TS

Loi exponentielle

Plan du chapitre :

Rappels sur le chapitre précédent :

On est parti de la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] puis sur un intervalle [a ; b] quelconque (formule donnant la probabilité d'un intervalle [α ; β] inclus dans [a ; b] : $\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$).

On a procédé à une ouverture permettant de relier les calculs précédents aux intégrales (ce qui peut paraître un peu bizarre de prime abord !).

Cela a débouché sur la notion de loi de probabilité définie par une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] (ou plus généralement sur un intervalle fermé borné [a ; b]).
La probabilité d'un intervalle apparaît alors comme aire sous la courbe de la fonction de densité.

Dans ce chapitre, le principe sera le même que dans le chapitre précédent sauf que l'on va voir la notion de densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; + ∞[. Comme cet intervalle est illimité à droite, cela va nécessiter quelques petites adaptations que nous allons voir.

Objectif : étudier une loi de probabilité continue autre que la loi uniforme sur [0 ; 1] qui sert en physique.

I. Fonction de densité sur l'intervalle [0 ; + ∞[

1°) Définition

$\lambda > 0$ est fixé (nous verrons l'interprétation de ce réel en physique dans le paragraphe **IV**).

On considère la fonction $f : \left[0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

N.B. : La valeur de λ sera en général donnée dans les exercices sauf dans certains exercices où l'on demandera d'abord de calculer la valeur de λ avant de l'utiliser dans la suite.
On ne peut pas se représenter concrètement le λ.

On avait étudié les fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ où k est un réel strictement positif dans le chapitre sur « Exponentielle (2) ».

2°) Propriété

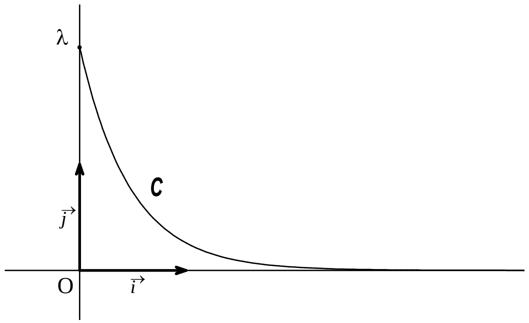
f vérifie les 3 conditions :

C_1 : f est définie et continue sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

C_2 : f est positive ou nulle sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

C_3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

On dit que f est une **fonction de densité** sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.



C_3 peut aussi s'écrire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

N.B. : Il n'y a pas de condition sur la monotonie pour une densité de probabilité.

3°) Démonstration

$\left.\begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array}\right\}$ évidents

$$C_3 : \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ (car $\lambda > 0$)

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (on aborde ici la notion de limite d'intégrale qui a déjà été vue en exercice).

Il n'y a donc plus d'objection à mettre concernant cette écriture étrange. Nous nous garderons cependant de l'utiliser cette année.

II. Définition et premières propriétés de la loi exponentielle

1°) Définition

Nous admettrons qu'il existe une unique loi de probabilité P sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de densité de probabilité

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Cette loi de probabilité P est appelée **« loi exponentielle de paramètre λ »**.

La fonction f définie précédemment est la fonction de densité associée à la **« loi exponentielle de paramètre λ »**.

On peut signaler d'emblée la propriété intéressante (et fondamentale) : $\boldsymbol{P([0\,;+\infty[) = 1}$.

2°) Probabilité d'un intervalle fermé borné

Pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [0\,;+\infty[$, on a :

$$\boxed{P([\alpha\,;\beta]) = \int_\alpha^\beta \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda\beta}}$$

3°) Cas particulier : probabilité d'un singleton

Pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, on a :

$$\boxed{P(\{\alpha\}) = P([\alpha\,;\alpha]) = \int_\alpha^\alpha \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 0}$$

4°) Un résultat important à savoir

$$\boxed{P([\alpha\,;+\infty[) = 1 - P([0\,;\alpha]) = \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}}$$

5°) Utilisation en physique

Cette loi de probabilité modélise la durée de vie d'un noyau radioactif (cf. **IV.**).

6°) Variable aléatoire qui suit la loi exponentielle ; fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

On notera la propriété suivante qui est très importante :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P(\mathrm{X} \leqslant x) = P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant x)$ et $P(\mathrm{X} \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

La fonction de répartition de X est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

- $\forall x \in \left]-\infty\,;0\right[\quad \mathrm{F}(x)=0$;
- $\forall x \in \left[0\,;+\infty\right[\quad$ par $\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

III. Exercice-type rédigé

Énoncé :

La durée en années de bon fonctionnement d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{10}$.

1°) Probabilité que le composant fonctionne entre 10 et 15 ans (au sens large)

On note P la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{10}$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

$$P\left(\left[10\,;15\right]\right)=\int_{10}^{15}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\;\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{10}^{15}=\mathrm{e}^{-10\lambda}-\mathrm{e}^{-15\lambda}=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1,5}\quad\text{(valeur exacte)}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $P\left(\left[10\,;15\right]\right)=0{,}1447...$

2°) Probabilité que le composant fonctionne au plus 10 ans

$$P\left(\left[0\,;10\right]\right)=\int_{0}^{10}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\;\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{10}=-\mathrm{e}^{-10\lambda}+\mathrm{e}^{0}=1-\mathrm{e}^{-1}\quad\text{(valeur exacte)}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $P\left(\left[0\,;10\right]\right)=0{,}6321...$

3°) Probabilité que le composant fonctionne au moins 10 ans

$$P\left(\left[10\,;+\infty\right[\right)=\begin{cases}\displaystyle\int_{10}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\;\mathrm{d}x\;\longrightarrow\text{pas cette année}\\[2ex] 1-P\left(\left[0\,;10\right[\right)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $P\left(\left[10\,;+\infty\right[\right)=0{,}367...$

Remarque :

On a : $\left[0\,;10\right]=\left[0\,;10\right[\cup\{10\}$ (réunion disjointe). Or $P\left(\{10\}\right)=0$.
Donc $P\left(\left[0\,;10\right]\right)=P\left(\left[0\,;10\right[\right)$.

IV. Application à la physique

1°) Lien entre décroissance radioactive et loi exponentielle

On considère un élément radioactif.

En physique, on établit que le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t est donné (modélisé) par : $N(t)=N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où $\lambda>0$ désigne la constante de radioactivité du composant et N_0 le nombre de noyaux radioactifs présent initialement. Cette relation est appelée « loi de décroissance radioactive ».

La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un noyau radioactif.

$$\begin{aligned}P(\text{« le noyau meurt entre 0 et } t\text{ »})&=\frac{\text{nombre de noyaux morts entre les instants 0 et } t}{\text{nombre de noyaux initial}}\\&=\frac{\text{nombre de noyaux initial }-\text{nombre de noyaux restant à l'instant } t}{\text{nombre de noyaux initial}}\\&=\frac{N_0-N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}}{N_0}\\&=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\\&=\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\;\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2°) Propriété fondamentale (qui justifie le nom de loi de durée de vie sans vieillissement)

P : loi de exponentielle de paramètre $\lambda>0$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$

Pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\,/\left[t\,;+\infty\right[\right)$ ne dépend pas du réel $t\geqslant 0$.

ou :

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P\left(\mathrm{X}\geqslant t+s\,/\,\mathrm{X}\geqslant t\right)$ ne dépend pas du réel $t\geqslant 0$.

Ou encore (meilleure formulation, à connaître par cœur)

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\boldsymbol{P\left(\mathrm{X}\geqslant t+s\,/\,\mathrm{X}\geqslant t\right)=P\left(\mathrm{X}\geqslant s\right)}$.

Interprétation concrète :

Dans la situation d'un élément radioactif où X désigne sa durée de vie, l'égalité précédente exprime que la probabilité qu'un noyau radioactif soit encore en vie à l'instant $t+s$ sachant qu'il est encore en vie à l'instant t ne dépend pas du réel t.

Exemple :

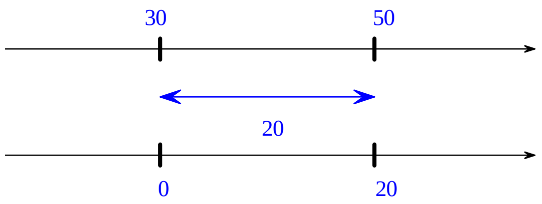
On suppose que la durée de vie en mois d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

t représente un instant et s représente une durée.

$t=30$ et $s=20$

$P\left(\mathrm{X}\geqslant t+s\,/\,\mathrm{X}\geqslant t\right)=P\left(\mathrm{X}\geqslant 50\,/\,\mathrm{X}\geqslant 30\right)$ (probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 50 sachant qu'il a déjà vécu 30 mois)

On peut prendre le 30[e] mois comme année 0.



La probabilité est égale à $P\left(\mathrm{X}\geqslant 20\right)$.

On dira que X est « sans mémoire ».

3°) Démonstration (ROC)

$P\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right)=\dfrac{P\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)}{P\left(\mathrm{B}\right)}$ (avec $P\left(\mathrm{B}\right)\neq 0$)

On a : $P\left([t+s\,;+\infty[\,/\,[t\,;+\infty[\right)=\dfrac{P\left([t+s\,;+\infty[\cap[t\,;+\infty[\right)}{P\left([t\,;+\infty[\right)}$.

On peut écrire : $P\left([t+s\,;+\infty[\,/\,[t\,;+\infty[\right)=\dfrac{P\left([t+s\,;+\infty[\right)}{P\left([t\,;+\infty[\right)}$

On sait que $P\left([t\,;+\infty[\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P\left([t+s\,;+\infty[\right)=\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$.

$$\begin{aligned}P\left([t+s\,;+\infty[\,/\,[t\,;+\infty[\right)&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)+\lambda t}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda s}\end{aligned}$$

Rappel : $P\left(]\alpha\,;\beta]\right)=P\left([\alpha\,;\beta]\right)$ (α et β sont deux réels positifs ou nuls).

4°) Autre résultat à connaître

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\boldsymbol{P\left(\mathrm{X}\leqslant t+s\,/\,\mathrm{X}\geqslant t\right)=P\left(\mathrm{X}\leqslant s\right)}$.

V. Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle

1°) Définition

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

L'espérance et la variance de X sont données en reprenant la définition donnée dans le chapitre sur les généralités sur les variables à densité.
On utilise fonction de densité $f: x\mapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ et l'on adapte en considérant des limites.
On démontrera dans la partie démonstration que ces limites existent bien et sont finies, ce qui justifie la définition donnée ci-dessous.

- L'**espérance** mathématique de X, notée $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)$, est la limite de $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} x\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

- La **variance** de X, notée $\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)$, est la limite de $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \left(x-\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

On retiendra $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} x\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)=\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} \left(x-\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

On pourrait écrire $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x-\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\times\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ mais on préfère ne pas le faire en terminale.

2°) Propriété

- $E(X)=\frac{1}{\lambda}$
- $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Il découle immédiatement de l'expression de la variance que $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$ car $\lambda>0$.

3°) Démonstration pour l'espérance (la variance est admise)

Par définition, on a : $E(X)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \lambda x\, e^{-\lambda x}dx$.

Une telle intégrale ne peut se calculer directement car on ne connaît pas de primitive de la fonction qui figure « sous » l'intégrale.

1ère méthode : utilisation d'une intégration par parties

2e méthode : utilisation de la fonction $G : t \mapsto -\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$

$\forall t\in\mathbb{R}\quad G'(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$ (calcul très simple)

Donc $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx=\left[G(x)\right]_0^A=\frac{-Ae^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

$Ae^{-\lambda A}=\frac{A}{e^{\lambda A}}=\frac{1}{\frac{e^{\lambda A}}{A}}=\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\frac{e^{\lambda A}}{\lambda A}}$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(Ae^{-\lambda A}\right)=0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ (limite de référence)

On pourrait effectuer le changement de variable $X=\lambda A$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A}=0$ car $\lambda>0$

Donc $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Pour la variance, le mieux est d'utiliser la formule de Koenig-Huyghens.

$$V(X)=\left(\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dx\right)-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

On est donc amenée à considérer l'intégrale $\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt$.

Pour la calculer, on utilise une intégration par parties.

On considère les fonctions u et v définies par $u(t)=t^2$ et $v(t)=-e^{-\lambda t}$.

On peut écrire : $\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt=\int_0^A u(t)\times v'(t)\,dt$.

Donc d'après la formule d'intégration par parties, on a : $\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt=\left[u(t)\times v(t)\right]_0^A-\int_0^A u'(t)v(t)\,dt$.

On achève le calcul.

$$\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt=\left[t^2\times\left(-e^{-\lambda t}\right)\right]_0^A-\int_0^A 2t\times\left(-e^{-\lambda t}\right)dt$$

$$=\left[t^2\times\left(-e^{-\lambda t}\right)\right]_0^A+2\int_0^A te^{-\lambda t}\,dt$$

$$=-A^2\times e^{-\lambda A}+2\int_0^A te^{-\lambda t}\,dt$$

L'intégrale $\int_0^A te^{-\lambda t}\,dt$ a déjà été considérée pour le calcul de $E(X)$.

On a avait démontrée que $\int_0^A \lambda te^{-\lambda t}dt\xrightarrow[A\to+\infty]{}\frac{1}{\lambda}$ donc $\int_0^A te^{-\lambda t}dt\xrightarrow[A\to+\infty]{}\frac{1}{\lambda^2}$.

Par ailleurs, $-A^2\times e^{-\lambda A}\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$ (par changement de variable $X=-\lambda A$ et utilisation de la limite de référence $\frac{e^x}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$).

Donc $\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt\xrightarrow[A\to+\infty]{}\frac{2}{\lambda^2}$.

On en déduit que $V(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$.

VI. Simulation de la loi exponentielle

On peut simuler la loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur $[0\,;1[$.

1°) Variable aléatoire

Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1[$ et λ un réel strictement positif.

On pose $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

On va démontrer que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

• On vérifie aisément que la variable X est bien définie.
En effet, U est à valeurs dans l'intervalle $[0\,;1[$ donc $1-U$ est à valeurs dans l'intervalle $]0\,;1]$.
Le logarithme népérien de $1-U$ existe bien.

• X est à valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
En effet, comme $1-U$ est à valeurs dans l'intervalle $]0\,;1]$, $\ln(1-U)$ est à valeurs dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
Comme $\lambda > 0$, $-\dfrac{1}{\lambda} < 0$ donc X est à valeurs positives ou nulles.

• Déterminons la fonction de répartition de la variable X.

Soit t un réel positif ou nul.

$$\begin{aligned} X \leqslant t &\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant t \\ &\Leftrightarrow \ln(1-U) \geqslant -\lambda t \quad \text{(on a multiplié les deux membres par } -\lambda \text{ ; on a } -\lambda < 0\text{)} \\ &\Leftrightarrow 1-U \geqslant e^{-\lambda t} \\ &\Leftrightarrow U \leqslant 1-e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant t) &= P\left(U \leqslant 1-e^{-\lambda t}\right) \\ &= 1-e^{-\lambda t} \quad \text{car U suit la loi uniforme sur } [0\,;1[\end{aligned}$$

On en conclut que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

2°) Application : simulation de la loi exponentielle

On rentre la formule « $= -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\text{alea})$ » où alea définie la « fonction » permettant de générer des nombres aléatoires dans l'intervalle [0 ; 1[sur calculatrice ou sur tableur.
On peut simplifier cette formule en « $= -\dfrac{1}{\lambda}\ln(\text{alea})$ ».

On peut ainsi simuler des séries de réalisations d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Exemple :

L'instruction « $= -0{,}125\times\ln(1-\text{alea})$ » simule la loi exponentielle de paramètre 8.
On peut simplifier en « $= -0{,}125\times\ln(\text{alea})$ »