$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur le second degré

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\left(4-x^2\right)-(x-2)(x+1)=0$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+x^2-4x-4=0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=-1$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(5x-1)^2-4(x-1)^2=0$.

5 Dans chaque cas, calculer le discriminant Δ du polynôme $P(x)$:

1°) $P(x)=-2x^2+3x-1$

2°) $P(x)=x^2-\dfrac{1}{2}x$

3°) $P(x)=4x^2+3$

4°) $P(x)=1-2x+x^2$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°) $x^2-x-6=0$ 2°) $x^2+3x+1=0$ 3°) $x^2-5x+7=0$.

7 Soit m un réel. On considère l'équation $x^2+3x-m=0$ (E) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

1°) Calculer le discriminant de (E) en fonction de *m*.

2°) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) suivant les valeurs de *m*.

La conclusion sera rédigée sous la forme d'une discussion présentée sur le modèle suivant :

- Si $m>\ldots$, alors l'équation (E) ….
- Si $m<\ldots$, alors l'équation (E) ….
- Si $m=\ldots$, alors l'équation (E) ….

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide du discriminant réduit l'équation $x^2-10x-8=0$.

9 On considère l'équation $3x^2-5x-7=0$ (E).

1°) Sans calculer le discriminant, expliquer pourquoi l'équation (E) admet deux racines x_1 et x_2 distinctes dans $\mathbb{R}$.

2°) Sans calculer ces racines, calculer leur somme et leur produit.

3°) Que peut-on dire du signe de ces racines ?

4°) Sans calculer x_1 et x_2, calculer $x_1^2+x_2^2$ et $x_1^3+x_2^3$.

10 Dans chaque cas, factoriser le polynôme $P(x)$ **lorsque c'est possible**.

1°) $P(x)=-2x^2+x+3$ 2°) $P(x)=x^2-x-2$ 3°) $P(x)=3x^2+x-4$

4°) $P(x)=x^2+3x+5$

11 Dans chaque cas, dresser le tableau de signes du polynôme $P(x)$:

1°) $P(x)=x^2+2x-3$; 2°) $P(x)=x^2+x+1$;3°) $P(x)=-x^2+3x+4$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+1}{x}\geqslant\dfrac{5x+2}{x+1}$.

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x-5}{x^2+3x-4}<0$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x-1\leqslant\dfrac{4}{x-2}$.

$\boxed{15}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{x}-6=0$.

$\boxed{16}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4+x^2-6\geqslant 0$.

$\boxed{17}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2-2x\sqrt{3}+1>0$.

$\boxed{18}$ Le but de l'exercice est de déterminer de deux manières différentes la fonction polynôme *f* du second degré vérifiant les trois conditions :

$C_1 : f(-1)=0$

$C_2 : f(2)=0$

$C_3 : f(0)=4$

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels, *a* étant non nul.

● **Première manière :**

Traduire les conditions C_1, C_2, C_3 sous forme d'un système vérifié par *a*, *b*, *c*.
Résoudre ce système ; en déduire l'expression de *f*.

● **Deuxième manière :**

Déterminer les racines de *f* ; en déduire une factorisation de $f(x)$.

En déduire l'expression de *f*.

$\boxed{19}$ La somme de trois entiers relatifs consécutifs est égale à leur produit.
Quelles sont les valeurs possibles de ces entiers ?

On respectera les quatre étapes habituelles en écrivant les titres suivants :
1°) Choix de l'inconnue
2°) Mise en équation et condition
3°) Résolution
4°) Conclusion

$\boxed{20}$ Déterminer deux nombres dont la somme est égale à 5 et le produit est égal à 4.

$\boxed{21}$ On considère l'équation $3x^2-2mx+m=0$ (E) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ où *m* désigne un paramètre réel.

1°) Comment faut-il choisir *m* pour que l'équation (E) admette le nombre 2 pour solution ?

On rédigera selon le modèle suivant en utilisant une chaîne d'équivalences :

2 est solution de (E) si et seulement si …
si et seulement si …
si et seulement si …

2°) Écrire l'équation (E) pour la valeur de *m* ainsi trouvée.
On rédigera très simplement selon le modèle suivant :
« Pour $m=\ldots$ (valeur trouvée au 1°), (E) s'écrit : …. »

Déterminer l'autre solution de (E) sans calculer le discriminant de (E).

$\boxed{22}$ On considère l'équation $3x^2-10x+1=0$ (1).

Démontrer que l'équation (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Sans les calculer, déterminer leur signe.

$\boxed{23}$ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=72 \end{cases}$.

Corrigé

1 On factorise le premier membre. $S=\left\{2\,;-\dfrac{7}{4}\right\}$

Technique N°1 : factoriser
Technique N°2 : développer (cette technique « marche » ici mais est moins naturelle que la 1[ère]).

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\left(4-x^2\right)-\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0$ (1).

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$3\left(2-x\right)\left(2+x\right)-\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0$

$3\left(2-x\right)\left(2+x\right)+\left(2-x\right)\left(x+1\right)=0$ (technique des facteurs opposés)

$\left(2-x\right)\left[3\left(2+x\right)+\left(x+1\right)\right]=0$

$\left(2-x\right)\left(7+4x\right)=0$

$2-x=0$ ou $7+4x=0$

$x=2$ ou $x=-\dfrac{7}{4}$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{2\,;-\dfrac{7}{4}\right\}$.

2 $S=\left\{-1\,;2\,;-2\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+x^2-4x-4=0$ (1).

On factorise le membre de gauche. Pour cela, on regroupe les termes en écrivant $\left(x^3+x\right)-\left(4x+4\right)$. On peut aussi écrire $\left(x^3-4x\right)+\left(x^2-4\right)$.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$x^2\left(x+1\right)-4\left(x+1\right)=0$ (il faut commencer par une factorisation partielle)

$\left(x+1\right)\left(x^2-4\right)=0$

$\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x-2\right)=0$

$x+1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-2=0$

$x=-1$ ou $x=-2$ ou $x=2$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{-1\,;2\,;-2\right\}$.

3 Commencer par donner les valeurs interdites : 1 et – 1.

On résout l'équation dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

On prend x^2-1 pour dénominateur commun.

$S=\left\{-2\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=-1$ (1).

Les valeurs interdites de l'équation sont 1 et – 1 (valeurs de x qui annulent les dénominateurs).

On résout l'équation (1) dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

On regarde les dénominateurs. On observe que $x^2-1=\left(x-1\right)\left(x+1\right)$.

x^2-1 est donc un multiple de $x-1$.

On va donc prendre x^2-1 pour dénominateur commun.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$$\frac{4\times(x+1)}{(x-1)\times(x+1)}+\frac{1}{x^2-1}=-1$$

$$\frac{4x+4+1}{x^2-1}=-1$$

$$4x+5=-x^2+1$$

$$x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0$$

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

– 2 n'est pas valeur interdite.

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\{-2\}$.

Il est important de procéder à la validation des solutions : il s'agit de voir si la valeur de x obtenue n'est pas une valeur interdite (attention, ce n'est pas une vérification).

$\boxed{4}$ $S=\left\{\frac{3}{7}\,;-\frac{1}{3}\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(5x-1)^2-4(x-1)^2=0$ (1).

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$(5x-1)^2-\left[2(x-1)\right]^2=0$ (étape de réécriture)

$\left[(5x-1)-2(x-1)\right]\left[(5x-1)+2(x-1)\right]=0$ (identité remarquable)

$$(3x+1)(7x-3)=0$$

$3x+1=0$ ou $7x-3=0$

$x=-\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{3}{7}$

L'ensemble des solutions de (1) est : $S=\left\{\frac{3}{7}\,;-\frac{1}{3}\right\}$.

$\boxed{5}$ Calculs de discriminants

Rappel de définition :

Le discriminant du polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ est $\Delta=b^2-4ac$.

● On ne pose pas $a=\ldots$, $b=\ldots$, $c=\ldots$.

● Cet exercice peut se faire en calcul mental.

1°) $P(x)=-2x^2+3x-1$

$$\Delta=9-4\times(-2)\times(-1)=9-8=1$$

2°) $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x$ (trinôme incomplet)

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times1\times0=\frac{1}{4}$$

3°) $P(x)=4x^2+3$ (trinôme incomplet)

$$\Delta=0-4\times4\times3=-48$$

4°) $P(x)=1-2x+x^2$

$$\Delta=4-4\times1\times1=0$$

$\boxed{6}$ On utilise le discriminant à chaque fois avec toute la rédaction du cours.

1°) $S=\{-2\ ;\ 3\}$ (on peut aussi utiliser une racine évidente de l'équation en rédigeant comme dans le cours).

2°) $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3°) L'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Solution détaillée :

Dans tous les cas, il s'agit de polynômes du second degré complets donc on utilise la technique du discriminant.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-x-6=0$ (1).**

Considérons le polynôme x^2-x-6.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-1$; $c=-6$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-1)^2-4\times1\times(-6)\\&=25\end{aligned}$$

On a : $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{1-\sqrt{25}}{2} \qquad x_2=\frac{1+\sqrt{25}}{2}$$

$$x_1=\frac{1-5}{2} \qquad x_2=\frac{1+5}{2}$$

$$x_1=-2 \qquad x_2=3$$

$$\boxed{S_1=\{-2\,;3\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+3x+1=0$ (2).**

Considérons le polynôme x^2+3x+1.
Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=3$; $c=1$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta&=9-4\\&=5\end{aligned}$$

On a $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{S_2=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-5x+7=0$ (3).**

Considérons le polynôme x^2-5x+7.
Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-5$; $c=7$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta&=25-4\times7\\&=25-28\\&=-3\end{aligned}$$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{S_3=\varnothing}$$

7 Équation du second degré avec paramètre

Déterminons le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$x^2 + 3x - m = 0$ (E) suivant les valeurs de *m*.

(E) est une équation du second degré (*m* est un **paramètre**).

Il s'agit d'une équation du second degré avec paramètre.
La lettre E entre parenthèses sert à désigner l'équation.

En effet, il s'agit d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 3$, $c = -m$.

On calcule le discriminant (par rapport) en fonction de *m*.

Son discriminant est égal à $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 9 + 4m$.

Ce discriminant a un signe qui varie suivant les valeurs de *m*.

On fait une **discussion mathématique** suivant les valeurs du paramètre *m*.

$9 + 4m = 0$

$m = -\dfrac{9}{4}$

Le signe de 4 est positif donc on obtient le tableau de signe suivant (négatif avant $-\dfrac{9}{4}$, nul « sur » $-\dfrac{9}{4}$, positif après $-\dfrac{9}{4}$).

La barre de fraction de $-\dfrac{9}{4}$ doit être horizontale.

m	$-\infty$		$-\dfrac{9}{4}$		$+\infty$
Signe de $9+4m$		$-$	0	$+$	

Discussion :

• Si $m < -\dfrac{9}{4}$, alors $\Delta < 0$; dans ce cas, (E) n'admet aucune racine réelle.

• Si $m > -\dfrac{9}{4}$, alors $\Delta > 0$; dans ce cas, (E) admet deux racines réelles.

• Si $m = -\dfrac{9}{4}$, alors $\Delta = 0$; dans ce cas, (E) admet une racine double réelle.

On a effectué une discussion. On discute suivant les valeurs de *m*.
Cela arrive fréquemment dans des énoncés. L'énoncé dit alors : « Discuter suivant les valeurs de *m* ».

Voir une autre façon de présenter la discussion vraiment intéressante à la fin.

Complément : expression des racines en fonction de *m*

• Dans le cas où $\Delta > 0$ c'est-à-dire lorsque $m > -\dfrac{9}{4}$, il n'est pas inintéressant d'écrire les expressions des solutions x_1 et x_2 en fonction de *m* :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9+4m}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9+4m}}{2}.$$

Ces expressions sont assez compliquées.
Il n'est pas possible de les simplifier.

• Dans le cas où $\Delta = 0$, c'est-à-dire lorsque $m = -\frac{9}{4}$, l'équation (E) s'écrit

$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$.

Elle admet une racine double $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Il est à noter qu'il est possible de retrouver cette racine sans recourir à la formule avec le discriminant en observant que l'équation (E) est équivalente à $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $S = \left\{5 - \sqrt{33}\,;\, 5 + \sqrt{33}\right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ à l'aide du discriminant réduit l'équation

$\boldsymbol{x^2 - 10x - 8 = 0}$ **(1).**

Considérons le polynôme $x^2 - 10x - 8$.

Recensement des coefficients :

$a = 1$; $b = -10$; $c = -8$

$b' = -5$

Calcul du discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac \\ &= 25 - 1 \times (-8) \\ &= 25 + 8 \\ &= 33\end{aligned}$$

On a : $\Delta' > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ &= 5 - \sqrt{33}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ &= 5 + \sqrt{33}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \left\{5 - \sqrt{33}\,;\, 5 + \sqrt{33}\right\}$.

On utilise l'application de la calculatrice permettant de résoudre les équations du second degré pour vérifier le résultat.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $3x^2 - 5x - 7 = 0$ (E)

Solution détaillée :

1°) (E) est une équation du second degré.

Les coefficients sont $a = 3$, $b = -5$, $c = -7$.

Comme a et c sont de signes contraires, le discriminant de (E) est strictement positif donc l'équation (E) admet deux racines x_1 et x_2 distinctes dans $\mathbb{R}$.

2°)

La somme et le produit des racines sont donnés par les formules du cours :

$$\left.\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}\end{aligned}\right\} \text{ formules très simples.}$$

On applique ces formules

$$\left.\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} = -\frac{7}{3}\end{aligned}\right\} \text{ calcul mental}$$

3°) **Déterminons le signe de x_1 et x_2.**

Attention, cette question n'a aucun rapport avec le signe du trinôme.

Comme le produit est négatif, on peut dire que les racines sont de signes contraires.

4°) **Calculons $x_1^2+x_2^2$ et $x_1^3+x_2^3$.**

L'idée est d'exprimer $x_1^2+x_2^2$ et $x_1^3+x_2^3$ en fonction de la somme et du produit de x_1 et x_2.

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ &= \frac{25}{9}+\frac{14}{3} \\ &= \frac{67}{9} \end{aligned}$$

Question le vendredi 12 octobre 2018 :

1ère S Chloé Bailly-Piersson

3°) Pourquoi fait-on une espèce de forme canonique ?

Attention, il n'y a pas d'identité remarquable pour factoriser $x_1^2+x_2^2$.

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= (x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \\ &= \frac{125}{27}+\frac{105}{9} \\ &= \frac{125+315}{27} \\ &= \frac{440}{27} \end{aligned}$$

Autre méthode : on utilise l'identité remarquable a^3+b^3.

Autre façon de faire :

On note S la somme des racines et P leur produit.

On a vu que $S=\frac{5}{3}$ et $P=-\frac{7}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{A} &= x_1^2+x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \quad \text{(même technique que pour une forme canonique)} \\ &= S^2-2P \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= \frac{25}{9}+\frac{14}{3} \\ &= \frac{67}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B} &= x_1^3+x_2^3 \\ &= (x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \\ &= S^3-2S\times P \quad \text{(on peut factoriser par } S\text{, mais cela n'a pas d'intérêt)} \\ &= \frac{125}{27}+\frac{105}{9} \\ &= \frac{125+315}{27} \\ &= \frac{440}{27} \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Factorisation d’un polynôme du second degré

On peut utiliser les racines évidentes à condition de très bien rédiger.

1°) $\boldsymbol{P(x) = -2x^2 + x + 3}$

Les racines de $P(x)$ sont – 1 (racine évidente) et $\frac{3}{2}$ (obtenue par produit).

On applique la formule de factorisation d’un polynôme du second degré qui a deux racines (factorisation par formule).

$$P(x) = -2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right) = (x+1)(3-2x)$$

On voit que l’on peut rentrer le – 2 dans la deuxième parenthèse pour que ce soit plus « joli ». Ça fait : $-2\left(x-\frac{3}{2}\right) = -2x+3 = 3-2x$.

On a un produit de trois facteurs.

On peut associer deux facteurs ensemble (ici : – 2 et $x-\frac{3}{2}$).

Ensuite seulement on fait une distributivité.

2°) $\boldsymbol{P(x) = x^2 - x - 2}$

Les racines de $P(x)$ sont – 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

$P(x) = (x+1)(x-2)$

$a = 1$. Non seulement, on n’est pas obligé d’écrire le 1 mais encore on ne doit pas écrire le 1 qui serait parfaitement inutile.

3°) $\boldsymbol{P(x) = 3x^2 + x - 4}$

Les racines de $P(x)$ sont 1 (racine évidente) et $-\frac{4}{3}$ (obtenue par produit).

$$P(x) = 3(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right) = (x-1)(3x+4)$$

4°) $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 3x + 5}$

Le discriminant de $P(x)$ est égal à $\Delta = -11$.

$\Delta < 0$ donc le polynôme n’est pas factorisable.
Dans chaque cas, on peut vérifier le résultat en développant le résultat.
On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel.

Dans les exercices qui suivent, tous les tableaux de signes doivent être faits à la règle.
On peut utiliser l’abréviation SGN pour « signe » ; c’est l’une des rares abréviations autorisées dans un texte mathématique.

$\boxed{11}$ Signe d’un polynôme du second degré

On applique la règle du signe d’un trinôme du second degré.
On ne passe pas par la factorisation (ce serait une perte de temps, on utilise le résultat du cours).

On n’oublie pas d’utiliser des valeurs tests.
Par exemple, pour $x = 0$, valeur de *c*.

1°) $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 2x - 3}$

Les racines de $P(x)$ sont 1 (racine évidente) et – 3 (obtenue par produit).

On en déduit que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif (puisque $P(x)$ admet deux racines distinctes).

On peut aussi dire que $\Delta > 0$ car *a* et *c* (à condition d’avoir dit ce que sont *a* et *c*) sont de signes contraires.

En appliquant la règle du signe du trinôme, on peut établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2°) $P(x)=x^2+x+1$

Le discriminant de $P(x)$ est égal à $\Delta=1-4$
$=-3$

$\Delta<0$ donc d'après la règle du signe du trinôme, $P(x)$ est toujours du signe de 1 c'est-à-dire strictement positif.

(On pourrait dire $\Delta<0$ donc $P(x)$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ mais cela n'a pas d'intérêt puisque l'on cherche le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x).

On peut donc donner le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	

Il n'y a aucune valeur sur la ligne des x.

3°) $P(x)=-x^2+3x+4$

Les racines de $P(x)$ sont -1 (racine évidente) et 4 (obtenue par produit).
On en déduit que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif (puisque $P(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$).

En appliquant la règle du signe du trinôme, on peut établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut vérifier les signes en traçant les représentations graphiques des fonctions polynômes sur l'écran de la calculatrice.

12 $S=\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+1}{x}\geqslant\dfrac{5x+2}{x+1}$.

0 et -1 sont valeurs interdites.

On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}\setminus\{0\,;-1\}$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$$\frac{x+1}{x}-\frac{5x+2}{x+1}\geqslant 0$$

$$\frac{(x+1)^2-x(5x+2)}{x(x+1)}\geqslant 0 \qquad \left(\text{égalités : } \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \text{ et } \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}\right)$$

$$\frac{x^2+2x+1-5x^2-2x}{x(x+1)}\geqslant 0$$

$$\frac{-4x^2+1}{x(x+1)}\geqslant 0$$

$$\frac{1-4x^2}{x(x+1)} \geqslant 0$$

$$\frac{(1-2x)(1+2x)}{x(x+1)} \geqslant 0$$

On fait un tableau de signes à la règle (on met + ∞ et – ∞ sur la 1ère ligne).
On doit mettre une ligne avec le signe de *x*.
Il y a 4 valeurs charnière donc 5 colonnes.
Dimensions des colonnes : prendre environ : 3 cm de large.

*** Voir à la fin des exercices.**

Explication sur les notations 0^{num} et $0^{\text{dén}}$ dans le tableau de signes :
Lorsqu'une expression présente au numérateur s'annule on écrit 0^{num} ; on retrouve alors ce 0^{num} sur la dernière ligne.
Lorsqu'une expression présente au dénominateur s'annule, on écrit $0^{\text{dén}}$; on a alors une double barre sur la dernière ligne.
Ces notations on un rôle de garde-fou dans les exercices.

Commentaire : On peut éventuellement « raccourcir » en faisant un tableau de signes comprenant le signe du numérateur et du dénominateur : une ligne avec le signe de $-4x^2+1$ et une ligne avec le signe de $x(1+x)$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boldsymbol{S = \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]0\,;\frac{1}{2}\right]}$.

$\boxed{13}$ $S =]-\infty\,;-4[\cup]1\,;5[$

Solution détaillée :

Résolvons dans ℝ l'inéquation $\boldsymbol{\frac{x-5}{x^2+3x-4} < 0}$.

On travaille avec le polynôme du numérateur et le polynôme du dénominateur.

Considérons le polynôme x^2+3x-4.

Les racines sont 1 (racine évidente) et – 4 (obtenue par produit) [on peut aussi calculer Δ qui vaut ici 25 puis appliquer les formules usuelles donnant les racines d'un polynôme du second degré].

Ce polynôme est du signe positif pour *x* à l'extérieur des racines et négatif pour *x* entre les racines.

x	$-\infty$		-4		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	0^{num}	$+$	
x^2+3x-4		$+$	$0^{\text{déno}}$	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$	|	$+$	
$\frac{x-5}{x^2+3x-4}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0^{num}	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boldsymbol{S =]-\infty\,;-4[\cup]1\,;5[}$.

$\boxed{14}$ $S = \left]-\infty\,;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left]2\,;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$

Solution détaillée :

Résolvons dans ℝ l'inéquation $\boldsymbol{x-1 \leqslant \frac{4}{x-2}}$.

2 est une valeur interdite.

On résout l'inéquation dans ℝ \ { 2 }.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$$x-1 \leqslant \frac{4}{x-2}$$

$(x-1)-\dfrac{4}{x-2}\leqslant 0$ (on transpose le quotient dans le membre de gauche pour travailler en $\leqslant 0$)

$\dfrac{(x-1)(x-2)-4}{x-2}\leqslant 0$

$\dfrac{x^2-3x-2}{x-2}\leqslant 0$

On va dresser un tableau de signes.
Considérons le polynôme x^2-3x-2.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-3$; $c=-2$

Calcul du discriminant
$\Delta=b^2-4ac$
$=17$

On a : $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

Les valeurs charnières sont $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, 2.

Grâce à la calculatrice, on observe que 2 est compris entre $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.
On peut ainsi ranger les valeurs charnières dans l'ordre croissant sur la première ligne du tableau.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x-2		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-3x-2}{x-2}$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est
$\boldsymbol{S=\left]-\infty\,;\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left]2\,;\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]}$.

$\boxed{15}$ **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{x}-6=0$ (1).**

Le premier membre de cette équation n'est pas un polynôme du second degré.
On ne sait pas résoudre cette équation directement.
On va transformer cette l'équation en effectuant un changement d'inconnue qui va permettre d'obtenir un polynôme du second degré (ou pour la mettre sous la forme d'une équation du second degré).

On pose $X=\sqrt{x}$ (changement d'inconnue).

L'équation (1) s'écrit $X^2+X-6=0$ $\quad(1')$ (c'est l'équation « résolvante » : même équation réécrite avec l'inconnue X).

Considérons le polynôme X^2+X-6 (du second degré en X).
2 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

On a $\alpha \times 2 = \frac{-6}{1}$ ce qui donne $\alpha = -3$.

Les racines du polynôme sont donc $X_1 = 2$ et $X_2 = -3$.

Or $X = \sqrt{x}$.

(1) est donc successivement équivalente à :

$\sqrt{x} = 2$ ou $\sqrt{x} = -3$ (impossible)

$x = 4$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{4\}$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ $S = \left]-\infty ; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2} ; +\infty\right[$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 + x^2 - 6 \geqslant 0$ (1).

Il s'agit d'une inéquation du 4^{e} degré et plus précisément d'une inéquation bicarrée car il n'y a pas de terme en x et en x^3.

On ne sait pas résoudre cette inéquation directement.

On pose $X = x^2$.

L'inéquation (1) s'écrit alors $X^2 + X - 6 \geqslant 0$ $(1')$.

Considérons le polynôme $X^2 + X - 6$ (il s'agit du même polynôme que dans l'exercice précédent).

2 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha \times 2 = \frac{-6}{1}$

$\alpha = -3$

Les racines du polynôme sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -3$.

Ou

Le discriminant est égal à $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6)$

$= 25$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$X_1 = \frac{-1+5}{2}$ $\qquad X_2 = \frac{-1-5}{2}$

$= 2$ $\qquad = -3$

Le polynôme peut se factoriser en produit de facteurs du premier degré (règle de factorisation d'un polynôme du second degré) :

$$\begin{aligned} X^2 + X - 6 &= 1(X - X_1)(X - X_2) \\ &= (X-2)(X-(-3)) \\ &= (X-2)(X+3) \end{aligned}$$

L'inéquation $(1')$ s'écrit $(X-2)(X+3) \geqslant 0$.

Or $X = x^2$.

On réécrit l'inéquation avec un premier membre sous forme factorisée avec l'inconnue de départ.

Donc (1) est successivement équivalente à :

$(x^2 - 2)(x^2 + 3) \geqslant 0$

Facultatif :

$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\underbrace{(x^2 + 3)}_{>0} \geqslant 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de x^2+3		$+$		$+$		$+$	
Signe de $\left(x^2-2\right)\left(x^2+3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ou (moins bien car plus long)

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
SGN de $x-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de x^2+3		$+$		$+$		$+$	
SGN de $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est
$S=\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

Commentaire :
Tout le passage de recherche des racines du polynôme X^2+X-6 peut être fait de manière traditionnelle comme suit :

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=1$; $c=-6$
Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=1+24\\&=25\end{aligned}$$

On a : $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1=\dfrac{-1-5}{2}$ $\qquad$ $X_2=\dfrac{-1+5}{2}$

$X_1=-3$ $\qquad$ $X_2=2$

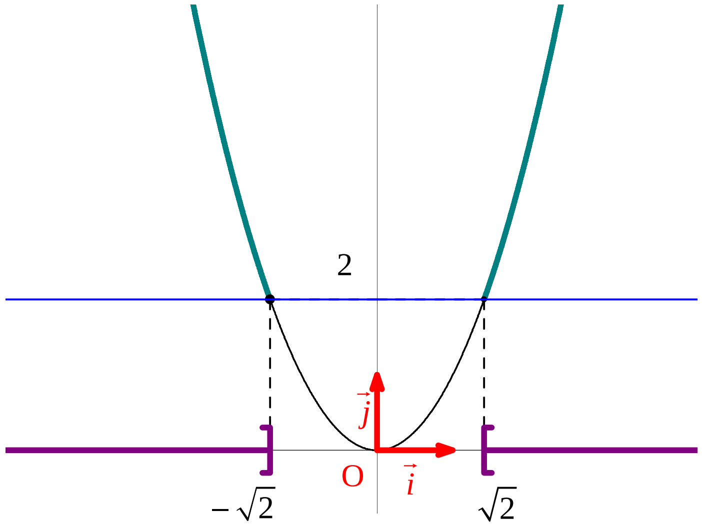
Autre méthode :

On résout l'inéquation $X^2+X-6\geqslant 0$.
On trouve $X\leqslant -3$ ou $X\geqslant 2$.
Comme $X=x^2$, l'inéquation (1) est successivement équivalente à :
$\underbrace{x^2\leqslant -3}_{\text{impossible dans }\mathbb{R}}$ ou $x^2\geqslant 2$

$x\leqslant -\sqrt{2}$ ou $x\geqslant \sqrt{2}$ (en appliquant le cours) *

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est
$S=\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

On peut résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 \geqslant 2$.



On peut hachurer les deux intervalles de part et d'autre sur l'axe des abscisses.

* On peut aussi transformer l'inéquation en $x^2 \geqslant 2$ en $x^2 - 2 \geqslant 0$.

Les racines du polynôme $x^2 - 2$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

En appliquant la règle du signe d'un trinôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2$		+	0	–	0	+	

On peut aussi transformer l'inéquation en $x^2 \geqslant 2$ en $x^2 - 2 \geqslant 0$ puis $\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) \geqslant 0$.

On dresse ensuite un tableau de signes classique.

17 $S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

Résolution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 > 0$.

Considérons le polynôme $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1$.

$a = 3$; $b = -2\sqrt{3}$; $c = 1$

Le discriminant est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 12 - 12 = 0$$

Le polynôme admet donc une racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D'après la règle du signe du trinôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
SGN de $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1$		+	0	+	

Conclusion :

$$S = \left]-\infty ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[\quad \text{ou} \quad S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Commentaires :

• On pourrait aussi utiliser le discriminant réduit.

• Quand on trouve $\Delta = 0$, c'est qu'on est passé à côté d'une identité remarquable.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$\left(x\sqrt{3}-1\right)^2 > 0$

$x\sqrt{3}-1 \neq 0$

$x \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Variante : on peut faire un tableau de signes après avoir factorisé l'expression $3x^2-2x\sqrt{3}+1$.

Complément :

L'ensemble des solutions de $3x^2-2x\sqrt{3}+1 \geqslant 0$ est $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de $3x^2-2x\sqrt{3}+1 < 0$ est $\varnothing$.

L'ensemble des solutions de $3x^2-2x\sqrt{3}+1 \leqslant 0$ est $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

18 On note *f* la fonction polynôme du second degré vérifiant les trois conditions :

C_1 : $f(-1)=0$

C_2 : $f(2)=0$

C_3 : $f(0)=4$

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels, *a* étant non nul.

• **Première manière :**

C_3 donne $a\times 0^2+b\times 0+c=4$ donc $c=4$.

C_1 donne $a\times(-1)^2+b\times(-1)+c=0$.

En remplaçant *c* par 4, on a $a-b+4=0$ ce qui donne $a-b=-4$ $(1')$

C_2 donne successivement

$a\times 2^2+b\times 2+c=0$

$4a+2b+4=0$

$2a+b+2=0$

$2a+b=-2$ $(2')$

On résout le système formé par les équations $(1')$ et $(2')$ qui s'écrit :

$\begin{cases} a-b=-4 \\ 2a+b=-2 \end{cases}$

On trouve $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$ (par addition membre à membre)

Conclusion :

$\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$

Donc $f(x)=-2x^2+2x+4$.

• **Deuxième manière :**

D'après les conditions C_1 et C_2, le polynôme $f(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: -1 et 2 (remarque : l'information $f(0)=4$ nous montre que 0 n'est pas racine de $f(x)$).

On peut donc dire que son discriminant Δ est strictement positif.

Le polynôme peut donc se factoriser sous la forme :
$f(x)=a(x+1)(x-2)$ avec $a\in\mathbb{R}$.
On a donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=a(x+1)(x-2)$ (1).

La quantification du *x* est très importante ; elle va permettre de particulariser *x* dans la suite.

D'après la condition C_3, on a : $f(0)=4$ donc en remplaçant *x* par 0 dans l'égalité (1) on obtient : $a(0+1)(0-2)=4$ d'où $a\times1\times(-2)=4$ soit $a=-2$.

Conclusion : $f(x)=-2(x+1)(x-2)$.
On peut éventuellement développer le polynôme si on le souhaite, mais ce n'est pas nécessaire.

Autre rédaction possible :

D'après les conditions C_1 et C_2, le polynôme $f(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: – 1 et 2.

Donc, si on note Δ son discriminant, on a : $\Delta>0$.
Par conséquent, le polynôme $f(x)$ admet une factorisation de la forme $f(x)=a(x+1)(x-2)$ avec $a\in\mathbb{R}$.

D'après la condition C_3, on a : $f(0)=4$ donc on a : $a(0+1)(0-2)=4$
d'où $-2a=4$
soit $a=-2$.

Conclusion : $f(x)=-2(x+1)(x-2)$

$\boxed{19}$ Déterminons trois entiers relatifs consécutifs sachant que leur somme est égale à leur produit.

La somme de trois entiers relatifs consécutifs est égale à leur produit.
Quelles sont les valeurs possibles de ces entiers ?

Quelques explications utiles :

On dit que des entiers sont **consécutifs** pour exprimer qu'ils se suivent.
Par exemple, les entiers 3, 4, 5, 6, 7 sont des entiers consécutifs.

Lorsque l'on a trois entiers consécutifs, on appelle **« entier du milieu »** celui qui n'est ni le plus petit, ni le plus grand. Par exemple, parmi les entiers consécutifs 7, 8, 9, l'entier du milieu est 8.

Ici, pour résoudre le problème, il y a un bon choix d'inconnue à faire : prendre pour inconnue le nombre du « milieu ». On trouve trois possibilités :
– 1 ; 0 ; 1 ou 1 ; 2 ; 3 ou – 1 ; – 2 ; – 3.

• Solution détaillée en prenant pour inconnue l'entier du « milieu » :

Choix de l'inconnue :

Soit *x* l'entier du « milieu » parmi les trois entiers consécutifs cherchés.
L'entier précédent (le prédécesseur) est alors $x-1$; l'entier suivant (le successeur) est alors $x+1$.
(À priori, il s'agit d'un problème à trois inconnues mais on se ramène à un problème à une seule inconnue).

Mise en équation et condition :

• La somme des trois entiers est égale à $(x-1)+x+(x+1)=(x-1)x(x+1)$.

• Le produit des trois entiers est égal à $(x-1)x(x+1)$.

x vérifie l'équation : $(x-1)+x+(x+1)=(x-1)x(x+1)\quad(1)$
$x\in\mathbb{Z}$

L'égalité (1) traduit la condition « la somme des trois nombres est égale au produit ».

Résolution :
Ne pas utiliser Δ ; il faut factoriser.

(1) est successivement équivalente à :

$3x = x(x-1)(x+1)$ (on ne peut pas simplifier les deux membres par x)

$3x - x(x-1)(x+1) = 0$

$x[3-(x-1)(x+1)] = 0$

$x(4-x^2) = 0$

$x(2-x)(2+x) = 0$

$x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

Ces trois solutions sont acceptables compte tenu de la condition $x \in \mathbb{Z}$.

1^er^ cas : $x = 0$
L'entier qui précède x est – 1.
L'entier qui suit x est 1.

2^e^ cas : $x = 2$
L'entier qui précède x est 1.
L'entier qui suit x est 3.

3^e^ cas : $x = -2$
L'entier qui précède x est – 3.
L'entier qui suit x est – 1.

Conclusion :

Il y a trois possibilités :

1^ère^ possibilité : – 1, 0, 1
2^e^ possibilité : 1, 2, 3
3^e^ possibilité : – 1, – 2, – 3

On vérifie pour chacune de ces possibilités que la somme des trois entiers consécutifs est égale au produit.

• Solution détaillée en prenant pour inconnue le plus petit entier :

Choix de l'inconnue :

Soit x le plus petit des trois entiers consécutifs cherchés.
Les entiers suivants sont alors $x+1$ et $x+2$.

Mise en équation et condition :
x vérifie l'équation $x+(x+1)+(x+2) = x(x+1)(x+2)$ (1).
$x \in \mathbb{Z}$

Résolution :

(1) est successivement équivalente à :

$3x+3 = x(x+1)(x+2)$

$3(x+1) = x(x+1)(x+2)$

$3(x+1) - x(x+1)(x+2) = 0$

$(x+1)[3-x(x+2)] = 0$

$(x+1)(3-2x-x^2) = 0$

$x+1 = 0$ ou $3-2x-x^2 = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$ (racine évidente) ou $x = -3$ (par produit)

Conclusion :
On a déterminé chaque fois la valeur du plus petit des trois entiers cherchés.
Les deux autres entiers s'obtiennent alors en ajoutant 1 puis encore 1 (puisque ce sont des entiers consécutifs).

Il y a trois triplets solutions : (– 1 ; 0 ; 1), (1 ; 2 ; 3), (– 3 ; – 2 ; – 1).

On retrouve bien sûr les mêmes triplets qu'avec la première méthode.

20 Recherche de deux nombres connaissant la somme et le produit

Déterminons deux réels dont la somme est égale à 5 et le produit est égal à 4.

Il y a deux méthodes ; la deuxième méthode est préférable à la première (plus courte)

1ère méthode : résolution d'un système

Soit x et y les réels cherchés.

x et y sont solutions du système $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=4 & (2) \end{cases}$.

Ce système n'est pas un système linéaire (à cause de l'équation (2) dont le premier membre est un produit).

Il n'y a donc qu'une seule méthode possible : la résolution par substitution

(1) donne $y=5-x$ $\quad(1')$.

Compte tenu de $(1')$, (2) donne les lignes suivantes successivement équivalentes :

$x(5-x)=4$

$5x-x^2=4$

$x^2-5x+4=0$

$x=1$ (racine évidente) ou $x=4$ (obtenue par produit)

1er cas : $x=1$

$(1')$ donne alors $y=4$.

2e cas : $x=4$

$(1')$ donne alors $y=1$.

Les nombres cherchés sont 1 et 4.

2e méthode : on applique le cours

Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, alors ils sont solutions de l'équation $X^2-SX+P=0$ $\quad$ ($X^2-(\text{somme})X+\text{produit}=0$).

Ces deux réels, s'ils existent, sont solutions de l'équation $X^2-5X+4=0$ (« équation résolvante »).

Les racines de cette équation sont 1 (racine évidente) et 4 (obtenu par produit).

Les nombres cherchés sont donc 1 et 4.

Commentaires :

• Dans la première méthode, l'équation vérifiée par x qui est $x^2-5x+4=0$ n'est autre que l'équation résolvante.

• On peut vérifier les solutions en utilisant un logiciel de calcul formel.

• Dans la première méthode, on s'est servi de la première équation pour exprimer y en fonction de x et reporter dans la deuxième équation.

On pourrait aussi se servir de la deuxième équation pour exprimer y en fonction de x et reporter dans la première équation.

On obtiendrait alors $x+\dfrac{4}{x}=5$ et donc en multipliant par x on retomberait sur une équation du second degré.

Attention résolution fausse :

$-x=\dfrac{4}{x}-5$

$-x^2=4-5$

$-x^2=-1$

$x=1$

On multiplie par x les deux membres de l'équation :

$-x^2=4-5x$.

On n'échappe pas au second degré.

21 **Équation du second degré avec paramètre**

$\mathbf{3x^2 - 2mx + m = 0}$ **(E)** **($x \in \mathbb{R}$, m : paramètre réel)**

(E) désigne l'équation (on ne peut pas écrire E(2) par exemple)

1°) **Déterminons *m* pour que l'équation (E) admette 2 pour solution.**

2 est solution de (E) si et seulement si $3 \times 2^2 - 2m \times 2 + m = 0$
si et seulement si $12 - 3m = 0$
si et seulement si $\mathbf{m = 4}$

2°) **Écrivons l'équation (E) pour la valeur de *m* trouvée au 1°) et déterminons l'autre racine de (E) sans calculer le discriminant.**

Pour $m = 4$, (E) s'écrit : $\mathbf{3x^2 - 8x + 4 = 0}$.

On sait que 2 est racine de cette équation (d'après le 1°).

On note α l'autre racine.

On a $2 \times \alpha = \dfrac{4}{3}$ (formule du produit des racines) qui donne immédiatement $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

L'autre racine de (E) est égale à $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$.

On l'obtient par le produit des deux racines qui est égal à $\dfrac{4}{3}$ ou par somme qui est égale à $\dfrac{8}{3}$.

22

$\mathbf{3x^2 - 10x + 1 = 0}$ **(1)**

• **Démontrons que l'équation (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.**

(1) est une équation du second degré.
On calcule son discriminant réduit. On trouve $\Delta = 25 - 3 = 22$.

$\Delta > 0$ donc l'équation (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

• **Déterminons le signe des racines sans les calculer.**

Le produit des deux racines est égal à $\dfrac{1}{3}$.

Le produit est strictement positif donc les deux racines sont de même signe.

La somme des deux racines est égale à $\dfrac{10}{3}$.

La somme des deux racines est strictement positive.

Donc les deux racines sont strictement positives.

On peut vérifier le résultat en calculant les deux racines à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

On a vraiment besoin des deux : somme et produit pour déterminer le signe des deux racines.
La somme seule ne suffit.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 72 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système non linéaire.

La première équation est linéaire mais pas la deuxième.

Les solutions sont les couples $(6\,;12)$ et $(12\,;6)$.

On en en déduit que les racines de (1) sont toutes les deux strictement positives.

$\boxed{7}$ Autre présentation de la discussion :

m	$-\infty$		$-\dfrac{9}{4}$		$+\infty$
Signe de Δ		$-$	0	+	
Nombre de racines de (E)		aucune racine	1 racine double	2 racines	

Tableau de signes de l'ex. $\boxed{12}$:

On cherche d'abord les valeurs charnières :

$1-2x=0$	$1+2x=0$	$x=0$	$x+1=0$
$x=\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$		$x=-1$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
SGN de $1-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0^{num}	$-$	
SGN de $1+2x$		$-$	|	$-$	0^{num}	$+$	|	$+$	|	$+$	
SGN de x		$-$	|	$-$	|	$-$	$0^{\text{dén}}$	$+$	|	$+$	
SGN de $1+x$		$-$	$0^{\text{dén}}$	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
SGN de $\frac{(1-2x)(1+2x)}{x(x+1)}$		$-$	||	$+$	0^{num}	$-$	||	$+$	0^{num}	$-$	

Tableau de signes de l'ex. $\boxed{13}$:

x	$-\infty$		-4		1		5		$+\infty$	
SGN de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$		} numérateur
SGN de x^2+3x-4		$+$	$0^{\text{déno}}$	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$		} dénominateur
SGN de $\dfrac{x-5}{x^2+3x-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$		

Dans le $\boxed{16}$ (tableau de signes de $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\underbrace{\left(x^2+3\right)}_{>0}\geqslant 0$), on pourrait ne pas mettre de ligne pour x^2+3.