$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur les relations métriques dans un triangle**

On appliquera les formules du cours en situation.

1 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 9$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC (valeur exacte).

2 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC (valeur exacte).

3 On considère un triangle ABC tel que $AB = 5$, $BC = 4$ et $\widehat{ABC} = 45°$.
Calculer AC (valeur exacte).

4 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 7$ et $CA = 6$.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

5 Soit ABC un triangle tel que $BC = 9$, $\widehat{ABC} = 65°$ et $\widehat{ACB} = 47°$.
1°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AB.
2°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AC.

6 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $BC = 8$ et $CA = 4$.
On note I le milieu de [AB].
Calculer CI (valeur exacte).

7 Soit A et B deux points du plan *P* tels que $AB = 6$.
Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$.

8 Soit A et B deux points du plan *P* tels que $AB = 4$.
Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = 20$.

9 Soit A et B deux points du plan *P* tels que $AB = 2$.
Déterminer suivant les valeurs de *k* l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = k$.

10 On considère un rectangle ABCD du plan *P*.
Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

11 Soit ABC un triangle quelconque.
On pose $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.
On note m_A, m_B, m_C les longueurs des médianes issues respectivement de A, B, C.

Démontrer que l'on a : ${m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

12 Soit A et B deux points du plan *P* tels que $AB = 5$.
Déterminer et représenter l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 \leqslant 25$.

13 Soit ABCD un parallélogramme.
Démontrer l'égalité $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$.

Indication : On note O le centre du parallélogramme. Écrire la formule de la médiane dans le triangle ABD.

Cette formule s'appelle « relation d'Apollonius ». Elle exprime la propriété suivante : « Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de tous les côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales »).
Cette relation avait déjà été démontrée dans le chapitre sur le produit scalaire par une autre manière.

Ancienne version :

On pose $AB = a$ et $AD = b$.
On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAD}$.

1°) Exprimer AC^2 en fonction de *a*, *b*, α.
2°) Exprimer BD^2 en fonction de *a*, *b*, α.
3°) Déduire des deux questions précédentes la relation d'Apollonius.

14 On considère un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{BAC} = 70°$.
Calculer l'aire du triangle ABC.

15 On considère un triangle ABC équilatéral de côté *a* $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de *a*.

16 On considère quatre points A, B, C, D du plan.
On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.
On pose $S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
1°) Démontrer que $S = 2BI^2 + 2DI^2 + AC^2$ puis que $S = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$.
2°) En déduire que $S \geqslant AC^2 + BD^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

17 Soit A et B deux points et *D* une droite.
Quel est le point M de *D* tel que $MA^2 + MB^2$ soit minimale ?

18 Soit ABCD un parallélogramme.
M étant un point quelconque du plan, comparer $MA^2 + MC^2$ et $MB^2 + MD^2$.

19 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 5$ et $AC = 4$.
Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Corrigé

Dans les exercices $\boxed{1}$ et $\boxed{6}$ portant sur des calculs de longueurs et d'angles dans un triangle, il est intéressant de faire les figures (sur papier en utilisant les instruments usuels de géométrie : règle graduée, compas, rapporteur ou sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de géométrie).
On peut ainsi vérifier les résultats obtenus par le calcul.

$\boxed{1}$ Calcul de longueur

Données :

ABC triangle

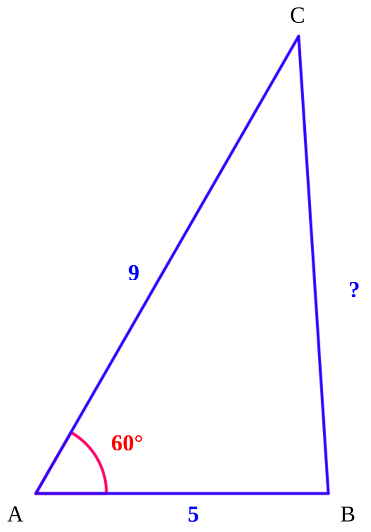
$AB = 5$ $AC = 9$ $\widehat{BAC} = 60°$

Ou

Données :

ABC triangle avec $AB = 5$, $AC = 9$, $\widehat{BAC} = 60°$

Faire une figure soignée et précise (avec règle graduée, compas, rapporteur).



(ABC n'est pas un triangle rectangle !)

Calculons BC.

D'après la « formule du côté » (formule d'Al Kashi) dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 25 + 81 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos 60° \\ &= 25 + 81 - \cancel{2} \times 5 \times 9 \times \frac{1}{\cancel{2}} \\ &= 106 - 45 \\ &= 61 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{BC = \sqrt{61}}$ (valeur exacte)

61 n'est pas un carré parfait. $\sqrt{61}$ ne peut pas être simplifié.

Remarques :

1. Avec la calculatrice, on trouve : $BC = 7{,}81024967...$
Donc la valeur arrondie au dixième de BC est 7,8.

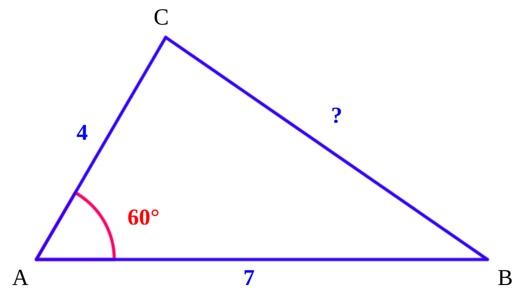
On fait la vérification sur la figure.

2. On pourrait aussi noter $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$ car il n'y a pas d'ambiguïté.

$\boxed{2}$ Calcul de longueur

ABC triangle

Données : $AB = 7$ $AC = 4$ $\widehat{BAC} = 60°$



Calculons BC.

D'après la formule du côté dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 49 + 16 - 56 \times \cos 60° \\ &= 37 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{BC = \sqrt{37}}$ (valeur exacte).

Remarque :

Avec la calculatrice, on obtient $BC = 6,0827625\ldots$

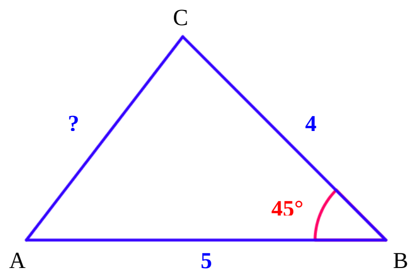
Donc $BC \approx 6,1$ (valeur arrondie au dixième).

On fait la vérification sur la figure.

$\boxed{3}$ Calcul de longueur

ABC triangle

Données : $AB = 5$ $BC = 4$ $\widehat{ABC} = 45°$



Calculons AC.

D'après la formule du côté dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} \\ &= 25 + 16 - 40 \times \cos 45° \\ &= 25 + 16 - 40 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 41 - 20\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{AC = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}}$ (valeur exacte)

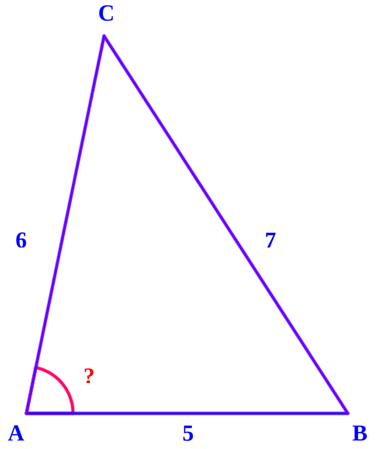
Commentaires :

1. On obtient un résultat qui est égal à une « racine de racine ». Ce résultat n'est pas simplifiable.

2. Avec la calculatrice, on obtient $AC = 3,56591205...$
On vérifie sur la figure.

$\boxed{4}$ Calcul d'angle

Données : $AB = 5$ $BC = 7$ $CA = 6$



Déterminons la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'après la formule du côté dans le triangle ABC (formule d'Al Kashi), on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Cette égalité donne successivement :

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos \widehat{BAC}$$
$$49 = 25 + 36 - 60 \times \cos \widehat{BAC}$$
$$60 \times \cos \widehat{BAC} = 12$$
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{12}{60}$$
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5}$$

On évite d'écrire $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ (valeur exacte)

notation utilisée au collège par analogie avec la calculatrice

En utilisant la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} = 78,4630409\ldots$

donc $\boxed{\widehat{BAC} \approx 78,5°}$ (valeur arrondie au dixième)

On vérifie le résultat sur la figure en mesurant l'angle $\widehat{BAC}$ à l'aide d'un rapporteur.

Remarques :

1. On peut calculer les mesures des autres angles du triangle ABC en réutilisant la formule d'Al Kashi.

2. En notant θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$, on peut écrire $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{1}{5}\right)$ (θ est égal à l'arccosinus de $\frac{1}{5}$).

Autre façon : où l'on travaille un peu plus en littéral

D'après la formule du côté dans le triangle ABC, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Donc $2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

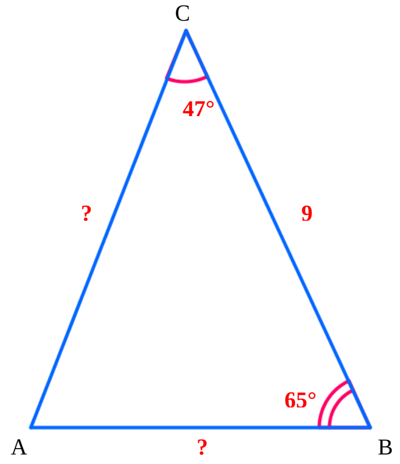
$$\begin{aligned}\cos\widehat{BAC} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}\\ &= \frac{49 + 25 - 36}{2 \times 5 \times 6}\\ &= \frac{12}{60}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Fin idem.

5 Calculs de longueur

ABC triangle

Données : $BC = 9$ $\qquad \widehat{ABC} = 65°$ $\qquad \widehat{ACB} = 47°$



1°) **Calculons AB.**

On utilise la loi des sinus.

On a : $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$ (ou $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}$ car il n'y a pas d'ambiguïté pour désigner les angles)

On a donc $AB = \dfrac{BC \times \sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{BAC}}$.

Or $\widehat{BAC} = 180° - \left(\widehat{ABC} + \widehat{BCA}\right)$ (la somme des mesures en degré des angles d'un triangle est égale à 180)

$$\begin{aligned}&= 180° - 112°\\ &= 68°\end{aligned}$$

On a donc : $AB = \dfrac{9 \times \sin 47°}{\sin 68°}$ (valeur exacte)

Avec la calculatrice, on obtient $AB = 7{,}09911338\ldots$.

Donc $\boxed{AB \approx 7{,}1}$ (valeur arrondie au dixième).

On vérifie sur la figure.

2°) **Calculons AC.**

De même, on a : $AC = \dfrac{BC \times \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}}$ (ou $AC = \dfrac{BC \times \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}}$)

$AC = \dfrac{9 \times \sin 65°}{\sin 68°}$ (valeur exacte)

Avec la calculatrice, on obtient $AC = 8,79735992\ldots$.

Donc $\boxed{AC \approx 8,8}$ (valeur arrondie au dixième)

On vérifie sur la figure.

Autre démarche possible :

On pourrait écrire dès le début $\dfrac{9}{\sin 68°} = \dfrac{AC}{\sin 65°} = \dfrac{AB}{\sin 47°}$.

Qu'appelle-t-on résolution d'un triangle ?

On dit que l'on **résout** un triangle pour exprimer que l'on calcule les mesures des côtés et/ou des angles du triangle que l'on ne connaît pas.
Le terme « résoudre » pris dans ces sens là, appliqué à un triangle, est un terme ancien, un peu tombé en désuétude.

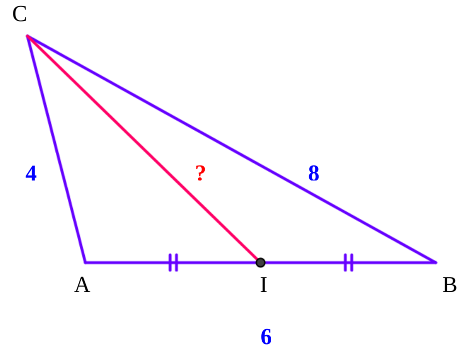
$\boxed{6}$ **Calcul de longueur**

Données :

AB = 6 BC = 8 CA = 4

I : milieu de $[AB]$

Faire une figure codée soignée et précise.



(CI) est la médiane issue de C dans le triangle ABC (ou médiane relative au côté [AB]).

Calculons CI.

On utilise la formule de la médiane en situation.

D'après la formule de la médiane dans le triangle ABC, on a : $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

On obtient alors successivement :

$4^2 + 8^2 = 2CI^2 + \dfrac{6^2}{2}$

$80 = 2CI^2 + 18$

$2CI^2 = 62$

$CI^2 = \dfrac{62}{2}$

$CI^2 = 31$

D'où : $\boxed{CI = \sqrt{31}}$ (valeur exacte).

Remarque :

Avec la calculatrice, on obtient $CI = 5,56776436\ldots$
Donc $CI \approx 5,6$ (valeur arrondie au dixième)

On fait la vérification sur la figure.

Autre façon de faire le calcul :

I est le milieu de [AB] donc d'après la formule de la médiane :

$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

donc $2CI^2 = 64 + 16 - \dfrac{36}{2}$

d'où $2CI^2 = 62$

$CI^2 = 31$

donc $CI = \sqrt{31}$.

$\boxed{7}$ Recherche d'un ensemble de points (ou lieu géométrique)

L'ensemble *E* est le cercle de centre I (milieu de [AB]) et de rayon 5.
On utilise une formule de la médiane.

Solution détaillée :

$AB = 6$

Déterminons l'ensemble $E = \left\{ M \in P \,/\, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \right\}$.

1ère partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de [AB].

D'après l'une des formules de la médiane,

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Donc $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$

2e partie : chaîne d'équivalences (on peut remplacer les « si et seulement si » par le symbole d'équivalence)

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$

si et seulement si $MI^2 - 9 = 16$

si et seulement si $MI^2 = 25$

si et seulement si $MI = 5$

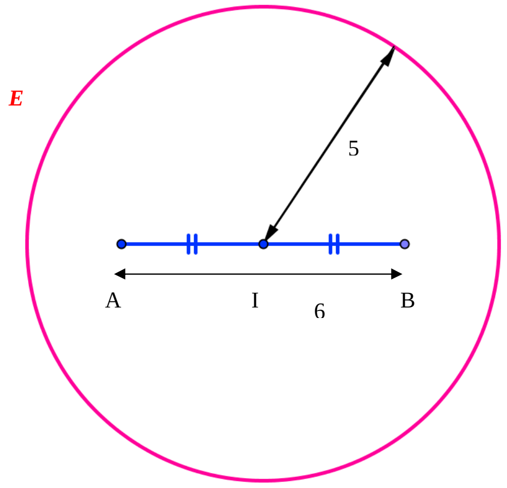
3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble *E* est le cercle de centre I et de rayon 5.

Pour indiquer le centre du cercle, M est variable donc I est le centre (c'est un point fixe).

Figure :

$AB = 6$
Faire une figure codée soignée.
Ne pas marquer le point M sur la figure.



Attention aux conclusions fausses :

« L'ensemble *E* des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon 5. »

Faux : en effet, l'ensemble des points du plan est … le plan.

« L'ensemble *E* des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ est le cercle de centre I et de rayon 5. »

Juste mais trop long.

$\boxed{8}$ Recherche d'un ensemble de points (ou lieu géométrique)

$AB = 4$

Déterminons l'ensemble $E = \left\{ M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = 20 \right\}$.

1ère partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de [AB].

D'après la formule de la médiane,

$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Donc $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$

2e partie : chaîne d'équivalences

$M \in E$ si et seulement si $MA^2 + MB^2 = 20$
si et seulement si $2MI^2 + 8 = 20$
si et seulement si $MI^2 = 6$
si et seulement si $MI = \sqrt{6}$

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Tracé

Construction d'un segment de longueur $\sqrt{6}$ (connaissant un segment de longueur 1 pour l'unité de longueur choisie).

On désire une construction exacte à la règle non graduée et au compas (sans utiliser une valeur approchée de $\sqrt{6}$ sans utiliser de règle graduée bien entendu).

Il y a plusieurs idées possibles.

Elles sont, en gros, de deux types : construction directe, construction itérative.

1. Première idée : écrire 6 comme somme ou comme différences des carrés de deux entiers naturels (« carrés parfaits)

$6 = ...^2 + ...^2$ (pas possible d'écrire 6 comme somme de deux carrés d'entiers naturels)

$6 = ...^2 - ...^2$ (pas possible d'écrire 6 comme différence de deux carrés d'entiers naturels)

Cette méthode n'aboutit pas.

2. Deuxième idée : utilisation de l'escargot de Pythagore

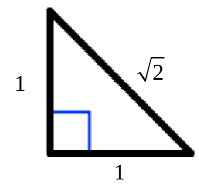
Réalisation de l'escargot de Pythagore avec un logiciel de géométrie dynamique.
Faire une figure codée avec une macro (sur Cabri géomètre ou sur Geogebra)
Les segments extérieurs sont toujours de longueur 1.)

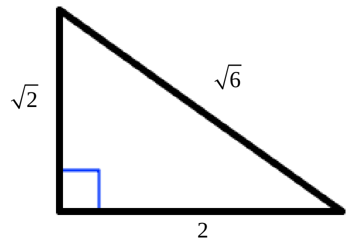
3. Troisième idée : utilisation de la méthode de Descartes

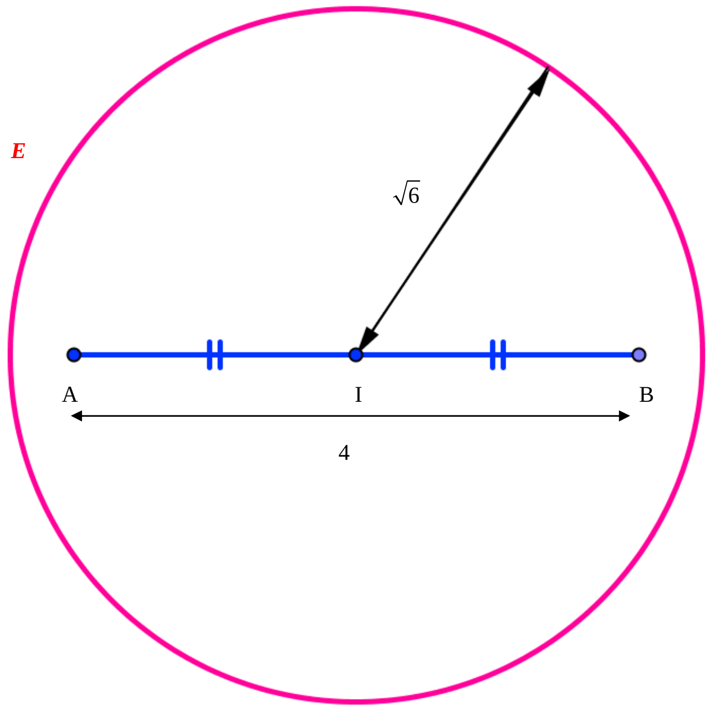
4. Quatrième idée : utilisation de l'égalité $6 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$

On sait construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ à la règle et au compas (hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 1).

On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 2 et $\sqrt{2}$.







Avec la calculatrice, on obtient $\sqrt{6} = 2,44948974\ldots$ ce qui permet éventuellement de vérifier la construction effectuée.

$\boxed{9}$

$AB = 2$

Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = k\}$.

Déterminons suivant les valeurs du réel k l'ensemble E.

1ère étape : réduction de la somme du membre de gauche

Soit I le milieu du segment [AB].

D'après la formule de la médiane, $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Or $AB = 2$ donc $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2$.

2e étape : recherche de l'ensemble E

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = k \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 2 = k \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k-2}{2} \end{aligned}$$

3e étape : nature de l'ensemble E suivant les valeurs de k

On regarde le signe de $\dfrac{k-2}{2}$.

Discussion sur k :

- Si $k < 2$, alors $\dfrac{k-2}{2} < 0$.
  Dans ce cas, $E = \varnothing$.

- Si $k > 2$, alors $\dfrac{k-2}{2} > 0$.
  Dans ce cas, $M \in E \Leftrightarrow MI = \sqrt{\dfrac{k-2}{2}}$
  E est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-2}{2}}$.

- Si $k = 2$, alors $\dfrac{k-2}{2} = 0$.
  Dans ce cas, $M \in E \Leftrightarrow MI = 0$
  $\Leftrightarrow M = I$

  E est le singleton {I}.
  (On peut parler de manière abusive de « cercle-point »)

Complément de vocabulaire :

On peut dire que l'ensemble E est la ligne de niveau k de l'application du plan P dans $\mathbb{R}$ définie par $f(M) = MA^2 + MB^2$.

Le réel k est un paramètre.

$\boxed{10}$

ABCD : rectangle

Déterminons l'ensemble E des points M du plan P tels que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

$$E = \{M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2\}$$

1ère partie : autres expressions des deux membres

Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

D'après la formule de la médiane,

$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

$\forall M \in P \quad MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

2e partie : chaîne d'équivalences

$M \in E$ si et seulement si $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

si et seulement si $2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2MJ^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

si et seulement si $2MI^2 = 2MJ^2$ ($AB = CD$ car ABCD est un rectangle)

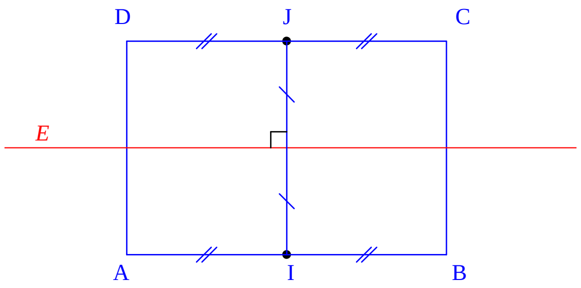
si et seulement si $MI^2 = MJ^2$ (on divise les deux membres par 2)

si et seulement si $MI = MJ$

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble E est la médiatrice de [IJ].

Tracé



$\boxed{11}$

ABC : triangle quelconque

$AB = c$

$BC = a$

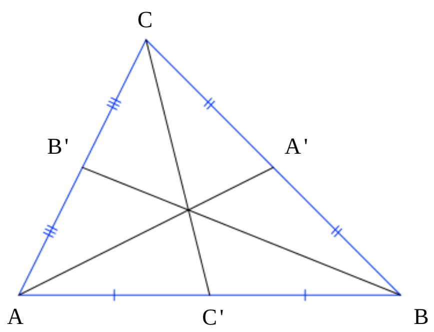
$CA = b$

m_A : longueur de la médiane issue de A
m_B : longueur de la médiane issue de B
m_C : longueur de la médiane issue de C

Démontrons que l'on a : $m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

On note A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Figure



En appliquant trois fois la formule de la médiane, on obtient :

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} \text{ soit } c^2 + b^2 = 2m_A{}^2 + \frac{a^2}{2} \text{ ou encore } 2m_A{}^2 = c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} \quad (1).$$

$$BA^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2} \text{ soit } c^2 + a^2 = 2m_B{}^2 + \frac{b^2}{2} \text{ ou encore } 2m_B{}^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \quad (2).$$

$$CA^2 + CB^2 = 2CC'^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ soit } b^2 + a^2 = 2m_C{}^2 + \frac{c^2}{2} \text{ ou encore } 2m_C{}^2 = b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2} \quad (3).$$

Par addition membre à membre des égalités (1), (2), (3), on obtient :

$$2m_A{}^2 + 2m_B{}^2 + 2m_C{}^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$2\left(m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2\right) = 3\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

D'où $m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 = \dfrac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4}$.

Autre version :

D'après la formule de la médiane, on a $AB^2 + AC^2 = 2m_A{}^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ que l'on peut aussi écrire $c^2 + b^2 = 2m_A{}^2 + \dfrac{a^2}{2}$. Cette dernière égalité donne immédiatement $4m_A{}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \ (1)$.

Par permutation circulaire des lettres A, B, C et a, b, c, on obtient :
$4m_B{}^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \ (2)$
$4m_C{}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \ (3)$

Par addition membre à membre des égalités (1), (2), (3), on obtient :

$$4m_A{}^2 + 4m_B{}^2 + 4m_C{}^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

$\boxed{12}$

A et B : points fixés du plan P tels que $AB = 5$

Déterminons l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 \leqslant 25$.

1ère partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de [AB].

D'après la formule de la médiane,

$$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$
$$= 2MI^2 + \frac{25}{2}$$

2^e partie : chaîne d'équivalences

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $2\mathrm{MI}^2 + \dfrac{25}{2} \leqslant 25$

si et seulement si $2\mathrm{MI}^2 \leqslant \dfrac{25}{2}$

si et seulement si $\mathrm{MI}^2 \leqslant \dfrac{25}{4}$

si et seulement si $\mathrm{MI} \leqslant \dfrac{5}{2}$

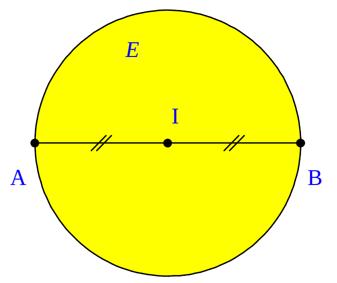
3^e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble E est le disque fermé de centre I et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

On peut aussi dire que l'ensemble E est le disque fermé de diamètre [AB] (crochets obligatoires, le mot diamètre étant pris au sens de segment).
Dans ce cas, il n'y a pas besoin de préciser le centre.

On retiendra qu'on peut toujours définir un cercle par un diamètre.

Figure



Il s'agit du disque fermé c'est-à-dire que les points du cercle sont compris dans l'ensemble.
Cela est dû au fait que l'inégalité est large.
Lorsque l'inégalité est stricte, on parle de disque ouvert.

13 Relation d'Apollonius

Nouvelle version :

On commence par faire une figure.

On a $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = 2\mathrm{OA}^2 + \dfrac{\mathrm{BD}^2}{2}$ donc $2\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2\right) = 4\mathrm{OA}^2 + \mathrm{BD}^2$.

Comme O est le milieu de $[\mathrm{AC}]$, $\mathrm{AC} = 2\mathrm{OA}$ donc $2\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2\right) = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$.

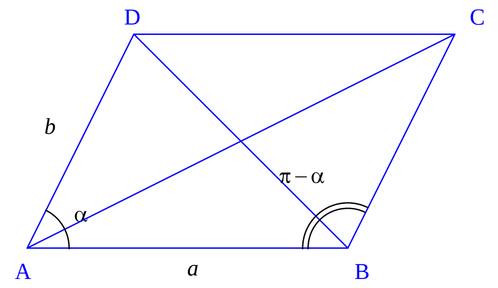
Ancienne version :

ABCD : parallélogramme

$\mathrm{AB} = a$

$\mathrm{AD} = b$

$\widehat{\mathrm{BAD}} = \alpha$



1°) **Exprimons AC^2 en fonction de a, b, α.**

Dans le triangle ABC, d'après la formule du côté, on a : $\mathrm{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{B}}$.

Or dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires donc $\widehat{\mathrm{B}} = \pi - \alpha$.

Par suite, $\mathrm{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)$.

Or $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

On en déduit que $\mathrm{AC}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

2°) **Exprimons BD^2 en fonction de a, b, α.**

Dans le triangle ABD, d'après la formule du côté, on a : $\mathrm{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{\mathrm{A}}$.
Donc $\mathrm{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

3°) **Déduisons-en la relation d'Apollonius.**

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2&=a^2+b^2\cancel{+2ab\cos\alpha}+a^2+b^2\cancel{-2ab\cos\alpha}\\&=2\left(a^2+b^2\right)\\&=2\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2\right)\end{aligned}$$

Cette relation avait déjà été démontrée dans le chapitre sur le produit scalaire par une autre manière.

On peut « vérifier » cette relation sur la figure en mesurant les longueurs.

$\boxed{14}$

On applique la formule donnant l'aire d'un triangle quelconque connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils forment.

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin\widehat{\mathrm{BAC}}$$

$$=\frac{1}{2}(6\text{ cm})\times(4\text{ cm})\times\sin 70°$$ (on peut incorporer les unités dans les calculs)

$=12\sin 70°\ \mathrm{cm}^2$ (valeur exacte)

Avec la calculatrice, on trouve $12\sin 70°=11{,}2763114...$.

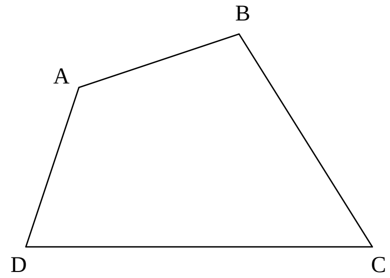
On peut dire que la valeur arrondie au centième de l'aire de ABC en cm^2 est 11,28.

$\boxed{15}$ On considère un triangle ABC équilatéral de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$.
Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de *a*.

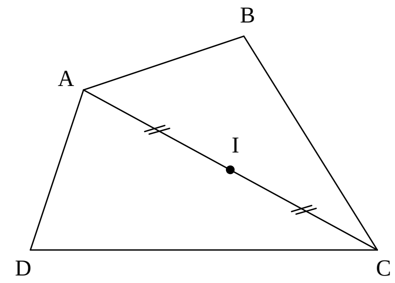
$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}}&=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin\widehat{\mathrm{BAC}}\\&=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin 60°\\&=\frac{1}{2}\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$\boxed{16}$ On considère quatre points A, B, C, D du plan.
On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$.
On pose $S=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2$.

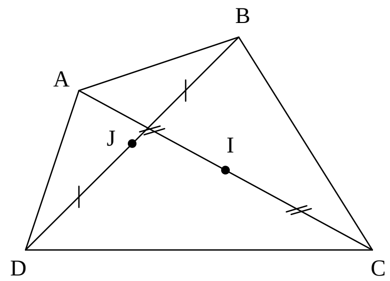
1°) Démontrer que $S=2\mathrm{BI}^2+2\mathrm{DI}^2+\mathrm{AC}^2$ puis que $S=4\mathrm{IJ}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$.
2°) En déduire que $S\geqslant\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.



1°) On applique la formule de la médiane dans les triangles ABC et BCD.



On applique ensuite la formule de la médiane dans le triangle BDI.



2°) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité est que $\mathrm{IJ}=0$ c'est-à-dire $\mathrm{I}=\mathrm{J}$ ce qui signifie que ABCD est un parallélogramme.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Soit A et B deux points et $\mathcal{D}$ une droite.
Quel est le point M de $\mathcal{D}$ tel que $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$ soit minimale ?

On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

D'après la formule de la médiane, $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{P} \quad \mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=2\mathrm{MI}^2+\dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$.

On note H le projeté orthogonal de I sur D.

On sait que H est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de I.

Donc $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{D} \quad \mathrm{MI} \geqslant \mathrm{MH}$.

Comme MI et MH sont des longueurs, ce sont des réels positifs et on peut donc passer au carré dans l'inégalité.

$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{D} \quad \mathrm{MI}^2 \geqslant \mathrm{MH}^2$.

Donc $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{D} \quad \mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2 \geqslant 2\mathrm{MH}^2+\dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$.

L'expression $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$ est donc minimale pour M=H.