

CONTRAPOSÉE D'UNE PROPRIÉTÉ

① Définition

On considère la proposition :

« Si la partie 1 est vérifiée, alors la partie 2 est vérifiée ».

La proposition

« Si la partie 2 n'est pas vérifiée, alors la partie 1 n'est pas vérifiée. »

est appelée la **contraposée** de la proposition initiale.

② Exemple

La proposition contraposée de « Si j'habite en Normandie, alors j'habite en France. »

est « Si je n'habite pas en France, alors je n'habite pas en Normandie. »

Une personne ne vivant pas en France, ne peut pas habiter en Normandie. Donc cette contraposée est vraie.

③ Autre formulation

Soit P et Q deux propositions.

La contraposée de l'implication « Si P , alors Q » est « Si non Q , alors non P ».

④ Propriété

- La réciproque d'une propriété peut être vraie ou fausse.
- La contraposée d'une propriété est toujours vraie.

⑤ Cas particulier important : contraposée du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle.

On considère l'énoncé du théorème de Pythagore : « Si ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

La **contraposée** du théorème de Pythagore s'énonce ainsi :

Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

La **réciproque du théorème de Pythagore** s'énonce :

Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

Il est capital de ne pas mélanger réciproque et contraposée.

La **réciproque du théorème de Pythagore** sert à démontrer qu'un triangle est rectangle.

La **contraposée** sert à démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

Exercices

1 On considère la proposition suivante :

« **Si j'ai moins de 18 ans, alors je suis mineur.** »

1°) Cette proposition est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

2°) Énoncer la proposition réciproque. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

3°) Énoncer la contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

2 On considère la proposition suivante :

« **Si un nombre entier est divisible par 10, alors il est divisible par 2.** »

1°) Cette proposition est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

2°) Énoncer la proposition réciproque. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

3°) Énoncer la contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

3 On considère la proposition suivante :

« **Si deux droites du plan sont perpendiculaires, alors elles sont sécantes.** »

1°) Cette proposition est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

2°) Énoncer la proposition réciproque. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

3°) Énoncer la contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ? Expliquer la réponse.

Démontrer que cette contraposée est vraie.

4 On considère la proposition suivante :

« **Si $AM = MB$, alors le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.** »

1°) Cette proposition est-elle vraie ?

2°) Énoncer la proposition réciproque. Est-elle vraie ?

3°) a) Énoncer la contraposée de cette proposition. Est-elle vraie ?

b) Recopier et compléter :

« Si $AM = MB$ alors le point M appartiendrait à ... du segment $[AB]$. Or le point M ... pas à la médiatrice du segment $[AB]$, donc $AM \neq MB$. »