1ère S

Exercices sur les limites (4)

$\boxed{1}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 2x+1+\dfrac{4}{x-1}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = 2x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

$\boxed{2}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x^2+3x+1}{x}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = -2x+3$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

$\boxed{3}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3x^2+16x-20}{x-3}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = -3x+7$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

$\boxed{4}$ On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.

2°) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel $x \in \mathscr{D}$, on ait : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

3°) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et $-\infty$.

$\boxed{5}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x+1+\dfrac{1}{x+2}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2°) Calculer la dérivée de f ; donner le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé.
3°) Former un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de la dérivée (avec toutes les étapes nécessaires) et les variations de f.
Calculer les extremums locaux de f et compléter le tableau de variation avec les valeurs de ces extremums.
Ne pas oublier :
- de mettre les 0 sur la ligne du signe de $f'(x)$;
- que l'on peut descendre les doubles barres pour les valeurs interdites mais que, par contre, on ne descend pas les barres simples.

4°) Étudier en détaillant convenablement chaque calcul les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en -2 (à gauche et à droite).
En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale Δ.
Compléter le tableau de variation du 3°) avec les limites trouvées.
5°) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $y = x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ'.

6°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-4	-3	$-2{,}5$	$-1{,}5$	-1	0
$f(x)$						

7°) Sur un graphique, tracer le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ <u>en prenant le centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur</u>.
Tracer les asymptotes Δ et Δ'.
Placer les points correspondants aux extremums locaux, tracer des pointillés et marquer leurs coordonnées sur les axes puis tracer les tangentes (horizontales) sous forme de doubles flèches en ces points.
Placer ensuite les autres points du tableau de valeurs ci-dessus.
Commencer le tracé de $\mathscr{C}$ en reliant ces points « à la main ». On prendra garde que la courbe $\mathscr{C}$ est constituée de deux « morceaux » séparés par l'asymptote verticale.

Achever enfin le tracé de $\mathscr{C}$ en soignant le tracé des branches infinies.
Vérifier sur une calculatrice graphique ou sur un ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes.

Corrigé

Pour étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ, il est préférable de faire un tableau de signes.

Le 6-1-2016

Un élève avait noté sur une feuille.

Ex. sur les asymptotes obliques

Pour démontrer les positions de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ, il est préférable de dresser le tableau de signes.

$\boxed{1}$ On démontre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x+1) \right] = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (2x+1) \right] = 0$.

Attention (mettre le sigle) : On ne doit jamais écrire $f(x) - y$ mais remplacer en écrivant (par exemple dans le cas présent) $f(x) - (2x+1)$.

N.B. : Il peut être intéressant d'observer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur calculatrice ou sur ordinateur (en utilisant un logiciel de tracé de courbe) ; cela permet en particulier de voir leurs positions relatives.

Solutions détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto 2x + 1 + \dfrac{4}{x-1}}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = 2x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) - (2x+1) = \cancel{2x+1} + \frac{4}{x-1} - \cancel{(2x+1)}$$
$$= \frac{4}{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 4 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x+1) \right] = 0$.

On démontrerait de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (2x+1) \right] = 0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = 2x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

Étudions la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
SGN de 4	+		+
SGN de $x-1$	–	0	+
SGN de $\dfrac{4}{x-1}$	–	‖	+
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.	‖	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

$\boxed{2}$ On démontre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x+3) \right] = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-2x+3) \right] = 0$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \boldsymbol{\dfrac{-2x^2 + 3x + 1}{x}}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = -2x+3$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) - (-2x+3) = \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x} - (-2x+3)$$
$$= \frac{-2x^2 + 3x + 1 - x(-2x+3)}{x}$$
$$= \frac{-2x^2 + 3x + 1 + 2x^2 - 3x}{x}$$
$$= \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x+3) \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-2x+3) \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = -2x+3$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

Remarque : Le cours dit que, cette année, la plupart du temps, lorsqu'une courbe admet une droite pour asymptote oblique en $+\infty$, elle admet la même droite en $-\infty$.
Mais on est quand même obligé de refaire le calcul de limite.

Étudions la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

On étudie le signe de la différence $f(x) - (-2x+3) = \dfrac{1}{x}$.

L'expression $\frac{1}{x}$ est tellement simple qu'il n'est pas nécessaire de faire un tableau de signes.

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

N.B. : Il peut être intéressant d'observer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur calculatrice ou sur ordinateur.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
SGN de $\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.	||	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto \dfrac{-3x^2+16x-20}{x-3}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

Démontrons que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=-3x+7$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \qquad f(x)-(-3x+7)=\frac{-3x^2+16x-20}{x-3}-(-3x+7)$$
$$=\frac{-3x^2+16x-20-(-3x+7)(x-3)}{x-3}$$
$$=\frac{-3x^2+16x-20-\left(-3x^2+16x-21\right)}{x-3}$$
$$=\frac{-3x^2+16x-20+3x^2-16x+21}{x-3}$$
$$=\frac{1}{x-3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-3x+7)\right]=0$.

On démontrerait de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x+7)\right]=0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=-3x+7$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

Étudions la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

Tableau de signe (les deux premières lignes ne sont pas forcément utiles)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
SGN de 1	$+$		$+$
SGN de $x-3$	$-$	0	$+$
SGN de $\frac{1}{x-3}$	$-$	||	$+$
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.	||	La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$.

(Cette phrase n'est pas forcément utile s'il y a le tableau).

Observer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.**

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x-2\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 2$

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

2°) Déterminons trois réels a, b, c tels que pour tout réel $x\in\mathscr{D}$, on ait : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

$a=1,\ b=1,\ c=1$

Solution détaillée :

1ère méthode :

On pose $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ $\quad (x\in\mathscr{D})$.

$$g(x)=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$$
$$=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$
$$=\frac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$$

On procède par identification (en comparant avec l'expression de $f(x)$) :

Pour que $f(x)=g(x)$ pour tout réel $x\in\mathscr{D}$, il suffit de choisir a, b, c tels que $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1 \\ -2b+c=-1 \end{cases}$ (on raisonne par condition suffisante).

On obtient $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$.

On vérifie par le calcul que ces valeurs conviennent c'est-à-dire que l'on a bien $\forall x\in\mathscr{D}\quad f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

2e méthode :

On effectue la division euclidienne du numérateur x^2-x-1 par le dénominateur $x-2$ (division euclidienne de polynômes : on divise *euclidiennement* le polynôme du numérateur par le polynôme du dénominateur).

On adopte la présentation habituelle utilisée pour les entiers naturels.

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -\left(x^2-2x\right) & x+1 \\ \hline x-1 & \\ -(x-2) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Le reste est égal à 1 (donc non nul).

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-1 & x-2 \\ \cline{2-2} -\left(x^2-2x\right) & x+1 \\ \hline x-1 & \\ -(x-2) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$$a=bq+r$$

On a donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2-x-1=(x-2)(x+1)+1$.

On obtient donc que $\forall x\in\mathscr{D}\quad f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

3°) Déduisons-en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et $-\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}\quad f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}\quad f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

N.B. : Il peut être intéressant d'observer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur calculatrice ou sur ordinateur (en utilisant un logiciel de tracé de courbe).

$\boxed{5}$ Étude de fonction complète

$$\boldsymbol{f : x \mapsto x+1+\frac{1}{x+2}}$$

1°) Ensemble de définition de *f*

$\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\,-2\,\}$

2°) Dérivée de *f*

f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\,-2\,\}\quad f\,'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1^2}{(x+2)^2}=\frac{(x+2+1)(x+2-1)}{(x+2)^2}=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$$

réécriture du numérateur pour factoriser

3°) Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
SGN de $x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
SGN de $x+1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
SGN de $(x+2)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
SGN de $f\,'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de *f*	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On calcule les extremums locaux.

$f(-3)=-3$; $f(-1)=1$

4°) **Limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition**

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+1)=-1\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty\ ^*\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=+\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+1)=-1\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty\ ^*\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=-\infty$.

(* On peut écrire ces deux limites directement sans faire de tableau de signes ; on se sert seulement du fait que si $x>-2$, alors $x+2>0$; si $x<-2$, alors $x+2<0$).

Récapitulatif :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=-\infty$.

Les deux dernières limites nous permettent d'affirmer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-2$ pour asymptote verticale.

5°) **Asymptote oblique**

On démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $y=x+1$ pour asymptote oblique en + ∞ et – ∞.

Position relative $\mathscr{C}$ et Δ' :

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ est donnée par le signe de la différence $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-2}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$; la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

Il est à noter que l'on ne peut pas « voir » les asymptotes obliques dans le tableau de variations.

6°) **Tableau de valeurs :**

x	– 4	– 3	– 2,5	– 1,5	– 1	0
$f(x)$	– 3,5	– 3	– 3,5	1,5	1	1,5

7°) **Graphique :**

On prend une demi-feuille sur papier à petits carreaux en respectant l'unité de 1 centimètre indiquée par l'énoncé.

On trace les axes bien au centre ; on trace les vecteurs de base ; on écrit leur nom.

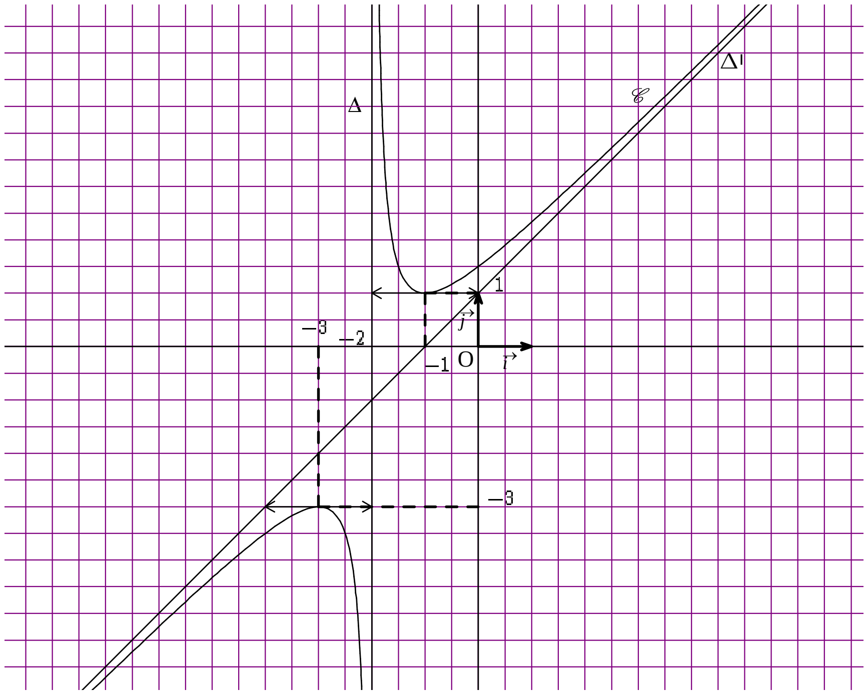
On commence par tracer les asymptotes (asymptote horizontale et asymptote oblique).
Il faut absolument commencer par cela.

On place ensuite les points en lesquels la tangente est horizontale (c'est-à-dire qui correspondent aux extremums locaux) : il s'agit ici des points de coordonnées $(-3\,;-3)$ et $(-1\,;1)$.
On trace les tangentes horizontales en ces points sous la forme de doubles flèches.

On place ensuite les points correspondant au tableau de valeurs rempli à la question précédente.

On joint ensuite les points « à la main » le plus harmonieusement possible. On soigne en particulier :
- l'allure de la courbe au voisinage des points en lesquels la tangente est horizontale
- l'allure des branches infinies.

Pour l'asymptote oblique, on doit voir en particulier sur le graphique que plus on s'éloigne sur la courbe vers + ∞ ou – ∞, plus la distance entre la courbe et l'asymptote oblique diminue.



Vérification sur calculatrice graphique ou sur ordinateur (à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe) à faire absolument.