Exercices sur les espaces euclidiens (1)

$\boxed{1}$ On pose $\mathcal{E} = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ où m et n sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

1°) Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ deux éléments quelconques de $\mathcal{E}$.

Vérifier que $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB}) = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} b_{i,j}$.

2°) Démontrer que l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB}) \end{array}$ est un produit scalaire.

On notera $\varphi(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) = (\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$.

Donner une base orthonormée de $\mathcal{E}$ pour ce produit scalaire et préciser la norme associée à ce produit scalaire.

3°) On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ de $\mathcal{E}$ définie par $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$ et B la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Les matrices A et B sont-elles orthogonales pour le produit scalaire considéré ?

4°) On note U la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients de la première ligne sont à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Déterminer l'orthogonal de U.

5°) Dans cette question, on suppose que $n = m$. $\mathcal{E}$ désigne alors $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Démontrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$ on a : $|\,\mathrm{tr}\,\mathrm{A}\,| \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA})}$.

b) On note F l'ensemble des matrices scalaires, G l'ensemble des matrices diagonales, H l'ensemble des matrices symétriques.

Déterminer les orthogonaux de F, G, H.

$\boxed{2}$ Soit E un espace euclidien. Soit u et v deux vecteurs quelconques de E.

Démontrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si, pour tout réel t, on a $\|u + tv\| \geqslant \|u\|$.

$\boxed{3}$ Soit E un espace euclidien de dimension n.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{F} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ une base orthonormée de F.

On note P la projection orthogonale sur F.

1°) Rappeler l'expression de $P(x)$ pour $x \in E$ quelconque.

2°) Soit B une base orthonormée de E. On pose $A = \mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})$.

Démontrer que $\mathrm{Mat}_B(P) = A\,{}^tA$.

$\boxed{4}$ Soit E un espace euclidien.

On dit qu'un endomorphisme f de E est symétrique lorsque pour tout couple (x, y) de vecteurs de E on a :

$(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

1°) Soit f une application de E dans E telle que pour tout couple (x, y) de vecteurs de E on ait :

$(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

Démontrer que f est linéaire.

2°) Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

① f est symétrique

② Il existe une base orthonormée B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(f)$ est symétrique.

③ Pour toute base orthonormée B de E, $\mathrm{Mat}_B(f)$ est symétrique.

3°) Soit f un endomorphisme symétrique de E.

Démontrer que l'on a : $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.

$\boxed{5}$ Soit E un espace euclidien.

On dit qu'un endomorphisme f de E est antisymétrique lorsque, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$.

Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

① u est antisymétrique.

② Pour tout $x \in E$, on a : $(x \mid u(x)) = 0$.

③ Dans toute base orthonormée B de E, la matrice de u est antisymétrique.

$\boxed{6}$ Soit n un entier naturel non nul fixé.

Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = n \end{cases}$.

$\boxed{7}$ **Caractérisation des projecteurs orthogonaux**

Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien réel E.

Le but de l'exercice est de démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

① p est un projecteur orthogonal.

② Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a : $(p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$.

③ Pour tout $x \in E$, on a : $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

1°) Démontrer que : ① $\Leftrightarrow$ ②.

2°) a) Démontrer que : ① $\Rightarrow$ ③.

b) On va démontrer par contraposée que ③ $\Rightarrow$ ①.

On suppose que p n'est pas orthogonal. Il existe donc $x \in \mathrm{Im}\, p$ et $y \in \mathrm{Ker}\, p$ tels que x et y ne soient pas orthogonaux.

Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $\|p(x + \lambda y)\| > \|x + \lambda y\|$.

Indication : On pourra utiliser le résultat de l'exercice $\boxed{2}$:

> Soit E un espace euclidien. Soit u et v deux vecteurs quelconques de E.
> u et v sont orthogonaux si et seulement si, pour tout réel t, on a $\|u + tv\| \geqslant \|u\|$.

Conclure.

8 On note B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $u=(1;2;1)$, $v=(1;0;1)$ et $w=(-1;1;0)$.
Déterminer la matrice du produit scalaire dans B pour que (u,v,w) soit une base orthonormée.

9 Soit E un espace euclidien.
Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout couple (x,y) de vecteurs de E on ait :
$(x\mid y)=0 \Rightarrow (f(x)\mid f(y))=0$.
1°) Soit u et v deux vecteurs unitaires de E.
Démontrer que $\|f(u)\|=\|f(v)\|$.
2°) En déduire qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que pour tout $x\in E$, on ait $\|f(x)\|=\alpha\|x\|$.

10 Soit E un espace euclidien.
Démontrer que : $\forall (x;y;z)\in E^3 \quad \|x-z\|^2 \leqslant 2\left(\|x-y\|^2+\|y-z\|^2\right)$.

11 Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
On note f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et strictement positive sur $]a;b[$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note φ l'application sur $(\mathbb{R}[X])^2$ telle que pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on ait :

$$\varphi(P,Q)=\int_a^b \widetilde{P}(t)\,\widetilde{Q}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) a) Justifier que $\varphi(P,Q)$ est bien défini pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$.
b) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (φ est appelé produit scalaire intégral de poids f).
$\varphi(P,Q)$ sera noté $(P\mid Q)$ dans la suite de l'exercice.
2°) On note $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille orthogonale obtenue à partir de $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ selon le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.
a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_k.
b) Établir que, pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, $\mathrm{Vect}(P_k)\perp \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
c) Démontrer que, pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, P_k admet au moins une racine réelle dans $]a;b[$.

Indication : Considérer $\displaystyle\int_a^b \widetilde{P_k}(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) On suppose que P_k admet p racines réelles distinctes $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans $]a;b[$ avec $p<k$.
Écrire la décomposition en polynômes irréductibles de P_k ; calculer $\left(P_k \mid (X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_p)\right)$.
e) Démontrer que, pour tout entier $k\geqslant 2$, il existe un couple (α_k,β_k) de réels tel que l'on ait :
$P_k=(X+\alpha_k)P_{k-1}+\beta_k P_{k-2}$.
Indication : On pourra considérer, pour tout entier $k\geqslant 2$ et pour tout $i\in [\![0;k-2[\![$, le produit scalaire $(P_k-XP_{k-1}\mid P_i)$.
3°) Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\displaystyle\int_a^b \left(t^{n+1}-\widetilde{P}(t)\right)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ soit minimale, puis déterminer la valeur de ce minimum.

12 On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1°) Démontrer que l'application $\varphi_1 : \begin{array}{l} E^2\to\mathbb{R} \\ (f,g)\mapsto \varphi_1(f,g)=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,g(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t \end{array}$ est un produit scalaire sur E.

2°) L'application $\varphi_2 : \begin{array}{l} E^2\to\mathbb{R} \\ (f,g)\mapsto \varphi_2(f,g)=\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,g(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t \end{array}$ est-elle un produit scalaire sur E ?

13 On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;\pi]$.
1°) Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour tout couple (f,g) d'éléments de E,

$$(f\mid g)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2°) On note φ_1 et φ_2 les fonctions définies sur $[0;\pi]$ par $\varphi_1(t)=\sin t$ et $\varphi_2(t)=\cos t$.
On pose $F=\mathrm{Vect}(\varphi_1,\varphi_2)$.
a) Démontrer que (φ_1,φ_2) est une famille orthonormée de F.
b) On note p la projection orthogonale sur F.
Donner l'expression de $p(f)$ pour $f\in E$.
3°) **Applications**
a) **Application 1**

Démontrer que pour tout $f\in E$, on a : $\left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant \frac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi [f(t)]^2\mathrm{d}t$.

Préciser le cas d'égalité.
b) **Application 2**

Déterminer $\displaystyle\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\int_0^\pi (x\sin t+y\cos t-t)^2\,\mathrm{d}t$.

14 Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a<b$ et $c<d$.
Soit f une fonction continue surjective sur l'intervalle $[a;b]$ à valeurs dans l'intervalle $[c;d]$.
On note E l'ensemble des fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note φ l'application définie sur E^2 telle que pour tout couple (P,Q) d'éléments de E on ait :

$$\varphi(P,Q)=\int_a^b \widetilde{P}(f(t))\,\widetilde{Q}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

1°) a) Justifier que $\varphi(P,Q)$ est bien défini pour tout couple (P,Q) d'éléments de E.
b) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E (φ est appelé produit scalaire intégral de poids f).
2°) On note φ l'application sur E^2 telle que pour tout couple (P,Q) d'éléments de E on ait :

$$\varphi(P,Q)=\int_0^\pi \widetilde{P}(\cos t)\,\widetilde{Q}(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Démontrer que φ est un produit scalaire.
b) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout réel x, on ait :
$\widetilde{T_n}(\cos x)=\cos nx$.

Indication : Transformer $\cos nx + \cos\left[(n+2)x\right]$ en produit.

c) Démontrer que la famille (T_n) est orthogonale.

Calculer la norme de T_n en fonction de *n*.

La famille (T_n) est appelée famille des polynômes de Tchebytcheff de première espèce.

15 Soit E un espace euclidien.
Soit U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que l'on a : $E = U \cap V \oplus (U\cap V)^{\perp} \cap U \oplus (U \cap V)^{\perp} \cap V \oplus U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

16 Soit E un espace préhilbertien réel.
1°) On considère p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ de E (p étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) tels que pour tout couple (i, j) d'entiers naturels distincts compris entre 1 et p au sens large, on ait : $(e_i \mid e_j) \leqslant 0$.

On considère des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. On pose $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| e_i$.

- Comparer les normes de u et v.
- En déduire que $u = 0 \Rightarrow v = 0$.

2°) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$.
On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ de E tels que pour tout couple (i, j) d'entiers naturels distincts compris entre 1 et $n+1$ au sens large, on ait : $(e_i \mid e_j) < 0$.
Démontrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

17 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ n vecteurs unitaires de E tels que pour $i \neq j$ $\|e_i - e_j\| = 1$.
Démontrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

18 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

1°) Démontrer que l'application $(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \widetilde{P^{(i)}}(a_i)\widetilde{Q^{(i)}}(a_i)$ définit un produit scalaire sur E.

2°) Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue à partir de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Démontrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $\widetilde{P_k^{(i)}}(a_i) = \delta_{k,i}$.
3°) Déterminer la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ lorsque $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $a_i = a$ ($a \in \mathbb{R}$ fixé).

19 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien canonique.
On note F le sous-espace vectoriel de E formé des éléments (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
On note p la projection orthogonale sur F.
1°) Déterminer une base de $F^{\perp}$.
2°) Déterminer la matrice de p dans la base canonique de E.

20 Dans tout l'exercice, on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien canonique.
On note F le sous-espace vectoriel de E formé des éléments (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.
On note p la projection orthogonale sur F.
Déterminer la matrice de p dans la base canonique de E.

21 On pose $E = C^2([0;1], \mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.
1°) Démontrer que $(f \mid g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right) dt$ définit un produit scalaire sur E.
2°) On pose $F = \{ f \in E \,/\, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{ f \in E \,/\, f'' = f\}$.
a) Démontrer que pour tout élément f de E et tout élément g de G, on a $(f \mid g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0)$.
b) Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires et orthogonaux.
c) Déterminer une base orthogonale de G.
3°) Préciser la projection orthogonale d'un élément h de E sur G.
4°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $S_{a,b} = \{ f \in E \,/\, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
Justifier l'existence de $m_{a,b} = \inf\left\{ \int_0^1 \left[(h(t))^2 + (h'(t))^2\right] dt, h \in S_{a,b} \right\}$ et donner sa valeur.

22 Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs d'un espace préhilbertien E.
Démontrer que l'on a : $\left\| \sum_{k=1}^{n} u_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$ si et seulement si il existe un vecteur unitaire $e \in E$ tel que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $u_k = \|u_k\| e$.

Indication : On pourra poser $s = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $e = \frac{1}{\|s\|} s$ dans le cas où $s \neq 0$ puis on pourra calculer $(s \mid e)$.

23 Soit E un espace euclidien de dimension n.
Démontrer qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs unitaires de E est une base orthonormée si et seulement si pour tout vecteur u de E on a : $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (u \mid e_i)^2$.

24 Soit E un espace euclidien de dimension n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) et $\mathcal{F} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E (p étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque).

On note u l'application qui à tout vecteur x de E fait correspondre le vecteur $u(x) = \sum_{i=0}^{p} (x \mid a_i) a_i$.

1°) Démontrer que u est un endomorphisme symétrique de E (c'est-à-dire que u est un endomorphisme de E tel que pour tout couple (x, y) de vecteurs de E on ait : $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.
2°) Démontrer que pour tout vecteur x de E on a : $(u(x) \mid x) \geqslant 0$.
Déterminer l'ensemble des vecteurs x de E tels que $(u(x) \mid x) = 0$.
3°) Déterminer le noyau de u. En déduire l'image de u.
4°) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{F}$ pour que u soit bijective.
5°) On suppose que $\mathcal{F}$ est orthonormée. Reconnaître alors u.

25 On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(P, Q) \mapsto \sum_{j=0}^{n} \widetilde{P^{(j)}}(a_j)\widetilde{Q^{(j)}}(a_j)$$

1°) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

2°) Soit $(P_0, P_1, ..., P_n)$ la base orthonormée de E déduite de $(1, X, ..., X^n)$ par le procédé de Schmidt.

Calculer $\widetilde{P_k^{(j)}}(a_k)$.

3°) Déterminer P_k pour $a_j = ja$ (distinguer les cas $a=0$ et $a\neq 0$).

4°) Pour $a_j = ja$, démontrer que $\widetilde{P_k^{(j)}}(x)=\widetilde{P_{k-j}}(x-ja)$ $(0\leqslant j\leqslant k)$.

26 Soit E un espace préhilbertien. Soit u_1, u_2, …, u_n des vecteurs unitaires de E (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé).

Démontrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ d'éléments de $\{-1;1\}$ telle que $\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u_i\right\|\leqslant\sqrt{n}$.

Indication : Considérer des variables aléatoires de Rademacher R_1, R_2, …, R_n deux à deux indépendantes sur un espace probabilisé fini (Ω, P) puis considérer la variable aléatoire $X=\left\|\sum_{i=1}^{n}R_i u_i\right\|^2$.

> On dit qu'une variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé (Ω, P) est une variable aléatoire de Rademacher pour exprimer qu'elle prend ses valeurs dans $\{-1;1\}$ et que $P(Z=-1)=P(Z=1)=\frac{1}{2}$.

27 Soit n un entier naturel fixé.

On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$. Soit a_0, a_1, …, a_n des réels.

1°) À quelle condition définit-on un produit scalaire sur E en posant $(P, Q) = \sum_{k=0}^{n}\widetilde{P}(a_k)\widetilde{Q}(a_k)$?

On suppose désormais que cette condition vérifiée.

2°) Déterminer une base de E orthonormée pour ce produit scalaire.

3°) On pose $F=\left\{P\in E / \sum_{k=0}^{n}\widetilde{P}(a_k)=0\right\}$.

• Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

• Déterminer l'orthogonal de F.

• Démontrer que pour tout $S\in E$ on a $d(S, F)=\dfrac{\left|\sum_{i=0}^{n}\widetilde{S}(a_i)\right|}{\sqrt{n+1}}$.

28 On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale p sur l'hyperplan $H=\left\{(x_1, x_2, ..., x_n)\in E / \sum_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$.

29 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $H=\left\{M=(m_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) / \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}m_{i,j}=0\right\}$.

Calculer pour $A=(a_{i,j})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ fixée le nombre $\delta=\inf_{M\in H}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}(a_{i,j}-m_{i,j})^2$.

30 On pose $E=\mathbb{R}^4$ et l'on munit E de sa structure canonique d'espace euclidien.

On pose $e_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $e_2=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$ et $e_3=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$.

1°) Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.

2°) Déterminer les vecteurs e_4 de E tels que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base orthonormée de E.

31 On pose $E=\mathbb{R}^4$ et l'on munit E de sa structure canonique d'espace euclidien.

On pose $F=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in E / x_1+x_2+x_3+x_4=0 \text{ et } x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$.

1°) Former une base orthonormée de F puis la compléter en une base orthonormée de E.

2°) On note p la projection orthogonale sur F.

Déterminer la matrice de p dans la base canonique B de E.

3°) Déterminer la distance de $x=(1, 2, 3, 4)$ à F.

32 On pose $E=\mathbb{R}^4$ et l'on munit E de sa structure canonique d'espace euclidien.

On pose $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(0, 0, 0, 1)$.

On note B la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

On pose $F=\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in E / \sum_{i=0}^{4}x_i=0 \text{ et } \sum_{i=0}^{4}ix_i=0\right\}$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à F.

Déterminer la matrice de s dans la base B.

33 On pose $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

1°) Démontrer que l'application $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ est un produit scalaire.

$$(A, B)\mapsto \mathrm{tr}({}^t AB)$$

2°) On note F l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer $F^{\perp}$.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

$\boxed{34}$ On pose $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

1°) Soit A et B deux éléments quelconques de E.

Vérifier que $\mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} b_{i,j}$.

2°) Démontrer que l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) \end{array}$ est un produit scalaire.

Donner une base orthonormée de E.

3°) On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices symétriques et G le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices antisymétriques.

Démontrer que F est l'orthogonal de G.

4°) Soit A une matrice de E.

Déterminer la projection orthogonale de A sur F et la projection orthogonale de A sur G.

5°) Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice fixée dans E.

Déterminer $\inf_{\mathrm{M} \in F} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2$.

$\boxed{35}$ Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

On pose $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on munit de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On considère le produit scalaire défini sur E par $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$.

On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\mathrm{I}_n, \mathrm{U}, \mathrm{U}^2, ..., \mathrm{U}^{n-1}\right)$ est orthogonale.

2°) Calculer $\left\| \mathrm{U}^k \right\|$ où k est un entier naturel quelconque.

3°) On pose $F = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$.

Soit V l'élément de E dont les coefficients sont égaux à 1 sur la première ligne et nuls en dehors.

Déterminer la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

Que se passe-t-il si la ligne de 1 n'est pas forcément la première ligne mais une ligne quelconque de la matrice ?

$\boxed{36}$ On note E l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $I = [-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues sur I.

On munit E de structure canonique d'espace vectoriel.

On note F le sous-espace des fonctions paires définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et G le sous-espace des fonctions impaires définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer un produit scalaire sur E pour lequel F et G sont orthogonaux.

$\boxed{37}$ On pose $E = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

1°) Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\int_{[0;1]} P \times Q$ pour $(P;Q) \in E^2$.

2°) Trouver une base orthogonale $\left(H_0, H_1, H_2, H_3\right)$ de E telle que l'on ait $\deg H_k = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

$\boxed{38}$ On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on considère une base orthonormée $\left(e_1, ..., e_n\right)$ de E.

1°) Démontrer que pour tout endomorphisme f de E, on a $\mathrm{tr}\left(f^* \circ f\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\| f\left(e_i\right) \right\|^2$.

2°) En déduire que pour tout projecteur orthogonal p de E, on a $\sum_{i=1}^{n} \left\| p\left(e_i\right) \right\|^2 = \mathrm{rg}\, p$.

$\boxed{39}$ On considère l'ensemble $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On considère le produit scalaire défini par $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$ pour tout couple (A, B) d'éléments de E.

On note $\| \bullet \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit F l'ensemble des éléments de E tels que la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne soit égale à 1.

Déterminer la valeur minimale de $\| \mathrm{A} \|$ pour $\mathrm{A} \in F$ et préciser la matrice A qui réalise ce minimum.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère l'ensemble $E = \mathrm{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

On considère le produit scalaire défini par $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$ pour tout couple (A, B) d'éléments de E.

On note $\| \bullet \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit F l'ensemble des éléments de E tels que la somme des coefficients de chaque colonne soit égale à 1.

Déterminer la valeur minimale de $\| \mathrm{A} \|$ pour $\mathrm{A} \in F$ et préciser la matrice A qui réalise ce minimum.

$\boxed{40}$ Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\left(\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{\left[f(b)\right]^2 - \left[f(a)\right]^2}{2}$.

Préciser le cas d'égalité.

$\boxed{41}$ Soit E un espace préhilbertien réel. On considère n vecteurs e_1, e_2, …, e_n de E (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).

Comparer $\sum_{i=1}^{n} \left(u_i \mid u_{\sigma(i)}\right)$ et $\sum_{i=1}^{n} \left\| u_i \right\|^2$ où σ est une permutation quelconque de l'ensemble $\{1; 2; ...; n\}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Indication : Utiliser en la justifiant l'inégalité $2(u \mid v) \leqslant \| u \|^2 + \| v \|^2$.

$\boxed{42}$ Soit E un espace préhilbertien réel. On considère trois vecteurs a, b, c de E.

Démontrer que $\| a \|^2 + \| b \|^2 + \| c \|^2 \geqslant (a \mid b) + (b \mid c) + (c \mid a)$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Indication : Utiliser en la justifiant l'inégalité $2(u \mid v) \leqslant \| u \|^2 + \| v \|^2$.

43 On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u=(1,1,\ldots,1)$ sur l'hyperplan

$$\mathrm{H}=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E\,/\,\sum_{k=1}^{n}kx_k=0\right\}.$$

44 **Polynômes de Laguerre**

1°) Démontrer que $(f,g)\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

2°) Orthonormaliser la famille $\left(1,x,x^2\right)$ selon le procédé de Schmidt.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\mathrm{L}_n(t)=\dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}^n\left(\mathrm{e}^{-t}t^n\right)}{\mathrm{d}t^n}$ est un polynôme de degré n et que ce polynôme est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Calculer $\mathrm{L}_n(0)$ et la norme de L_n. Conclusion.

45 On pose $\mathrm{E}=\mathrm{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel.

Pour $(f,g)\in\mathrm{E}^2$, on pose $(f\,|\,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2°) On pose $\mathrm{F}=\left\{f\in\mathrm{E}\,/\,f(0)=0\right\}$.

Déterminer l'orthogonal de F.

Indication : On pourra considérer la fonction $g:x\mapsto xf(x)$.

On pose $I=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $(a<b)$.

On note E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $(f,g)\in\mathrm{E}^2$, on pose $(f\,|\,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2°) Soit x_0 un élément fixé de I. On pose $\mathrm{F}=\left\{f\in\mathrm{E}\,/\,f(x_0)=0\right\}$.

Déterminer l'orthogonal de F.

Indication : On pourra considérer la fonction $g:x\mapsto f(x)\left|x-x_0\right|$.

46 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On pose $U=\sum_{i=1}^{n}x_i$ et $V=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

Démontrer que $U^2\leqslant nV$ de trois manières différentes :

- en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- en développant $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$ où $m=\dfrac{U}{n}$;
- en utilisant la convexité de la fonction « carré ».

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

47 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$.

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\leqslant n\times\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$.

48 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien.

On note $x=(x_i)$ et $y=(y_i)$ les vecteurs de E ainsi définis : $x_i=1$ et $y_i=(-1)^{i-1}$.

Déterminer l'angle formé par x et y.

49 1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des réels.

Démontrer que l'on a $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2\leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)$

2°) Soit E un espace euclidien de dimension n. On considère une base orthonormée $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de E.

Soit $f_1,f_2,\ldots,f_n$ n vecteurs de E tels que pour tout entier naturel i tel que $1\leqslant i\leqslant n$ on ait $\|f_i\|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que $(e_1+f_1,e_2+f_2,\ldots,e_n+f_n)$ est une base de E.

Indication : Pour démontrer la liberté, considérer une combinaison linéaire nulle, isoler les e_i et les f_i, utiliser l'expression de la norme en base orthonormée, l'inégalité triangulaire et la question précédente.

50 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $u_1,u_2,\ldots,u_n$ n vecteurs de E et $e_1,e_2,\ldots,e_n$ une famille de réels égaux à 1 ou à – 1.

On pose $v=\sum_{i=1}^{n}u_i$ et $w=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u_i$.

1°) Comparer les normes de v et w.

2°) On suppose que les u_i sont de même norme.

Est-il possible de choisir $e_1,e_2,\ldots,e_n$ tels que v et w soient orthogonaux ?

Réponses

1

5°) b)

$F=\mathrm{Vect}\,(I_n)$ donc $F^{\perp}=I_n^{\perp}=$ ensemble (sev) des matrices de trace nulle.

$G=\mathrm{Vect}\left(E_{i,i}\right)$ donc comme la base canonique de E est une base orthonormée (orthogonale suffirait),

$G^{\perp}=\mathrm{Vect}\left(E_{i,j}\text{ avec } i\neq j\right)$ c'est-à-dire ensemble des matrices dont tous les coefficients sur la diagonale sont nuls.

$H=\mathrm{Vect}\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right)$

L'orthogonal de $E_{i,j}+E_{j,i}$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients situés en i, j et en j, i sont en somme nulle c'est-à-dire sont opposés.

On en déduit que $H^{\perp}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques.

3

1°) version initiale

Démontrer que pour tout $x\in E$, on a : $P(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(a_k\mid x)a_k$.

2°) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(a_k\mid x)a_k=\sum_{k=1}^{p}\left({}^tA_kX\right)A_k=\sum_{k=1}^{p}A_k\,{}^tA_kX$

On pose $B=\left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$.

On pose $A=\left(\alpha_{i,j}\right)$.

$\alpha_{i,j}=\left(a_j\mid e_i\right)$

terme (i, j) de $\mathrm{Mat}_B(P)=\left(P\left(e_j\right)\mid e_i\right)$

$$=\left(\sum_{k=1}^{p}\left(a_k\mid e_j\right)a_k\mid e_i\right)$$
$$=\left(e_j\mid a_1\right)\times\left(a_1\mid e_i\right)+...+\left(e_j\mid e_p\right)\times\left(a_p\mid e_i\right)$$
$$=L_j(A)\times{}^tL_j(A)$$
$$=L_j(A)\times C_j\left({}^tA\right)$$

terme (i, j) de $\mathrm{Mat}_B(P)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(a_k\mid e_i\right)\left(a_k\mid e_j\right)$

$$=\sum_{k=1}^{p}\alpha_{i,k}\alpha_{j,k}$$

5 Pour démontrer que ③ implique ①, utiliser l'expression matricielle du produit scalaire de deux vecteurs.

8 Utiliser la formule de changement de base pour un produit scalaire.

10 $\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$

Élever au carré.

Utiliser $2ab\leqslant a^2+b^2$ pour majorer le double produit.

N.B. : On n'utilise pas le fait que la norme dérive d'un produit scalaire.

13 b) $P(f)=\left(f\mid\varphi_1\right)\varphi_1+\left(f\mid\varphi_2\right)\varphi_2$

3°) a) **Application 1** : On utilise $\|P(f)\|\leqslant\|f\|$.

$$\left(f\mid\varphi_1\right)^2+\left(f\mid\varphi_2\right)^2\leqslant\|f\|^2 \text{ donc } \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

$$\left(\int_0^{\pi}f(t)\cos t\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left[f(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

b) **Application 2**

On pose $u(t)=t$.

$\|u\|^2=\dfrac{2\pi^2}{3}$; $\|P(u)\|^2=4+\dfrac{16}{\pi^2}$; on doit calculer : $\left(u|\varphi_1\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}t\cos t\,\mathrm{d}t$ et $\left(u|\varphi_2\right)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on peut calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}\pi-2$.

$\left(u|\varphi_1\right)=-\dfrac{4}{\pi}$ et $\left(u|\varphi_2\right)=-2$

On trouve : $\mathrm{d}(u\,;F)=\sqrt{\dfrac{2\pi^2}{3}-\dfrac{16}{\pi^2}-4}$.

14 1°) b) Il est important de remarquer que f n'est pas constante sur $[a\,;b]$ puisque $c<d$.

15 $$E=\underbrace{\overbrace{U\cap V\oplus(U\cap V)^{\perp}\cap U}^{U}\oplus(U\cap V)^{\perp}\cap V}_{V}\oplus U^{\perp}\cap V^{\perp}$$

16

1°) Comparons $\|u\|$ et $\|v\|$.

$$\|u\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\,e_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\lambda_i\lambda_j\left(e_i\mid e_j\right)$$

$\lambda_i\lambda_j\leqslant\left|\lambda_i\lambda_j\right|$ (car $\forall x\in\mathbb{R}\quad x\leqslant|x|$)

$\left(e_i\mid e_j\right)<0$ pour $i\neq j$ donc $\lambda_i\lambda_j\left(e_i\mid e_j\right)\geqslant\left|\lambda_i\lambda_j\right|\left(e_i\mid e_j\right)$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\lambda_i\lambda_j\left(e_i\,|\,e_j\right)\geqslant\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda_i\lambda_j\right|\left(e_i\,|\,e_j\right) \text{ donc } \left\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\, e_i\right\|^2\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{p}|\,\lambda_i\,|\; e_i\right\|^2.$$

On a donc $\|\,v\,\|\leqslant\|\,u\,\|$.

2°) **Démontrons que si $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0$, alors $\sum_{i=1}^{p}|\,\lambda_i\,|e_i=0$.**

Le résultat est évident d'après la question 1°) : $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0$ donc $\sum_{i=1}^{p}|\,\lambda_i\,|\;e_i=0$.

3°) On écrit une relation de dépendance linéaire à coefficients réels. Cette relation de dépendance linéaire est encore vraie avec les mêmes coefficients mais en valeur absolue d'après la question précédente.
On scalairise alors par le vecteur manquant et on conclut.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|\,\lambda_i\,|e_i=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|\,\lambda_i\,|\underbrace{\left(e_i\,|\,e_{n+1}\right)}_{<0}=0$$

$$\Rightarrow \forall i\in[\![1\,;n]\!]\quad \lambda_i=0$$

$\boxed{17}$ $\|\,e_i-e_j\,\|=1$ donne $\cancel{1}+1-2\left(e_i\,|\,e_j\right)=\cancel{1}$ donc $\left(e_i\,|\,e_j\right)=\frac{1}{2}$.

$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\ldots+\lambda_ne_n=0$

En scalairisant la relation on obtient un système linéaire qui s'écrit sous forme matricielle : $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & & & \\ & & & & \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$C_1\leftarrow C_1+C_2+\ldots+C_n$

$C_2\leftarrow C_2-\frac{1}{n+1}C_1$

$C_3\leftarrow C_3-\frac{1}{n+1}C_1$

.
.
.

$C_n\leftarrow C_n-\frac{1}{n+1}C_1$

$\boxed{18}$ 2°) On a : $\sum_{i=0}^{n}\left[\widetilde{P^{(i)}}\left(a_i\right)\right]^2=1\quad(1)$.

Il faut démontrer que $\forall i\in\{0,\ldots,n\}\quad \widetilde{P_i^{(i)}}\left(a_i\right)=1$.
En effet, grâce à la relation (1), cela entraînera la nullité des autres dérivées en a_i.

Comme $\deg P_i=i$, $P_i^{(i)}$ est en fait un polynôme constant.

On effectue $\left(P_n\,|\,P_0\right)=0$ donc $\widetilde{P_n^{(0)}}\left(a_0\right)\times\widetilde{P_0^{(0)}}\left(a_0\right)=0$

$\widetilde{P_n^{(0)}}\left(a_0\right)\times1=0$

$\widetilde{P_n^{(0)}}\left(a_0\right)=0$

$\left(P_n\,|\,P_1\right)=0$ donc $\widetilde{P_n^{(0)}}\left(a_0\right)\times\widetilde{P_1^{(0)}}\left(a_0\right)+\widetilde{P_n^{(1)}}\left(a_1\right)\times\widetilde{P_1^{(1)}}\left(a_1\right)=0$

$0+1\times\widetilde{P_n^{(1)}}\left(a_1\right)=0$

$\widetilde{P_n^{(1)}}\left(a_1\right)=0$

On a une sorte de système triangulaire.

Comme $\deg P_i=i$, si $j>i$, $\widetilde{P_i^{(j)}}\left(a_i\right)=0$

3°) On applique la formule de Taylor pour les polynômes et la relation de la question précédente.

$P_k=\frac{\left(X-a\right)^k}{k!}$

$\boxed{19}$ Les vecteurs $v_1=\left(1\,;-1\,;1\,;0\right)$ et $v_2=\left(-1\,;1\,;2\,;3\right)$ constituent une base de F.

$v_1'=\left(1\,;-1\,;1\,;0\right)$
$v_2'=\left(-1\,;1\,;2\,;3\right)$

$$F\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$\mathrm{Mat}_B\,p=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

On passe par la matrice de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

Base orthogonale de $F^{\perp}$: $(1;1;0;0)$ et $(-1;1;2;2)$

Base orthogonale de F : $u_1=(0;0;-1;1)$ et $u_2=(-2;2;-1;-1)$

$\| u_1 \|=\sqrt{2}$; $\| u_2 \|=\sqrt{10}$

Autre version :

F $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$(1;1;0;0)$ et $(0;1;1;1)$ forment une base de $F^{\perp}$ non orthogonale.

On orthogonalise selon le procédé de Schmidt :

$(0;1;1;1)-\frac{1}{2}(1;1;0;0)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;1\right)$

$\left((1;\ 1;\ 0;\ 0);\ (-1;\ 1;\ 2;\ 2)\right)$ est une base orthogonale de $F^{\perp}$.

$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;1\right)=(0;1;1;1)-\frac{1}{2}(1;1;0;0)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;1\right)$

$$P_{F^{\perp}}(x)=\frac{x_1+x_2}{2}(1;1;0;0)+\frac{-x_1+x_2+2x_3+2x_4}{10}(-1;1;2;2)$$

$$\mathrm{Mat}_B\left(P_{F^{\perp}}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_B\left(P_F\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Autre méthode : utilisation de l'exercice $\boxed{3}$

$A=\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F}$: base orthonormée de F

F $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=-x_3-x_4 \end{cases}$

$(x_1;x_2;x_3;x_4)=x_3(1;-1;1;0)+x_4(1;-1;0;1)$

$\left((1;-1;1;0),(1;-1;0;1)\right)$ est une base de F non orthogonale.

On l'orthogonalise : $(1;-1;1;0)-\frac{2}{3}(1;-1;0;1)=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1\right)$.

$\left((1;-1;1;0),(1;-1;-2;3)\right)$ est une base orthogonale de F.

On normalise : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;1;0),\frac{1}{\sqrt{15}}(1;-1;-2;3)\right)$.

$$A=\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \qquad {}^tA=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

$$A\,{}^tA=\mathrm{Mat}_B\left(P_F\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{20}$ Les vecteurs $u_1=(1;1;1;1)$ et $u_2=(1;-1;1;-1)$ constituent une base de $F^{\perp}$.

On note p' la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

$$\mathrm{Mat}_B\,p'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_B\,p=\mathrm{I}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{21}$ E est un espace préhilbertien (de dimension infinie).

2°) a) $fg+f'g'=fg''+f'g'=(fg')'$

c) G est de dimension 2 donc finie.

On note φ_1 et φ_2 les fonctions définies sur R par $\varphi_1(t)=\mathrm{e}^{t}$ et $\varphi_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$.

(φ_1,φ_2) est une base orthogonale (mais pas orthonormée).

3°) On utilise la base orthogonale de G que l'on a précisée à la question précédente.

$(f\mid\varphi_1)=f(1)\mathrm{e}-f(0)$ et $(f\mid\varphi_2)=f(1)\mathrm{e}^{-1}-f(0)$

$P_G(f)=(f\mid\varphi_1)\varphi_1+(f\mid\varphi_2)\varphi_2$

$\| P_G(f)\|^2=\left[f(1)\mathrm{e}-f(0)\right]^2\|\varphi_1\|^2+\left[f(1)\mathrm{e}^{-1}-f(0)\right]^2\|\varphi_2\|^2$

4°) On note u la fonction affine telle que $u(0)=a$ et $u(1)=b$.

On choisit une fonction affine car c'est une fonction simple.
On peut donner l'expression de u : $u(t)=(b-a)t+a$. Cette expression ne sert néanmoins pas dans la suite.

$E_{a,b}=u+F$ (tout élément de $E_{a,b}$ s'écrit comme la somme de la fonction u et d'une fonction quelconque f dans F).

$E_{a,b}$ est le sous-espace passant par u de direction F.

$$\int_0^1 \left[\left(h(t)\right)^2+\left(h'(t)\right)^2\right]\,\mathrm{d}t=\| h \|^2$$

On cherche $\inf\limits_{h\in E_{a,b}} \| h \|^2$ ou encore $\inf\limits_{f\in F} \| f+u \|^2$.

On peut voir que cet inf peut aussi s'écrire $\inf\limits_{f\in F} \| u-f \|^2$.

Cette fois, on peut dire s'agit du carré de la distance de u à F qui est aussi égal au carré de la norme du projeté orthogonal de u sur G.

On cherche donc le projeté orthogonal de u sur G en utilisant la question précédente.

$$P_G(u)=(be-a)\varphi_1+\left(be^{-1}-a\right)\varphi_2$$

$$m_{a,b}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\text{ch }1-2ab}{\text{sh }1}$$

$$\| \varphi_1 \|^2=e^2-1$$

$\boxed{22}$ **Sens direct :**

On suppose que : $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \right\|=\sum\limits_{k=1}^{n} \| u_k \|$.

$$(s\,|\,e)=\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \middle| e\right)=\sum_{k=1}^{n}(u_k|e)\leqslant \sum_{k=1}^{n}\| u_k \| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwartz)}$$

$$(s\,|\,e)=\| s \|=\left\| \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|$$

Or : $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \right\|=\sum\limits_{k=1}^{n}\| u_k \|$

Donc $\forall k\in\{1,\dots,n\}$ $(u_k|e)=\| u_k \|$. Par suite, $u_k=\| u_k \| e$ (égalité dans Cauchy-Schwartz : u_k et e sont colinéaires, de même sens).

$\boxed{24}$ voir exercice $\boxed{18}$

$\boxed{24}$
1°) éventuellement ajouter :
Démontrer de plus que u est positif (c'est-à-dire que pour tout vecteur x de E on a : $\left(u(x)\,|\,x\right)\geqslant 0$).
2°) On pose $F=\text{Vect}(a_i)$.
On a $F^{\perp}\subset \text{Ker } u$ de manière évidente.
Réciproquement, si x est un vecteur de Ker u, alors $\left(u(x)\,|\,x\right)=0$.
On obtient une somme de carrés de réels qui est nulle donc chaque réel est nul.
On obtient $\text{Ker } u=F^{\perp}$.
On a également $\text{Im } u=F$ (propriété des endomorphismes symétriques).
3°) u est bijectif si et seulement si la famille des a_i est génératrice.

$\boxed{25}$ Voir TD 18 Anthony Mansuy exercice 18-12

$\boxed{26}$

$$X=\left\| \sum_{i=0}^{n} R_i u_i \right\|^2$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} R_iR_j\left(u_i\,|\,u_j\right)$$

$$E(X)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} E\left(R_iR_j\right)\left(u_i\,|\,u_j\right) \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$
$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} E\left(R_i^{\,2}\right)\left(u_i\,|\,u_i\right)$$
$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\| u_i \|^2$$
$$=n$$

Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n.
La variable aléatoire R_iR_j prend les valeurs 1 et – 1.

$$P\left(R_iR_j=1\right)=P\left(R_i=1\right)P\left(R_j=1\right)+P\left(R_i=-1\right)P\left(R_j=-1\right) \quad \text{(indépendance des variables aléatoires)}$$

$$P\left(R_iR_j=1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

La variable aléatoire R_iR_j est donc une variable aléatoire de Rademacher.

Par conséquent, $E\left(R_iR_j\right)=0$.

On raisonne ensuite par l'absurde.

On suppose que pour toute famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ d'éléments de $\{-1;1\}$, on a : $\left\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| > \sqrt{n}$.

On aurait alors $\forall \omega \in \Omega \quad \mathrm{X}(\omega) > n$ (car la famille $(\mathrm{R}_1(\omega), \mathrm{R}_2(\omega), ..., \mathrm{R}_n(\omega))$ est une famille d'éléments de $\{-1;1\}$).

Or par définition de l'espérance, on a : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{X}(\omega) \times P(\{\omega\})$. On aurait alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) > n$.

$\boxed{27}$

1°) On démontre d'abord la linéarité [$(\lambda P, Q) = \lambda(P, Q)$ et $(P, Q+R) = (P, Q) + (P, R)$] et la symétrie [$(P, Q) = (Q, P)$].

$$(\lambda P, Q) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\lambda P}\,(a_k)\widetilde{Q}(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda \widetilde{P}\,(a_k)\widetilde{Q}(a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}\,(a_k)\widetilde{Q}(a_k) = \lambda(P, Q)$$

On démontre ensuite la positivité.

$$(P,\ P) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}\,(a_k)\widetilde{P}(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \left[\widetilde{P}\,(a_k)\right]^2 \geqslant 0$$

$$(P,\ P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left[\widetilde{P}\,(a_k)\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{0, ..., n\} \quad \widetilde{P}\,(a_k) = 0 \quad \text{(car on travaille avec des nombres réels)}$$

On définit un produit scalaire si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

2°)
Une mauvaise idée consisterait à orthonormaliser la base canonique de E selon le procédé de Schmidt.

Une base orthonormée pour ce produit scalaire est constituée par les polynômes d'interpolation de Lagrange associée à la famille $(a_0, a_1, ..., a_n)$.

$$\mathrm{L}_i = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)} \text{ ou } \mathrm{L}_i = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (a_i - a_k)}$$

On n'a pas besoin d'utiliser leur expression. Il suffit d'écrire $\widetilde{\mathrm{L}_i}(a_j) = \delta_{i,j}$.

Vérifions que $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, ..., \mathrm{L}_n)$ est une base orthonormée pour le produit scalaire.

$$(\mathrm{L}_i \mid \mathrm{L}_j) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\mathrm{L}_i}(a_k) \times \widetilde{\mathrm{L}_j}(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k} \times \delta_{j,k}$$

Déterminons l'orthogonal de *F*.

On pose $Q = 1$ (polynôme constant).

$P \in F \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}(a_k) = 0$ (il faut interpréter le premier membre comme un produit scalaire d'où l'introduction du polynôme *Q*)

$\Leftrightarrow (P \mid Q) = 0$

On a : $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / (P \mid Q) = 0\}$ donc $F = Q^{\perp}$.

$F^{\perp}$ est donc l'ensemble des polynômes constants c'est-à-dire $\mathbb{R}_0[X]$.

$$\mathrm{d}(X^p, F) = \| p_{F^{\perp}}(X^p) \| = \frac{|(X^p \mid Q)|}{\| Q \|} = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n} a_k{}^p \right|}{\sqrt{n+1}} \quad \text{(attention à ne pas mélanger les différents } p \text{ !)}$$

On peut observer que le résultat est bien cohérent lorsque $p = 0$.

On utilise le résultat suivant :
Soit H un hyperplan. On note a un vecteur non nul de $\mathrm{H}^{\perp}$. Autrement dit, $\mathrm{H} = (\mathrm{Vect}\ a)^{\perp}$.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a : $\mathrm{d}(x, \mathrm{H}) = \dfrac{|(x \mid a)|}{\| a \|}$.

On a en effet $p_{\mathrm{Vect}\, a}(x) = \dfrac{(x \mid a)}{\| a \|^2} a$.

$\boxed{28}$

On écrit $\mathrm{H} = (1, 1, ..., 1)^{\perp}$ ou $\mathrm{H} = [\mathrm{Vect}(1, 1, ..., 1)]^{\perp}$.
On pose $u = (1, 1, ..., 1)$.

$\mathrm{H}^{\perp} = \mathbb{R}u$

$\forall x \in E \quad p_{\mathrm{H}^{\perp}}(x) = \dfrac{(x \mid u)}{\| u \|^2} u$ (on notera que $\dfrac{(x \mid u)}{\| u \|^2}$ est un réel)

On pose $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
$\| u \|^2 = \| (1, 1, ..., 1) \|^2 = n$
$(x \mid u) = x_1 + x_2 + ... + x_n$

$$\forall x \in E \quad p_{\mathrm{H}^\perp}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} u$$

La matrice de $p_{\mathrm{H}^\perp}$ dans la base canonique est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$.

$$\mathrm{Mat}_B\left(p_{\mathrm{H}^\perp}\right) = I_n - \mathrm{Mat}_B\left(p_{\mathrm{H}}\right)$$

La matrice de p_{H} dans la base canonique est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à $\frac{n-1}{n}$ et les autres coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$.

On vérifie que $\mathrm{tr}\ p_{\mathrm{H}} = n-1 = \dim \mathrm{H}$.

Variantes :

1°) Au début, faire une figure avec H et $\mathrm{H}^\perp$ ainsi qu'un vecteur x permettant d'illustrer $p_{\mathrm{H}}(x) + p_{\mathrm{H}^\perp}(x) = x$.

On a : $\dim \mathrm{H}^\perp = 1$ et $\dim \mathrm{H} = n-1$.

2°) $p_{\mathrm{H}^\perp}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}(1, 1, ..., 1)$

$p_{\mathrm{H}}(x) = x - p_{\mathrm{H}}(x)$

$$p_{\mathrm{H}}(x) = (x_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}(1, 1, ..., 1)$$

3°)

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & -1 & -1 \\ -1 & & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & n \end{pmatrix}$$

4°) $p_{\mathrm{H}}(e_1) = (1, 0, ..., 0) - \frac{1}{n}(1, 1, ..., 1)$

$\boxed{29}$ $\delta = \inf_{\mathrm{M} \in H} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2$.

On se réfère à l'exercice $\boxed{1}$.

H est l'orthogonal de la matrice U dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On applique la formule de distance à un hyperplan.

$$\delta = \frac{\left| \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}^{n} a_{i,j} \right|}{n}$$

$\boxed{30}$

$$\left(a, -a, -a, \frac{a}{2}\right)$$

$\boxed{32}$

$$\mathrm{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{E} \;/\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\right\}$$

$\mathrm{F} = \mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$ avec $\mathrm{H}_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $\mathrm{H}_2 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$

$\dim \mathrm{F} = 2$

On cherche une base de F.

$u_1 = (1, -2, 1, 0)$ et $v_2 = (2, -3, 0, 1)$

On écrit ensuite : $\mathrm{F}^\perp = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{E} \;/\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0\right\}$.

Le 5-6-2016

$u' = S_{\mathrm{F}}(u) \Leftrightarrow \begin{cases} u' + u \in \mathrm{F} \\ u' - u \in \mathrm{F}^\perp \end{cases}$ donne des équations

$$\begin{cases} x' + y' + z' + t' = -(x + y + z + t) \\ x' + 2y' + 3z' + 4t' = -(x + 2y + 3z + 4t) \\ x' - 2y' + z' = x - 2y + z \\ 2x' - 3y' + t' = 2x - 3y + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x' = 2x - 4y - z + 2t \\ 5y' = -4x + 2y - 2z - t \\ 5z' = -x - 2y - 2z - 4t \\ 5t' = 2x - y - 4z - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x-4y-z+2t}{5} \\ y' = \dfrac{-4x+2y-2z-t}{5} \\ z' = \dfrac{-x-2y-2z-4t}{5} \\ t' = \dfrac{2x-y-4z-2t}{5} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ 4°) $\inf\limits_{M \in F} \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2$

Il s'agit du carré de la distance de A au sous-espace *F*.

Le projeté orthogonal de A sur *F* est donné par la formule $\dfrac{A + {}^tA}{2}$.

$$\inf_{M \in F} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(a_{i,j} - m_{i,j}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \left(a_{i,j} - a_{j,i}\right)^2$$

$\boxed{\mathbf{35}}$ 2°) U est la matrice associée à une permutation.

$$P_F(V) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(V \mid U^k\right)}{n^2} U^k$$

Or $\left(V \mid U^k\right) = 1$.

On a donc $P_F(V) = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} U^k$.

$P_F(V) = \dfrac{1}{n^2} H$ où H est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$\| H \|^2 = n^2$ et $\| V \|^2 = n$

$$d(V, F)^2 = \| V \|^2 - \| P_F(V) \|^2 = n - \frac{1}{n^2}$$

On pourra remarquer que $d(V, 0)^2 = \| V \|^2 = n$ et est donc plus grande que la valeur précédente.

$\boxed{\mathbf{38}}$ 1°)

$\mathrm{tr}(f^* \circ f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f^* \circ f(e_i) \mid e_i\right)$ (formule de la trace d'un endomorphisme dans un espace vectoriel euclidien)

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(e_i) \mid f(e_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \| f(e_i) \|^2$$

$\boxed{\mathbf{39}}$ *F* est l'ensemble des matrices A de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\| A \|^2 = 2\lambda^2 + 2(1-\lambda)^2$ minimale pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{44}}$

2°) $\left(1, x-1, x^2 - 4x + 2\right)$

3°) $L_n(0) = 1$; $\| L_n \| = 1$

$(-1)^n L_n$ est la suite orthogonale de $\left(t^n\right)$ par le procédé de Schmidt.

$\boxed{\mathbf{45}}$

1°) E est un espace préhilbertien de dimension infinie.

2°) L'orthogonal de F est le singleton constitué de la fonction identiquement nulle sur $[0 ; 1]$.

Le résultat s'explique par le fait qu'on est en dimension infinie.

$\boxed{\mathbf{46}}$ La méthode par la somme revient à faire König Huygens.

L'exercice $\boxed{\mathbf{46}}$ a été écrit le dimanche premier janvier 2022 .

Questions de cours

$\boxed{1}$ Inégalité de Cauchy-Schwartz (énoncé, démonstration, cas d'égalité).

$\boxed{2}$ Orthogonal d'une partie. Définition et propriétés.

$\boxed{3}$ Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien.

$\boxed{4}$ Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

$\boxed{5}$ Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

$\boxed{6}$ Double orthogonal.

$\boxed{7}$ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

$\boxed{8}$ Distance et projection orthogonale.

$\boxed{9}$ Matrice d'une forme bilinéaire symétrique dans une base, matrice d'un produit scalaire dans une base.
Écriture matricielle du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de la matrice de ce produit scalaire.
Formule de changement de base. Caractérisation d'une base orthogonale, d'une base orthonormée.

$\boxed{10}$ Famille orthogonale de vecteurs (définition) ; démontrer que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace euclidien est libre.

$\boxed{11}$ Définition d'une base orthonormée dans un espace euclidien. Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Expression du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leurs coordonnées dans une base orthonormée ; expression de la norme d'un vecteur à l'aide de ses coordonnées dans une base orthonormée.

$\boxed{12}$ Norme associée à un produit scalaire.

$\boxed{13}$ Forme linéaire x^* ou $(x \mid .)$ (on lit « x contre … ») associée à un vecteur x dans un espace euclidien E.
Description des formes linéaires dans un espace euclidien. Isomorphisme canonique entre un espace euclidien E et son dual E^*.

$\boxed{14}$ Écart angulaire de deux vecteurs non nuls. Définition et justification de cette définition.
Expression du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leur écart angulaire.
Caractérisation de deux vecteurs dont l'écart angulaire est nul ; de deux vecteurs dont l'écart angulaire est égal à π.

$\boxed{15}$ Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On note p la projection orthogonale sur F.
Soit x un vecteur quelconque de E.
Compléter $\| p(x) \| = \| x \| \Leftrightarrow \ldots$. Justifier.

$\boxed{16}$ Identités classiques du produit scalaire : identité du parallélogramme ; formules de polarisation.

$\boxed{17}$ Expression de la projection orthogonale d'un vecteur x sur la droite vectorielle engendrée par un vecteur u non nul. Plus généralement, expression de la projection orthogonale d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel dont on connaît une base orthogonale.

$\boxed{18}$ Soit E un espace euclidien.
Soit U et V deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que l'on a : $(U+V)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}$; $(U\cap V)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}$.

$\boxed{19}$ Aspect matriciel d'une base orthogonale.
Aspect matriciel d'une base orthonormée.

$\boxed{20}$ **Distance d'un vecteur à un hyperplan**
Soit H un hyperplan dans un espace euclidien E. On note a un vecteur non nul de $\mathrm{H}^{\perp}$. Autrement dit, $\mathrm{H}=(\mathrm{Vect}\ a)^{\perp}$.

Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{E}$, on a : $\mathrm{d}(x,\mathrm{H})=\dfrac{|(x\,|\,a)|}{\|a\|}$.

Soit f une forme linéaire.
Par le théorème de représentation, on sait qu'il existe un unique élément a de E tel que $f=(a\,|\,\bullet)$.

Démontrer que pour tout $x\in\mathrm{E}$, on a : $\mathrm{d}(x,\mathrm{Ker}\ f)=\dfrac{|f(x)|}{\|a\|}$.

$\boxed{21}$ Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que pour tout vecteur x de E, $d(x\,;\mathrm{F})=d(-x\,;\mathrm{F})$.

$\boxed{22}$ Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On note $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base orthogonale de E.
On note $\mathrm{I}=\{1,\dots,n\}$ et on considère un sous-ensemble J non vide de I.
On note $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\{e_i,i\in\mathrm{J}\}$.
$\mathrm{F}^{\perp}$?

$\boxed{23}$ 1°) Soit x_1 et x_2 deux éléments de E.
Alors x_1 et x_2 sont orthogonaux équivaut à …. (condition avec les normes)
2°) Soit x_1, x_2, …, x_n des vecteurs de E.
Si x_1, x_2, …, x_n sont deux à deux orthogonaux, alors $\|x_1+x_2+...+x_n\|^2=.....$

$\boxed{24}$ Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On note $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit x un vecteur quelconque de E. On note $(x_1,x_2,...,x_n)$ ses coordonnées dans B.
Donner l'expression de la norme de x en fonction des coordonnées.

$\boxed{25}$ Expression du produit scalaire de deux vecteurs dans une base quelconque, dans un base orthogonale et dans une base orthonormée à l'aide de leur coordonnées.

Produit vectoriel de deux vecteurs

Cours TS interrogation écrit sur une feuille il y a très longtemps par moi (classeur noir avec contrôles de M. Moulia)

• Si u et v sont deux vecteurs, $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

• Il y a égalité si et seulement si u et v sont orthogonaux.

Réponses aux questions de cours

$\boxed{22}$
1[er] cas : J strictement inclus dans I alors $\mathrm{F}^{\perp}=\mathrm{Vect}\{e_i,i\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}\}$.
2[e] cas : $\mathrm{J}=\mathrm{I}$ alors $\mathrm{F}^{\perp}=\{0\}$

$\boxed{24}$
$\|x\|^2={x_1}^2+{x_2}^2+...+{x_n}^2$

Le carré de la norme d'un vecteur x est égal à la somme des carrés des coordonnées de x dans une base orthonormée de E.

$\|x\|^2={}^t\mathrm{XX}$

$\boxed{25}$
$\sum x_iy_j\langle e_i\,|\,e_j\rangle$

Cette relation fonctionne pour une forme bilinéaire symétrique.
$\sum x_iy_i\|e_i\|^2$