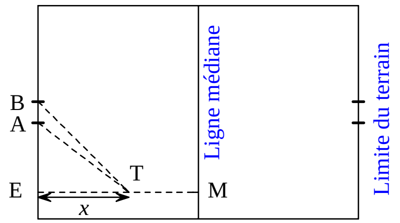
a) Dans le cas où il y aurait exactement 85 % de clients satisfaits, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de personnes satisfaites dans un échantillon aléatoire de taille 900.
On donnera les bornes sous forme de fractions ayant pour dénominateur 900.

b) 735 clients ont déclaré être satisfaits.
Peut-on conclure que le niveau de satisfaction s'est maintenu la deuxième année ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir la figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment $[AB]$. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



ne rien écrire sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note x la longueur ET en mètres, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5{,}6$ m.

On note α, β, γ les mesures respectives en radian des angles $\widehat{ETA}$, $\widehat{ETB}$ et $\widehat{ATB}$.

Ces trois mesures appartiennent à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

1°) En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

2°) On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$.

Démontrer que $\tan\gamma=\dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$.

3°) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale.

On rappelle que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Démontrer qu'il existe un unique réel x, dont on donnera la valeur exacte, pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum.
Déterminer la valeur arrondie au centième de γ.

III. (7 points : 1°) a) 2 points ; b) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto a + \dfrac{x-b}{\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont deux réels.

1°) a) Calculer $f'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

b) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

À l'aide de ces limites, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant chaque fois la démarche.

Compléter le tableau précédent avec ces limites.

2°) Déterminer a et b sachant que f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		…		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2

3°) Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et $b = -2$.

On considère l'algorithme ci-dessous. On précise que la variable s est un réel dont la valeur saisie en entrée doit être strictement positive et que la variable n est un entier naturel.

Entrée :
Saisir s

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $f(n) > s$ **Faire**
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

a) Que fait cet algorithme ? Répondre clairement.
Aucune réponse mal formulée ne sera prise en compte.

b) Déterminer la valeur de n fournie par l'algorithme en sortie lorsque la valeur saisie pour s en entrée est 0,001.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0 \quad (1)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 + 2z + 5\right)^2 - 4z^2 = 0 \quad (2)$.

3°) Soit a un réel fixé.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z-a)\left(z^2 - 2z + 5\right) = 0$ sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

Copie du contrôle du 2-2-2017

Prénom : ……………………………… *Nom :* ………………………………

I (4 points)	II (5 points)	III (7 points)	IV (4 points)	Total/20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) ……………… (une seule réponse, sans égalité)

2°) ……………… (une seule réponse)

3°) a) ……………… (une seule réponse, sans égalité)

b) ………………

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (7 points : 1°) a) 2 points ; b) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) a) ……

b) ……

2°) ……

3°) a) ……

b) ……

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°) ……

2°) ……

3°) ……

Corrigé du bac blanc du 2-2-2017

I.

Une entreprise fabrique divers produits à base de chocolat pour lesquels elle se fait livrer des fèves de cacao.
Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents.
Le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième apporte 30 % et le dernier apporte 20 %.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

Pour cet exercice, aucune justification n'est demandée.
On écrira les réponses directement.

1°) On choisit au hasard une fève dans le stock reçu.
Déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur 1 sachant qu'elle est conforme.
On donnera le résultat sous la forme de fraction irréductible.

On considère les événements suivants :

A : « la fève provient du fournisseur 1 » ;
B : « la fève provient du fournisseur 2 » ;
C : « la fève provient du fournisseur 3» ;
M : « la fève est conforme ».

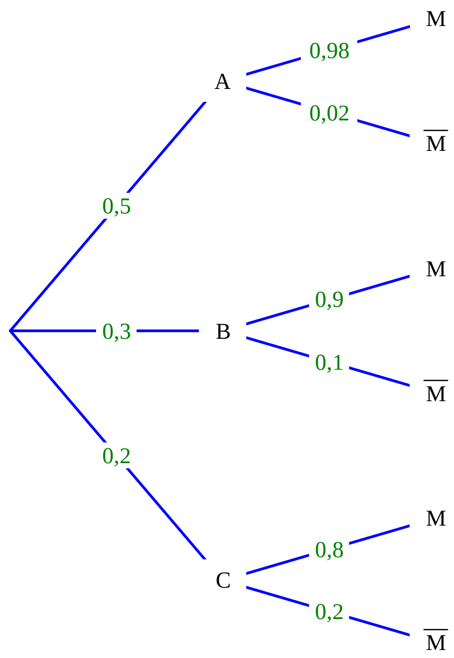
A, B, C constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{M}) = P(\mathrm{A}\cap\mathrm{M}) + P(\mathrm{B}\cap\mathrm{M}) + P(\mathrm{C}\cap\mathrm{M})$$

$$= P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{M}/\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})\times P(\mathrm{M}/\mathrm{B}) + P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{M}/\mathrm{C})$$

$$= 0,5\times 0,98 + 0,3\times 0,9 + 0,2\times 0,8$$

$$= 0,92$$



$$P(\mathrm{A}/\mathrm{M}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{M})}$$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

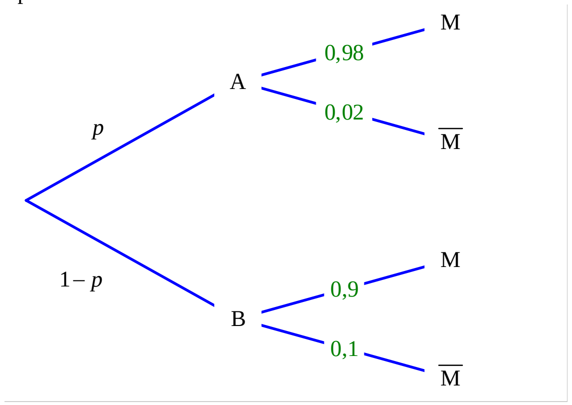
$$= \frac{0,5\times 0,98}{0,92}$$

$$= \frac{0,49}{0,92}$$

$$= \frac{49}{92}$$

2°) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion des fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes.
Le fournisseur 1 fournit alors une proportion *p* de fèves et l'entreprise 2 fournit le reste.
Déterminer la valeur de *p* pour que l'objectif soit atteint.
On donnera le résultat sous forme décimale.

On refait un nouvel arbre de probabilités :



Les événements A et B constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(\mathrm{M}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{M}) \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 0{,}92 = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{M}/\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{M}/\mathrm{B})$

$\Leftrightarrow 0{,}92 = p \times 0{,}98 + (1-p) \times 0{,}9$

$\Leftrightarrow 0{,}92 = 0{,}98p + 0{,}9 - 0{,}9p$

$\Leftrightarrow 0{,}02 = 0{,}08p$

$\Leftrightarrow p = \dfrac{0{,}02}{0{,}08}$

$\Leftrightarrow p = 0{,}25$

3°) L'entreprise lance un nouveau produit à base de chocolat. Une enquête de satisfaction effectuée la première année a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits du produit.
L'entreprise souhaite vérifier si le niveau de satisfaction reste le même la deuxième année. Pour cela, elle décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

a) a) Dans le cas où il y aurait exactement 85 % de clients satisfaits, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de personnes satisfaites dans un échantillon aléatoire de taille 900.
On donnera les bornes sous forme de fractions ayant pour dénominateur 900.

$$\left[\frac{744}{900} ; \frac{786}{900}\right]$$

On pourrait calculer le seuil exact de cet intervalle mais cela n'est pas demandé dans l'énoncé.

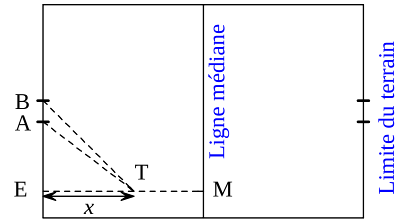
b) 735 clients ont déclaré être satisfaits.
Peut-on conclure que le niveau de satisfaction s'est maintenu la deuxième année ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

non

II.

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir la figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment $[\mathrm{AB}]$. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[\mathrm{EM}]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



ne rien écrire sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{\mathrm{ATB}}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[\mathrm{EM}]$ pour laquelle l'angle $\widehat{\mathrm{ATB}}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note x la longueur ET en mètres, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $\mathrm{EM} = 50$ m, $\mathrm{EA} = 25$ m et $\mathrm{AB} = 5{,}6$ m.
On note α, β, γ les mesures respectives en radian des angles $\widehat{\mathrm{ETA}}$, $\widehat{\mathrm{ETB}}$ et $\widehat{\mathrm{ATB}}$.
Ces trois mesures appartiennent à l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1°) En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

Le point T ne peut pas être en E sur le segment $[\mathrm{EM}]$, donc $x > 0$ dans tout l'exercice.

Dans le triangle ETA rectangle en E, $\tan\alpha = \tan\widehat{\mathrm{ETA}} = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ET}} = \dfrac{25}{x}$.

Dans le triangle ETB rectangle en E, $\tan\beta = \tan\widehat{\mathrm{ETB}} = \dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{ET}} = \dfrac{30{,}6}{x}$.

2°) On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Démontrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$

$$= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \times \tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

$$= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}}$$

$$= \frac{5,6}{x} \times \frac{1}{\frac{x^2 + 765}{x^2}}$$

$$= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765}$$

$$= \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

3°) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ en radian est maximale.

On rappelle que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Démontrer qu'il existe un unique réel x, dont on donnera la valeur exacte, pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum.
Déterminer la valeur arrondie au centième de γ.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ en radian est maximale.

Comme la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque $\tan\gamma$ est maximal.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Étudions le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5,6 \times \frac{(x^2 + 765) - x \times 2x}{(x^2 + 765)^2}$$

$$= 5,6 \times \frac{765 - x^2}{(x^2 + 765)^2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{765}$		$\sqrt{765}$		$+\infty$
Signe de $765 - x^2$		–	0	+	0	–	
Signe de $(x^2 + 765)^2$		+		+		+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de f		↘	$f(-\sqrt{765})$	↗	$f(\sqrt{765})$	↘	

Remarque : $\sqrt{765} = 3\sqrt{85}$ (sans grand intérêt dans notre exercice)

Comme $0 < \sqrt{765} < 50$, d'après le tableau de variations, le maximum global de f sur l'intervalle $]0\,;50[$ est obtenu pour $x = \sqrt{765}$.

$$f(\sqrt{765}) = \frac{5,6\sqrt{765}}{765 + 765}$$

$$= \frac{5,6\sqrt{765}}{2 \times 765}$$

$$= \frac{5,6}{2 \times \sqrt{765}}$$

$$= \frac{2,8}{\sqrt{765}}$$

Pour $x = \sqrt{765}$, $\gamma = \text{Arctan}\, f(\sqrt{765})$ soit $\gamma = \text{Arctan}\, \frac{2,8}{\sqrt{768}}$.

Avec la calculatrice, on trouve : $\gamma = 0,100890496\ldots$ Donc la valeur arrondie au centième de γ est égale à 0,10.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto a + \dfrac{x-b}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont deux réels.

1°) a) Calculer $f'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1 \times e^x - (x-b) \times e^x}{\left(e^x\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[1-(x-b)\right]}{\left(e^x\right)^2}$$

$$= \frac{b+1-x}{e^x}$$

x	$-\infty$		$b+1$		$+\infty$
Signe de $b+1-x$		+	0	–	
Signe de e^x		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f	$-\infty$	↗	$a+\dfrac{1}{e^{b+1}}$	↘	a

$$f(b+1) = a + \frac{b+1-b}{e^{b+1}}$$

$$= a + \frac{1}{e^{b+1}}$$

b) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

À l'aide de ces limites, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant chaque fois la démarche.

Compléter le tableau précédent avec ces limites.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a + \frac{x}{e^x} - \frac{b}{e^x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{b}{e^x}\right) = 0$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x-b) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-b}{e^x} = -\infty.$$

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2°) Déterminer a et b sachant que f a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		…		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	$\dfrac{5}{2}$	↘	2

D'après le tableau de variations, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Par conséquent, $a = 2$.

D'après le tableau de variations, $f(b+1) = \dfrac{5}{2}$ donc $2 + \dfrac{1}{e^{b+1}} = \dfrac{5}{2}$ ce qui donne $e^{b+1} = 2$ d'où $b+1 = \ln 2$ et finalement $b = \ln 2 - 1$.

3°) Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et $b = -2$.

On considère l'algorithme ci-dessous. On précise que la variable s est un réel dont la valeur saisie en entrée doit être strictement positive et que la variable n est un entier naturel.

Entrée :
Saisir s

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $f(n) > s$ **Faire**
  | n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

a) Que fait cet algorithme ? Répondre clairement.
Aucune réponse mal formulée ne sera prise en compte.

Cet algorithme affiche, pour un réel $s > 0$ saisi en entrée, le plus petit entier naturel n tel que $f(n) \leqslant s$.

b) Déterminer la valeur de n fournie par l'algorithme en sortie lorsque la valeur saisie pour s en entrée est 0,001.

Pour $a=0$ et $b=-2$, on a $f(x)=0+\dfrac{x+2}{e^x}$ soit $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

On calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ … à l'aide de la calculatrice.
On peut éventuellement faire afficher un tableau de valeurs sur la calculatrice.
On observe que le plus petit entier naturel n tel que $f(n)\leqslant 0{,}001$ est 10.
La valeur affichée en sortie est donc 10.

$f(0)=0{,}2706705665\ldots$

$f(9)=0{,}00135750784...$

$f(10)=0{,}0005447991571...$

Les valeurs décroissent. On a $f(9)>0{,}001$ et $f(10)\leqslant 0{,}001$.

On peut vérifier en programmant sur calculatrice.

IV.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+5=0 \quad (1)$.

(1) est un équation du second degré à coefficients réels.

Son discriminant réduit est égal à – 4.

Donc (1) admet deux racines complexes conjuguées : $1-2i$ et $1+2i$.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{1-2i\,;1+2i\}$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2+2z+5\right)^2-4z^2=0 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \left(z^2+2z+5\right)^2-(2z)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left[\left(z^2+2z+5\right)-2z\right]\left[\left(z^2+2z+5\right)+2z\right]=0\\ &\Leftrightarrow \left(z^2+5\right)\left(z^2+4z+5\right)=0\\ &\Leftrightarrow z^2+5=0 \text{ ou } z^2+4z+5=0\\ &\Leftrightarrow z=i\sqrt{5} \text{ ou } z=-i\sqrt{5} \text{ ou } z=-2-i \text{ ou } z=-2+i\end{aligned}$$

Les racines de l'équation $z^2+4z+5=0$ s'obtiennent grâce au discriminant réduit qui vaut – 1.

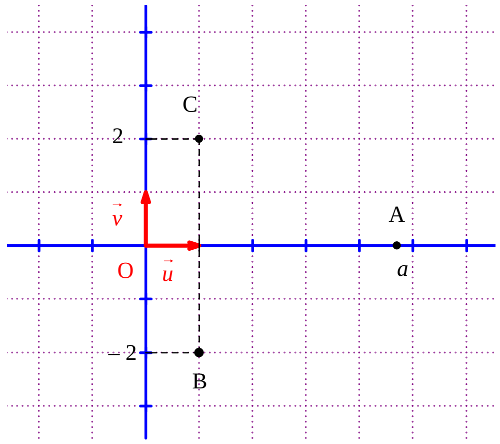
Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\left\{i\sqrt{5}\,;-i\sqrt{5}\,;-2-i\,;-2+i\right\}$

3°) Soit a un réel fixé.
Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
Déterminer la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z-a)\left(z^2-2z+5\right)=0$ sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

Il est judicieux de faire une figure pour se représenter la situation.

Les racines de l'équation sont a, $1-2i$ et $1+2i$.
On note A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives a, $1-2i$ et $1+2i$.



Les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et le point A appartient aussi à l'axe des abscisses.

Par conséquent, $AB=AC$. Autrement dit, le triangle ABC est isocèle en A.

On note R le milieu du segment $[BC]$.

R a pour affixe 1 (calcul évident, résultat qui apparaît sur le graphique).

On peut exprimer l'aire du triangle ABC en prenant pour base le côté $[BC]$: $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{BC\times AR}{2}$.

$BC=\left|z_B-z_C\right|=\left|(1+2i)-(1-2i)\right|=|4i|=4$ (résultat évident graphiquement dont le calcul n'est pas forcément utile)

$AR=\left|z_A-z_R\right|=|a-1|$

On a donc $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{4\times|a-1|}{2}$ d'où $\mathcal{A}_{ABC}=2|a-1|$.

On cherche a tel que $\mathcal{A}_{ABC}=8 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2|a-1|=8$

$\Leftrightarrow |a-1|=4$

$\Leftrightarrow a-1=4$ ou $a-1=-4$ (car a est réel donc $a-1$ aussi et par conséquent, le module de $a-1$ est égal à sa valeur absolue)

$\Leftrightarrow a=5$ ou $a=-3$

Les valeurs cherchées de a sont donc 5 et – 3.