$1^{\text{ère}}$ S

Limites de fonctions (4) : asymptotes obliques, études de fonctions

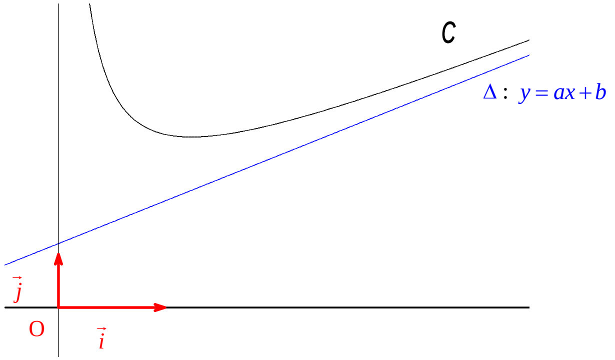
On a vu dans un chapitre précédent sur les limites la notion d'asymptote qui permettait de relier les limites et les graphiques.
On a d'abord donné une définition générale (« définition poétique ») puis on s'est ensuite intéressé à deux types d'asymptotes : les asymptotes horizontales et verticales.
On a vu plus particulièrement comment les reconnaître à l'aide des limites.

Dans ce chapitre, on va pousser et clore l'étude des asymptotes en étudiant un dernier type d'asymptote : **les asymptotes obliques**.

I. Approche graphique

1°) Observation d'un graphique

On donne ci-dessous :
- la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan ;
- une droite Δ d'équation réduite $y = ax + b$ (a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$; la droite Δ n'est donc ni parallèle à l'axe des abscisses ni parallèles à l'axe des ordonnées).



On va observer la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2°) Que peut-on dire de $\mathcal{C}$ et de Δ lorsque x tend vers $+\infty$?

Il semble que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique** en $+\infty$ (on précise « oblique » car le coefficient directeur de Δ est non nul).

3°) On admet que cette conjecture est vraie. Comment peut-on traduire ce résultat à l'aide d'une limite ?

On va d'abord interpréter une quantité.

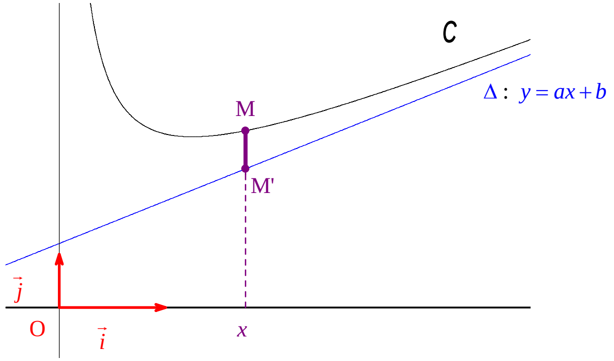
a) Interprétation d'une quantité

On suppose que le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthogonal.

On note M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x et M′ le point de la droite Δ d'abscisse x.

La longueur MM′ peut se mesurer sur l'axe des ordonnées ; elle est égale à la valeur absolue de la différence des ordonnées de M et M′.

$\text{MM}' = \left| f(x) - (ax+b) \right|$ (cette longueur est exprimée dans l'unité de longueur choisie sur l'axe des ordonnées)



$$\text{M}\left|\begin{array}{l} x \\ f(x) \end{array}\right. \qquad \text{M}'\left|\begin{array}{l} x \\ ax+b \end{array}\right.$$

b) Résultat d'une limite

Le fait que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$ peut se traduire par le fait que la distance MM′ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Donc le fait que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$ peut se traduire par : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.

On obtiendrait un résultat analogue pour une asymptote oblique en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.

II. Comment reconnaître une asymptote oblique

1°) Règle

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique d'une fonction *f* dans le plan muni d'un repère.
Δ est une droite d'équation réduite $y = ax + b$ (a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$).

• On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique** en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$.

• On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique** en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$.

2°) Retenir

Pour une AO (tout comme pour une AH), on précise en $+\infty$ ou en $-\infty$.

3°) Application

Dans les exercices, on donne une fonction et on demande de démontrer que sa représentation graphique admet une droite donnée pour asymptote oblique.

- On calcule la différence entre l'expression de la fonction et l'équation de la droite.

- On détermine la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ (suivant la question) ; il faut démontrer que cette limite est égale à 0.

- On conclut.

III. Exemple

$f : x \mapsto x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère.

Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

Méthode :

① **On calcule la différence.**

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) - (x-2) = x - 2 + \frac{4}{x-1} - (x-2)$$
$$= \frac{4}{x-1}$$

Le " $ax+b$ " est donné dans l'énoncé ; l'expression $ax+b$ annule l'expression qui est devant.

② **On calcule la limite.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-2) \right] = 0$.

On démontrerait de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x-2) \right] = 0$.

Pour démontrer que la courbe admet une asymptote oblique, on est obligé de calculer une limite.
La limite doit obligatoirement être égale à 0.

③ **On conclut** (**rédaction-type**).

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 2$ pour asymptote oblique <u>en $+\infty$ et en $-\infty$</u>.

On a la même asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$; en général, c'est toujours le cas en 1$^{\text{ère}}$.

④ **Position relative (la position relative sert surtout au tracé de la courbe)**

On applique la technique pour étudier la position d'une courbe par rapport à une droite.

On étudie le signe de la différence $f(x) - (x-2) = \dfrac{4}{x-1}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de 4		$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
Signe e $\dfrac{4}{x-1}$		$-$	‖	$+$	
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ		La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ.	‖	La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ.	

(On peut aussi rédiger la position relative.)

La position relative sert juste pour le graphique.

Détail sur la position relative :

Si le résultat de la différence $f(x)-(ax+b)$ est strictement positif, alors la courbe est située au-dessus de la droite.

De manière analogue, si le résultat de la différence $f(x)-(ax+b)$ est strictement négatif, alors la courbe est située au-dessous de la droite.

Remarque orthographique :

Les mots « au-dessous » et « au-dessus » prennent un trait d'union.
En revanche, en dessous et en dessus ne prennent pas de trait d'union.

Remarque de vocabulaire :

On parle de la position relative de la courbe et de l'asymptote ou de la position (tout court) de la courbe par rapport à l'asymptote.

IV. Bilan sur les branches infinies et les asymptotes

Rapport entre les limites et les asymptotes

Comment reconnaître des asymptotes

	Lorsque	La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation
1°) Asymptote horizontale	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$)	$y=a$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ (ou en $-\infty$)
2°) Asymptote verticale	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $-\infty$	$x=a$ pour asymptote verticale
3°) Asymptote oblique	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$* ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	$y=ax+b$ pour asymptote oblique en $+\infty$ ou en $-\infty$ N.B. : On peut avoir une asymptote oblique en $+\infty$ ou en $-\infty$ ou les deux

* **Commentaires :**

• Si le résultat n'est pas égal à 0, alors la droite n'est pas une A.O.

• On ne précise pas 0^+ ou 0^-.