TS spé

Exercices sur les graphes pondérés

Le 7-5-2022

● Ehrenfest réversible

● ruine du joueur

Modélisation de phénomènes aléatoires

1 Une puce se déplace sur la ligne suivante en sautant au hasard d'une case ou de deux cases vers la droite. Elle part de la case 1 (et elle va toujours vers la droite).
On observe sa position après 6 sauts.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Quelles sont les cases qui peuvent être atteintes après 6 sauts ?

1°) Recopier et compléter le programme Python suivant pour faire afficher la position de la puce après 6 sauts :

```
from random import randint

def position():
    position=…….
    for i in range(…………..):
        position=position + randint(1,2)
    return position
```

Exécuter le programme 10 fois et compléter le tableau :

Issue							
Fréquence							

2°) Compléter le programme suivant pour qu'il répète l'expérience 100 fois et qu'il comptabilise les arrivées à la case 8.

```
from random import randint

def position():
    position=…….
    for i in range(…………..):
        position=position + randint(1,2)
    return position

def arrivee8():
    arrivee=0
    for i in range(100):
        if ……………………………………… :
           arrivee=arrivee + 1
    return arrivee
```

3°) Modifier la deuxième partie du programme pour pouvoir comptabiliser les arrivées dans n'importe quelle case saisie en paramètre (*n*) :

```
def arrivee(n):
    arrivee=0
    for i in range(100):
```

Corrigé :

Après 6 sauts, la fourmi peut atteindre les cases 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

1°)

```
from random import randint

def position():
    position=1
    for _ in range(1,7):
        position=position+randint(1,2)
    return position
```

À la place de `range(1,7)`, on peut aussi écrire `range(6)`.

On notera que la fonction position est une fonction sans argument.

```
from random import randint

def position():
    position=1
    for _ in range(1,7):
        position=position+randint(1,2)
    return position

def arrivee8():
    arrivee=0
    for i in range(100):
        if position()==8
           arrivee=arrivee + 1
    return arrivee
```

3°) `position()==n`

2 Soit ABCD un carré direct dans le plan orienté.
Une fourmi parcourt les côtés de ce carré en partant du sommet A et met une minute pour parcourir un côté.
Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche.

Quels sont les sommets qui peuvent être atteints après 1 minute ? 2 minutes ? 3 minutes ? 4 minutes ?
Généraliser.

Pour simuler les déplacements de la fourmi, on affecte les chiffres 0, 1, 2, 3 au fait d'arriver respectivement aux sommets A, B, C et D.
Si la fourmi se déplace dans le sens direct, on ajoute 1 lors du déplacement. Sinon, on retranche 1 et on additionne au fur et à mesure des déplacements.

Recopier et compléter la fonction Python `position(n)` qui prend pour argument un entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 et qui affiche la position de la fourmi après *n* minutes :

On peut aussi utiliser la fonction choice.

```
from random import choice

def position(n):
    s=…….
    for i in range(…………..):
        x=choice([– 1,1])
        s=s+ …..
        s=s%4
    return s
```

Indication : L'instruction « `2*randint(0, 1) – 1` » fournit un entier aléatoire égal à 1 ou à – 1.

```
from random import randint

def position(n):
    s=…….
    for i in range(…………..):
        x = 2*randint(0, 1) – 1
        s=s + …..
        s=s%4
    return s
```

Exécuter le programme.

Il est possible de généraliser à un déplacement quelconque sur un polygone régulier.

Corrigé :

1 minute : sommets A et C
2 minutes : sommets B et D
3 minutes : sommets A et C
4 minutes : sommets B et D

Généralisation :

Au bout de *n* minutes (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) :
La puce peut être en A ou C si *n* est pair.
La puce peut etre en B ou en D si *n* est impair.

```
from random import choice

def position(n):
    s=0
    for _ in range(1,n+1):
        x=choice([– 1,1])
        s=s+x
        s=s%4
    return s
```

3 Un pion se déplace sur le damier suivant constitué de 9 cases. Au départ, il est sur la case 0.

– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4

Les déplacements du pion sont déterminés par le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si la pièce tombe du côté face, le pion se déplace d'une case vers la droite, sinon il se déplace d'une case vers la gauche. Si le pion est sur la case 4 ou – 4, il y reste.
1°) On envisage un trajet qui est une succession de 4 déplacements.
Écrire une fonction Python qui permet de simuler un trajet.
2°) On envisage un trajet qui est une succession de *n* déplacements où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Écrire une fonction Python qui permet de simuler un trajet.

4 On promène un pion sur les sommets d'un tétraèdre régulier ABCD. Toutes les minutes, on déplace le pion d'un sommet à un autre, en choisissant au hasard parmi les trois sommets possibles.
On suppose qu'au départ le pion se trouve en A.
On envisage n déplacements où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Écrire une fonction Python qui prend pour argument l'entier naturel n et qui renvoie la position où se trouve le pion au bout de n déplacements.

Programme avec toutes les positions :

```
from random import choice

def simul(n):
    x=1
    M=[x]
    for _ in range (1,n+1):
      L=[1,2,3,4]
      L.remove(x)
      x=choice(L)
      M.append(x)
    return M
```

Indication : On pourra numéroter respectivement 0, 1, 2, 3 les sommets A, B, C, D.

Mon programme :
On ajoute un nombre aléatoire entre 0 et 3.
On réduit ensuite (division euclidienne par 4).

Le 20-4-2022

Programme Python fait par Vicente Seixas

```
from random import randint
L=["A","B","C","D"]
p=0
for i in range (n):
    indice=p
    while indice==p:
          p=randint(0,len(L)-1)
    print (L[p])
```

Commentaires :

```
L=["A","B","C","D"]             :On initialise une liste
p=0 : La fourmi commence en A.
for i in range (n):                 On répète 10 fois.
indice=p             utile pour la suite
while indice==p:     On force la fourmi à se déplacer
```

Etude de processus stochastiques à l'aide de matrices

Application des matrices à l'étude de processus stochastiques

Consigne importante, à respecter impérativement :

Il est demandé de <u>recopier</u> les graphes et les tableaux *et non de les découper et de les coller dans le cahier.*

- Dans chaque exercice, on travaille soit avec des matrices de transition en lignes soit avec des matrices de transition en colonnes. L'énoncé le précise toujours.

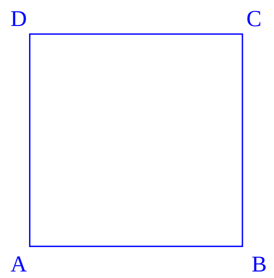
- On effectuera la plupart des calculs de matrices à la calculatrice.

- L'utilisation du tableur est cependant requise dans quelques exercices pour le calcul des termes de suites, ceci par commodité de calcul et pour permettre des représentations graphiques plus faciles à faire.

Pour chaque exercice, on écrit les états avant de faire le graphe probabiliste.

- Faire les barres de fractions horizontalement.

1 Une fourmi parcourt les côtés d'un carré ABCD en partant du sommet A et met une minute pour parcourir un côté. Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche.
La fourmi ne reste pas sur le sommet en lequel elle est. Elle peut faire un demi-tour.



1°) Quelles sont les positions possibles de la fourmi après 1 minute ? après 2 minute ? après 3 minute ? Généraliser.

1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste en utilisant les états probabilistes suivants :
- E_1 : « La fourmi est en A » ;
- E_2 : « La fourmi est en B » ;
- E_3 : « La fourmi est en C » ;
- E_4 : « La fourmi est en D ».

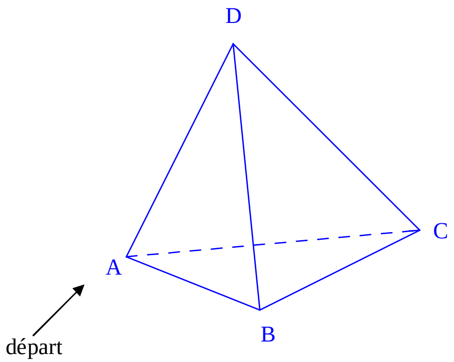
Compléter avec les probabilités de transition.
2°) Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe. On prendra les sommets dans l'ordre alphabétique. Il n'y a pas de justification à donner.
Calculer M^2 et M^3.
Déterminer l'expression de M^n pour *n* entier naturel quelconque.

3°) En déduire la probabilité que la fourmi soit en A au bout de 4 minutes (calculs à faire « à la main » et à vérifier à la calculatrice).
4°) On souhaite effectuer une simulation à l'aide d'un programme.
On utilise une liste L de quatre éléments, L[0], L[1], L[2], L[3] étant égaux à 0 ou 1 de sorte que
L[0] a la valeur 1 si la fourmi est en A et 0 si la fourmi n'est pas en A ;
L[1] a la valeur 1 si la fourmi est en B et 0 si la fourmi n'est pas en B ;
etc.
À chaque étape, la liste L contiendra un seul 1 et trois 0.
Recopier et compléter la fonction **mouvement** suivante.

```
Fonction mouvement(L)
        Si L[0]=1
          | i prend la valeur d'un entier aléatoire 1 ou 3
          | L[0] ← 0
          | L[i] ← 1−L[i]
        FinSi

        .......

        Renvoyer L
```

Écrire ensuite une fonction qui simule *n* étapes (*n* minutes) et renvoie la distribution des fréquences à l'issue de ces *n* étapes.
Réaliser les programmes correspondants en Python.

$\boxed{2}$ On promène un pion sur les sommets d'un tétraèdre ABCD. Toutes les minutes, on déplace le pion d'un sommet à un autre, en choisissant au hasard parmi les trois sommets possibles.
On suppose qu'au départ le pion se trouve en A.



1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste (noter A, B, C, D les sommets).

2°) Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe.
On prendra les sommets dans l'ordre alphabétique.
3°) Déterminer la distribution de probabilité (ou loi de probabilité) au bout de 5 minutes.

$\boxed{3}$ Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par une piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois cas suivants : immunisé (I), malade (M) ou non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité de 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité de 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,8.

1°) a) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
b) Écrire la matrice de transition A en colonnes en notant respectivement 1, 2, 3 les états I, M, S et en les prenant dans cet ordre.
2°) On suppose qu'au départ un individu est immunisé.
Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la matrice colonne donnant la distribution de probabilité au bout de *n* mois (suivant les valeurs de *n*).
Déterminer la distribution de probabilité au bout de 2 mois.
En déduire la probabilité que l'individu :
- soit malade au bout de 2 mois ;
- soit immunisé au bout de 2 mois.

$\boxed{4}$ **Les urnes d'Ehrenfest**
On considère deux urnes A et B. On dispose également d'une pièce de monnaie équilibrée.
Au départ,
- l'urne A contient deux boules indiscernables au toucher, numérotées 1 et 2 ;
- l'urne B est vide.

On effectue des lancers successifs indépendants de la pièce en notant à chaque fois le côté qu'elle présente.
Si elle présente le côté pile (P), on change d'urne la boule numéro 1.
Si elle présente le côté face (F), on change d'urne la boule numéro 2.
On s'intéresse à l'évolution du nombre de boules dans A.
On s'intéresse à l'évolution du nombre de boules de chaque urne.

1°) Dans cette question, on choisit de s'intéresser à une série de 7 lancers de la pièce.
On suppose que les 7 lancers ont donné les résultats suivants : P-P-F-P-F-F-P.

Orginellement, les deux boules sont dans l'urne A.
Le premier lancer donne pile donc on change d'urne la boule 1. La boule 1 est donc placée dans l'urne B.

Recopier et compléter le tableau suivant :

		Urne A	**Urne B**	**Nombre de boules dans A**
Étape 0	Au départ	1-2		
Étape 1	Après le 1er lancer	2	1	
Étape 2	Après le 2^{e} lancer	1-2		
Étape 3	Après le 3^{e} lancer	1	2	
Étape 4	Après le 4^{e} lancer		1-2	
Étape 5	Après le 5^{e} lancer			
Étape 6	Après le 6^{e} lancer			
Étape 7	Après le 7^{e} lancer			

Représenter sur un graphique le nombre de boules dans A en fonction du numéro de l'étape (on peut parler de « trajectoire »).

2°) À chaque étape, on est dans l'un des états E_0, E_1, E_2 suivants :

- E_0 : « L'urne A contient 2 boules et l'urne B contient 0 boule » ;
- E_1 : « L'urne A contient 1 boule et l'urne B contient 1 boule » ;
- E_2 : « L'urne A contient 0 boule et l'urne B contient 2 boules ».

Représenter le graphe probabiliste associé à la situation en utilisant les états E_0, E_1, E_2.
On réfléchira aux probabilités de passage d'un état à un autre (probabilités de transition).
3°) Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe en prenant les états dans l'ordre E_0, E_1, E_2.
4°) Calculer M^2 et M^3 ; en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (suivant les valeurs de *n*).

5°) Pour tout entier naturel *n*, on note P_n l'état probabiliste au bout de *n* étapes. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (suivant les valeurs de *n*).
6°) Démontrer qu'au bout de *n* étapes, les deux boules sont dans la même urne si *n* est pair et ne sont pas dans la même urne si *n* est impair.
7°) Démontrer qu'il existe une unique distribution de probabilité invariante S (ou état stable) que l'on déterminera.
8°) On considère le programme Python suivant :

Le 25-3-2023

Proposition : Sixte Pouget Abadie

s : nombre de boules de l'urne A

```
from random import choice

def urne(n):
    s=2
    for i in range(n):
        if s==2:
           s=s-1
        elif s==0:
           s=s+1
        else:
           x=choice([-1,1])
           s=s+x
        print (s)
```

Lire et comprendre ce programme puis le taper et le faire tourner.

Pour N boules :

```
from random import randint
import matplotlib.pyplot as plt

def ehrenfest(N,n):
    A=[i for i in range(1,N+1)]
    X=[N]
    for i in range(n):
        b=randint(1,N)
        if b in A:
           A.remove(b)
        else:
           A.append(b)
        X.append(len(A))
    return X

def trajectoire(n):
    plt.xlim(0,n)
    plt.ylim(0,N+1)
    plt.grid(linestyle= "-" )
    x =[i for i in range (n+1)]
    plt.plot(x,ehrenfest(n),marker='o')
    plt.show()
```

8°) Le but de cette question est de réaliser une simulation de la marche aléatoire grâce à un programme Python.
Les deux boules sont codées par les variables *a* et *b* correspondent aux deux boules de l'urne.
On attribue la valeur 1 lorsque la boule est dans l'urne A et la valeur 0 lorsque la boule est dans l'urne B.
Lorsque *a* ou *b* vaut 0, cela que la boule est dans A ; lorsque *a* ou *b* vaut 1, cela signifie que la boule est dans B.

On définit les fonctions **transfert** (correspondant au transfert d'une boule au hasard d'une urne dans l'autre) et **simulation** suivantes :

Fonction transfert(a, b)
　　r prend la valeur d'un entier aléatoire 0 ou 1
　　Si $r = 0$
　　　　$a \leftarrow 1 - a$
　　　　Sinon
　　　　$b \leftarrow 1 - b$
　　FinSi
　　Renvoyer *a*, *b*

On notera l'astuce des instructions « $a \leftarrow 1-a$ » et « $b \leftarrow 1-b$ » qui permet d'aviter de recourir à des instructions conditionnelles.

Fonction simulation(n)

$a, b \leftarrow 1, 1$

Pour i allant de 1 à n **Faire**

$a, b \leftarrow \text{transfert}(a, b)$

FinPour

Renvoyer a, b

Réaliser les programmes Python correspondants.

8°) On suppose dans cette question que l'on a N boules au départ, N étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il est facile de simuler la situation en reprenant les mêmes principes.
On utilise une liste L à N élements.

On définit les fonctions **transfert** et **simulation**.

Fonction transfert(L)

$\text{N} \leftarrow$ nombre d'éléments de L

i prend la valeur d'un entier aléatoire entre 0 et $\text{N}-1$

$\text{L}[i] \leftarrow 1-\text{L}[i]$

Renvoyer L

Fonction simulation(N, n)

Initialiser une liste L de N éléments égaux à 1

Pour k allant de 1 à n **Faire**

$\text{L} \leftarrow \text{transfert}(\text{L})$

FinPour

Renvoyer L

On peut rajouter une instruction permettant de connaître le nombre de boules dans l'urne A. Il suffit de calculer la somme des éléments de la liste L.

Voir simulation sur le site :
http://thalesm.hmalherbe.fr/gestclasse//documents/Terminale_S/Specialite/Exercices/Urnes_d_Ehrenfest/Urnes_d_Ehrenfest.html

Aspect un peu différent : programme Python : « temps » de retour à l'état initial

N : nombre total de boules (numérotées de 1 à N)
x : nombre de boules dans l'urne A
c : compteur

Au premier tirage, on est certain que la boule choisie est dans A donc $x = \text{N}-1$.

Les instructions « `r=randint(1,N)` » et « `r<=x` » ne sont pas évidentes à comprendre.

L'urne A contient x boules. On tire un numéro au hasard entre 1 et N. La probabilité que la boule portant le numéro tiré soit dans l'urne A est $\frac{x}{\text{N}}$.

```
from random import randint

def Ehr(N):
    x=N-1
    c=1
    while x!=N:
          r=randint(1,N)
          if r<=x:
             x=x-1
          else:
             x=x+1
          c=c+1
    return c
```

Ce modèle d'urne a été inventé par deux physiciens, les époux Paul et Tatiana Ehrenfest, en 1907.
Tous deux étaient amis d'Albert Einstein.
On considère l'expérience suivante : une enceinte hermétique est séparée en deux compartiments A et B de taille égale et mis en communication par un trou.
On remplit A d'un gaz. Assez rapidement, les molécules migrent d'un compartiment à l'autre et cela, jusqu'à atteindre une position d'équilibre où il y aura autant de molécules de gaz dans chaque compartiment.
Or, toutes les lois de la mécanique quantique sont réversibles par rapport au temps. Ainsi, le système devrait revenir à son état initial ; or, cela ne se produit pas.
On se propose d'étudier ce paradoxe à l'aide de la modélisation imaginée par les époux Paul et Tatiana Ehrenfest en 1907.

Nous allons nous placer dans le cas où l'on aurait deux molécules de gaz au départ.
Le modèle d'Ehrenfest consiste à considérer deux urnes A et B.
-voir document lycée Bellepierre avec un programme retour à l'état initial
- voir aussi https://colab.research.google.com/github/ela1687/S1/blob/master/14-Ehrenfest.ipynb

Voir aussi Fabien Herbaut examen trouvé le 6 avril 2021 assez intéressant.

Écrire une fonction transition(L) qui prend en entrée la liste L représentant un état des urnes et renvoie la liste L après le choix d'un nombre au hasard et transfert de la boule associée.
Écrire une fonction nombreA(L) qui prend en entrée la liste L représentant un état des urnes et renvoie le nombre de boules présentes dans l'urne A.
Écrire une fonction evolution(k,N) qui à l'aide des fonctions précédentes :
crée la liste L0 correspondant à l'état initial
répète k fois les transitions en stockant dans une liste NA le nombre de boules dans l'urne A après chaque transition (on aura NA[0]=N et len(NA)=k+1)
renvoie la liste NA

Le 17-3-2021

Le « livrescolaire »

```
from random import*

N = 20 #Nombre de boules.
n = 1000 #Nombre de tirages.

#Les boules sont toutes dans l'urne A au départ.
Boules = []
for j in range(N):
  Boules.append()
#Choisir une boule et la changer d'urne.
for i in range(n):
  numero = ...
  if Boules[numero] == 1:
    Boules[numero] = ...
  else:
    Boules[numero] = ...

#Compter la proportion de boules dans l'urne A
compteur = 0
for k in Boules:
  compteur = compteur + k

proportion = float(compteur/N)
print(proportion)
```

Le dimanche 16 mai 2021

J'ai un peu évolué sur ce type d'exercice avec la lecture du sujet de CCINP PSI 2021 « Matrices de Kac ».

Je démarre avec N boules.

1°) Combien chaque urne peut-elle contenir de boules au maximum ?

2°) Soit k un entier naturel compris entre 1 et N.

Quelle est la probabilité conditionnelle que l'urne A contienne $k-1$ boules à l'étape $p+1$ sachant que l'urne A contient k boules à l'étape p ?

Probabilité que le numéro de la boule tirée appartienne à l'ensemble des numéros des boules de l'urne A : $\dfrac{k}{n}$

Le 12-8-2021

Il est possible de se référer à l'exercice 75 de la feuille d'exercices de colle sur les lois discrètes de Thierry Sageaux.

Exercice 75. Chaîne de Markov

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à $n \geqslant 2$ réparties initialement entre U_1 et U_2.

Ehrenfest

L'étude des urnes d'Ehrenfest s'inscrit dans le cadre des chaînes de Markov réversibles (réversibilité des chaînes de Markov)

Le dimanche 8 mai 2022

Programme tiré d'un document équipe DREAM Claroline

Le programme n'est pas en Python.

```
def init(N):
    urnA=list(range(1,N+1))
    urnB=[]

def exp(N):
    r=randint(1,N)
    if r in urnA:
       urnB.append(r)
       urnA.remove(r)
    else:
    urnA.append(r)
    urnB.remove(r)
    return urnA,urnB

def simu(n,N):
    init(N)
    for i in range(N):
        exp(n)
    return len(urnA), len(urnB)
```

http://dreamaths.univ-lyon1.fr 2 DREAMaths Pour aller plus loin IREM de Lyon

IFé 0 1 2 3 1 1 3 1 3 2 3 1 3 1 for i in range(100): print expe_ehrensein(10000,500)

On considère deux urnes A et B et un entier N□1. Dans l'urne A se trouvent N boules numérotées de 0 à N−1.
On répète n fois les actions suivantes :
choisir au hasard un nombre entre 0 et N−1 ;
placer la boule ayant ce numéro dans l'urne où elle n'est pas.

```
from random import*

N = 20 #Nombre de boules.
n = 1000 #Nombre de tirages.

#Les boules sont toutes dans l'urne A au départ.
Boules = []
for j in range(N):
  Boules.append()

#Choisir une boule et la changer d'urne.
for i in range(n):
  numero = ...
  if Boules[numero] == 1:
    Boules[numero] = ...
  else:
    Boules[numero] = ...

#Compter la proportion de boules dans l'urne A
compteur = 0
for k in Boules:
  compteur = compteur + k

proportion = float(compteur/N)
print(proportion)
```

5 Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quitte celle-ci tandis que 20 % du reste de l'île vient y habiter.
On néglige les autres échanges.
En 2012, il y avait 12 000 habitants dans la capitale et 30 000 dans le reste de l'île.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne qui donne la distribution d'effectifs c'est-à-dire la matrice ligne à deux colonnes dont le premier coefficient est le nombre d'habitants dans la capitale et le deuxième coefficient est le nombre d'habitants dans le reste de l'île l'année $2012+n$.
Ainsi, $P_0=\begin{pmatrix}12\,000 & 30\,000\end{pmatrix}$.
1°) Représenter ce processus évolutif par un graphe pondéré à deux sommets : C (capitale) et R (reste de l'île).
2°) Écrire la matrice de transition M en lignes associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre C-R.
3°) Calculer à l'aide de la calculatrice l'état de la population de l'île au bout d'un an, de deux ans, de trois ans.
4°) Avec la calculatrice, conjecturer l'état de la population de l'île à long terme.
5°) Déterminer M^n pour n entier naturel quelconque à l'aide de la formule ou de dcode. En déduire P_n en fonction de n et démontrer la conjecture du 3°).
On rappelle le résultat suivant :

Soit a et b deux réels de somme non nulle.
On a $\forall n\in\mathbb{N}$ $\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}$.

6 Soit N un entier naturel non nul.
Un pion se déplace sur les cases disposées sur le schéma ci-dessous. Au départ, il est sur la case 0.

$-N$	$-(N-1)$	…	-1	0	1	…	$N-1$	N

Les déplacements du pion sont déterminés par le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si la pièce tombe du côté face, le pion se déplace d'une case vers la droite. Sinon, il se déplace d'une case vers la gauche. Si le pion est sur la case N ou – N, il y reste.
On peut assimiler la situation à une marche aléatoire sur un graphe dont les sommets représentent la position du pion : – N, $-(N-1)$, …, – 1, 0, 1, …, $N-1$, N.
1°) Écrire la matrice de transition en lignes A pour $N=1$ et $N=2$.
2°) Dans cette question, on prend $N=4$.
Déterminer la probabilité que le pion revienne à la case de départ après 4 lancers.
3°) **Simulation**
On considère la fonction Python ci-dessous qui prend pour pour argument deux entiers naturels n et N supérieurs ou égaux à 1 et qui renvoie la position du pion au bout de n étapes.

```
from random import choice

def simu(n,N):
    x=0
    for i in range(n):
        if abs(x)<N
           r=choice([-1,1])
           x=x+r
     return x
```

7 Un compte bancaire peut être créditeur (il est alors « dans le vert ») ou débiteur (il est alors « dans le rouge »).
L'évolution mensuelle du compte bancaire d'un certain client est telle que :
- lorsque le compte est « dans le vert » à la fin du mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,4 ;
- lorsque le compte est « dans le rouge » à la fin du mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,35.
1°) On définit les états « Le compte est dans le vert » (état 1) et « Le compte est dans le rouge » (état 2).
Représenter le graphe probabiliste traduisant la situation.
b) Donner la matrice de transition en lignes M.
2°) Pour tout entier naturel n, on note :
- p_n la probabilité que le compte soit « dans le vert » à la fin du n-ième mois ;
- q_n la probabilité que le compte soit « dans le rouge » à la fin du n-ième mois.

On pose $P_n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}$ (matrice ligne qui décrit l'état probabiliste à la fin du n-ième mois).
On suppose qu'à l'instant initial le compte est bien sûr « dans le vert ». On a donc $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
a) Calculer « à la main » P_1, P_2, P_3.
b) Quelle est la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2^e mois ? du 3^e mois ?
3°) On rappelle le résultat suivant :

Soit a et b deux réels de somme non nulle.
On a $\forall n\in\mathbb{N}$ $\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier naturel *n*. Vérifier le résultat avec le site « dcode » (partie « puissances de matrices »).

4°) Exprimer P_n en fonction de *n*.

En déduire la distribution de probabilités limite.

8 Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité de 0,75.
On considère le processus aléatoire comportant les deux états suivants :
état 1 : « Le réverbère est allumé » ;
état 2 : « Le réverbère est éteint ».
1°) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste puis écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe.
2°) On rappelle le résultat suivant :

> Soit *a* et *b* deux réels de somme non nulle.
>
> On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier naturel *n*.
Vérifier le résultat avec le site « dcode » (partie « puissances de matrices »).
3°) Au jour 0, le réverbère est allumé.
Déterminer la distribution de probabilités au matin du jour *n* puis la distribution de probabilités limite.
Reprendre la question en supposant qu'au jour 0, le réverbère est éteint.
4°) **Simulation**
Écrire une fonction Python `freq(n)` qui prend pour argument un entier naturel *n* non nul et qui renvoie la fréquence de l'événement « Le reverbère est allumé ».
On pourra commencer par créer préalablement une fonction traduisant le changement d'état du réverbère.

9 On s'intéresse à l'évolution couplée de deux populations : des chouettes et des souris.
On note respectivement c_n et s_n les nombres respectifs, en milliers, de chouettes et de souris au 1er juin de l'année $2012+n$ (où *n* désigne un entier naturel).
Les scientifiques modélisent la prédation entre ces deux espèces (chouettes et souris) de la manière suivante.

Pour tout entier naturel *n*, on a $\begin{cases} c_{n+1} = 0,5\,c_n + 0,4\,s_n \\ s_{n+1} = -\,0,104\,c_n + 1,1\,s_n \end{cases}$.

Les coefficients 0,5 et 1,1 indiquent la croissance de chaque espèce en isolation. Les chouettes disparaissent sans nourriture tandis que les souris augmentent sans prédateurs.
Les deux autres nombres 0,4 et – 0,104 mesurent la conséquence de la prédation : positif pour les chouettes et négatif pour les souris.
En 2012, on comptait 3000 chouettes et 2000 souris. Ainsi, $c_0 = 3$ et $s_0 = 2$.
On se propose d'étudier l'évolution à long terme.

Extrait du document sur suites et matrices de Kevin Tanguy :

Considérons une forêt dans laquelle vivent deux espèces : des lapins et des renards ; les premiers étant les proies des seconds. Nous cherchons à modéliser l'évolution de chacune de ces deux espèces. Pour tout n ∈ N, nous noterons respectivement par (rn)n≥0 et (ln)n≥0 la population de renards et de lapin lors de l'année 2020+n. Il est alors possible de définir un modèle (une version discrète du modèle de proies/prédateurs de Lotka-Volterra) décrivant l'évolution de ces deux espèces. Sans la présence des lapins, la première serait vouée à disparaitre tandis que la population des lapins augmenterait exponentiellement sans la présence des prédateurs. Mathématiquement, cela correspond au système suivant :

$r_{n+1} = 0,9r_n + 0,01l_n$ et ! $r_0 = 10$ l0 = 10 000.
$l_{n+1} = -r_n + 1,01l_n$

Les valeurs des constantes intervenant dans le système ne sont là que pour fixer les idées. Comme nous allons le voir, il est possible de représenter ce système matriciellement. En effet, si pour tout n ∈ N, Xn = " rn ln # nous constatons que $X_{n+1} = AX_n$ avec A = " 0, 9 0, 01 −1 1, 01# . Nous obtenons alors une suite de matrices (composée ici par des vecteurs colonnes) (Xn)n≥0 vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par une matrice A donnée). Les questions suivantes sont alors naturelles :
• Est-il possible d'exprimer Xn en fonction de *n* de manière explicite ?
• Que se produit-il si n → +∞?

1°) **Expérimentation sur calculatrice**
Les suites (c_n) et (s_n) sont deux suites « imbriquées ». On les « rentre » ainsi dans la calculatrice.

> $n\text{Min} = 0$
> $\text{u}(n) = 0.5\text{u}(n-1) + 0.4\text{v}(n-1)$
> $\text{u}(n\text{Min}) = \{3\}$
> $\text{v}(n) = -0.104\text{u}(n-1) + 1.1\text{v}(n-1)$
> $\text{v}(n\text{Min}) = \{2\}$
> $\text{w}(n) = \text{v}/\text{u}$
> $\text{w}(n\text{Min}) = \{2/3\}$
> On observera la syntaxe très particulière de l'avant-dernière ligne : $\text{w}(n) = \text{v}/\text{u}$. On écrit juste ça.

a) Remplir un tableau selon le modèle suivant pour *n* allant de 0 à 10 :

n	c_n	s_n	$\frac{s_n}{c_n}$
0	3	2	
1			
2			

b) Que remarque-t-on ? Quelle conjecture peut-on émettre quant à la proportion de chaque espèce à long terme ?
c) L'évolution est-elle influencée par les conditions initiales ?

2°) **Justification avec l'outil matriciel**

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
A s'appelle la matrice « proie-prédateur ».
b) En déduire une relation liant U_n et U_0.

c) On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix}$.

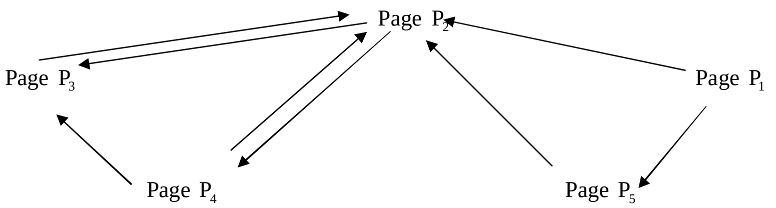
Démontrer que $PDP^{-1} = A$. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $A^n = PD^nP^{-1}$ (question à ne pas mettre, en plus il y a une répétition de « en déduire » avec la question suivante).
d) En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de *n*.

e) Déterminer la limite de chacune des suites (c_n), (s_n) et $\left(\dfrac{s_n}{c_n}\right)$.

f) Répondre au problème posé et vérifier la cohérence avec les conjectures émises au 1°).

10 Comment un moteur de recherche classe les pages web

On a représenté ci-dessous cinq pages Internet comprenant des articles sur un sujet donné. Sur certaines des pages, un lien pointe vers une autre des pages ; ce lien est matérialisé par la flèche orientée.



Reproduire ce graphe probabiliste en complétant par des probabilités (lire la question 2°).

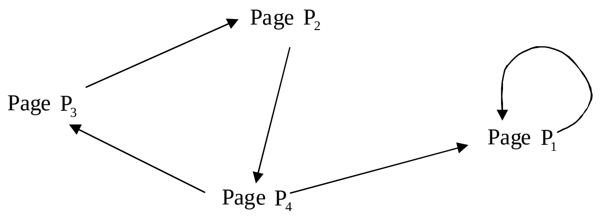
1°) Laquelle de ces pages semble être *a priori* la plus pertinente pour le sujet traité ?
2°) On suppose qu'un utilisateur qui arrive sur l'une de ces pages suivra de façon équiprobable un de ces liens de cette page vers les autres pages.
Établir la matrice A donnant les probabilités de passage d'une page à une autre par un utilisateur c'est-à-dire la matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste (avec l'ordre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5).
3°) On suppose qu'un utilisateur est situé au départ sur la page P_1.
a) À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau qui donne des probabilités d'arrivées successives sur chaque page après 1 clic, 2 clics, 5 clics et 10 clics.

Pages	**Après 0 clic**	**Après 1 clic**	**Après 2 clics**	**Après 5 clics**	**Après 10 clics**
P_1	1				
P_2	0				
P_3	0				
P_4	0				
P_5	0				

b) Quelle est la page qui a la plus grande probabilité d'être fréquentée après 10 clics ? Comparer avec la réponse donnée à la question 1°).
c) Observer l'évolution de ces probabilités lorsque le nombre *n* de clics devient de plus en plus grand. Vers quelles probabilités limites de fréquentation de chaque page semble tendre la répartition ?
4°) Pour un utilisateur situé au départ sur un autre page que la 1, observer l'évolution des mêmes probabilités. Que constate-t-on ?
5°) On note S la matrice colonne formée des probabilités limites de fréquentations conjecturées à la question 3°). Vérifier que S est un état stable.

11 Amélioration du procédé de classement du moteur de recherche

Ce graphe donne les relations entre 4 pages web :



Note : Cette situation arrive très fréquemment en réalité puisque sur les milliards de pages web existantes, les liens pointant d'une page vers une autre sont relativement peu fréquents.

Reproduire ce graphe probabiliste.

1°) Pour un utilisateur situé au départ page 1, que se passe-t-il ?

2°) énoncé à améliorer car pas forcément très clair.
L'algorithme suivant pallie le problème en modélisant la situation de la façon suivante :
« Pour un utilisateur qui, pour un thème donné, arrive sur une page web :
- dans 15 % des cas, il choisit au hasard de façon équirépartie une page quelconque y compris la page en cours ;
- dans 85 % des cas, il suit de façon équirépartie un des liens proposés par la page en cours vers une autre page. »

On parle de coefficient d'échappement. Taper sur Google « graphe - coefficient d'échappement ».

Note : L'algorithme proposé ici est adapté de l'algorithme **PageRank** (PR) inventé en 1998 par Larry Page (d'où le nom), cofondateur de Google. Cet algorithme sert de système de classement à ce célèbre moteur de recherche.

Pour *n* entier naturel, on note X_n la matrice colonne donnant la répartition des probabilités de fréquentation des quatre pages après *n* clics.

On note A la matrice de transition en colonnes donnant les probabilités de passage d'une page web à une autre par les liens représentés sur le graphe précédent et C la matrice colonne égale à $\begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.

Justifier que la suite de matrices colonnes (X_n) vérifie la relation de récurrence $X_{n+1} = 0,85AX_n + 0,15C$ (1) pour tout entier naturel *n*.

3°) On considère toujours un utilisateur situé au départ sur la page 1.

À l'aide de la relation (1) et en utilisant la calculatrice, recopier et compléter le tableau suivant qui donne les probabilités d'arrivées successives sur chaque page après a clic, 2 clics, 5 clics ou 10 clics.

Pages	**Après 0 clic**	**Après 1 clic**	**Après 2 clics**	**Après 5 clics**	**Après 10 clics**
P_1	1				
P_2	0				
P_3	0				
P_4	0				

Indication :
On pourra employer l'une des deux méthodes suivantes sur la calculatrice.
1ère méthode : On effectue les calculs par récurrence.
Rentrer les matrices 0,85A et 0,15C puis utiliser la commande « Rép » / « Ans » de la calculatrice.
2e méthode : On fait un petit programme.

4°) On suppose que, quelle que soit la page de départ, la suite des matrices colonnes (X_n) converge vers une matrice colonne X (état stable du système) vérifiant : $X = 0{,}85AX + 0{,}15C$.
Déterminer X (on donnera des valeurs approchées des coefficients) puis comparer avec les résultats du tableau.

L'état stable X associé à l'algorithme définit la pertinence des pages associées à une information. Comme dans l'exercice précédent, il s'ensuit un classement des pages. En pratique, la recherche de l'état stable ne se fait pas par la résolution de l'équation matricielle (les dimensions trop importantes rendent les calculs trop longs). On approche l'état stable très rapidement par une suite de matrices colonnes construites à partir de l'algorithme comme dans cet exercice.

Extrait d'un sujet de PSI Centrale avril 2021

III Le graphe du web

On modélise le web par un graphe orienté à n sommets représentant chacun une page du web et dont les arêtes orientées représentent les liens hypertextes entre celles-ci. Lorsque la page i contient au moins un lien vers la page j, on dit que la page i *pointe vers* la page j. Cette situation est modélisée par l'existence de l'arête orientée de i vers j, notée $i \to j$. On dit que $i \to j$ est une *arête sortante* de i et une *arête entrante* de j. Si aucun lien de la page i ne pointe vers la page j, on note $i \not\to j$.

Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i désigne le nombre d'arêtes sortantes de la page i, c'est-à-dire le nombre de pages vers laquelle elle pointe. On suppose qu'aucune page ne pointe vers elle-même.

Les moteurs de recherche effectuent un classement entre les différentes pages du web à partir d'une mesure d'importance attribuée à chacune d'elles. Cette mesure d'importance s'appelle la *pertinence* de la page. On se propose d'étudier deux algorithmes permettant de mesurer la pertinence de chaque page du web.

On appelle pertinences des pages du web les éléments de toute suite finie $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) la pertinence μ_j de la page j est une fonction croissante de la pertinence de chacune des pages qui pointent vers elle ;

(ii) la contribution de la page i dans la pertinence de chacune des pages vers lesquelles elle pointe est une fonction décroissante de λ_i (voir définition ci-dessus).

III.A – Premier modèle de navigation sur le web

On suppose qu'un surfeur navigue sur le web de la manière suivante : lorsqu'il se trouve sur la page i,

— si la page i pointe vers d'autres pages, il se dirige au hasard, de manière équiprobable, vers l'une de ces pages ;

— si la page i ne pointe vers aucune page, il reste sur la page i.

Q 29. Vérifier que la matrice de transition associée à ce modèle de navigation est la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec

$$\begin{cases} a_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{si la page } i \text{ ne pointe vers aucune autre page} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \not\to j \\ 1/\lambda_i & \text{si } i \to j \end{cases} \qquad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

III.B – L'algorithme PageRank

$\boxed{12}$ Dans les grandes et vieilles forêts de sapins, les chouettes tachetées s'offrent des écureuils volants comme dîner.

On suppose que la matrice proie-prédateur entre ces deux espèces est $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ -p & 1{,}2 \end{pmatrix}$ où p est un nombre réel strictement positif, appelé le paramètre de prédation.

Pour tout entier naturel n, on note x_n le nombre de chouettes et y_n le nombre de d'écureuils au bout de n jours.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

1°) Utiliser la calculatrice pour répondre aux questions suivantes. On supposera qu'initialement il y a 50 chouettes et 200 écureuils.
a) Constater que si le paramètre de prédation est $p = 0{,}325$, alors les deux populations croissent.
Estimer le taux de croissance, à long terme, et le rapport final « chouettes-écureuils volants ».
b) Constater que si le paramètre de prédation est $p = 0{,}5$, alors les deux espèces finissent par s'éteindre.
c) Chercher une valeur du paramètre p pour laquelle les deux populations tendent vers des niveaux constants.
Quelles sont les tailles relatives des populations dans ce cas-là ?

2°) Pour quelle valeur de p existe-t-il un état stable, c'est-à-dire une matrice colonne $\text{S}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ et $a+b=1$ telle que $\text{AS}=\text{S}$? Confronter avec la conjecture émise à la question 1°) c).

$\boxed{13}$ Modèle de Lotka-Volterra discret

Version 1 :

Livre Thomas Petit édition Ellipses Contrôle continu spécialité mathématiques

On considère deux populations :

- Les prédateurs dont l'effectif est représenté par la suite (x_n).
- Les proies dont l'effectif est représenté par la suite (y_n).

Lotka (1880-1949) et Volterra (1860-1940) ont montré qu'elles évoluaient suivant les équations ci-après, appelées équations de Lotka-Volterra : $\begin{cases}x_{n+1}=(1-d)x_n+cx_ny_n\\ y_{n+1}=(1+a)y_n-bx_ny_n\end{cases}$ (attention, le mot équation n'a, ici, pas le sens habituel en mathématiques).

- n (la variable des suites) représente le temps en années.
- d est un paramètre biologique de perte naturelle de prédateurs (lutte de territoire ou pollution).
- c est un paramètre biologique d'augmentation (meilleure natalité) des prédateurs lorsqu'ils mangent des proies (lors des x_ny_n rencontres possibles entre proies et prédateurs).
- a est un paramètre d'augmentation naturelle des proies.
- b est un paramètre biologique de perte de proies (des proies se font manger par les prédateurs) lors des x_ny_n rencontres possibles entre proies en prédateurs.

Les relations de récurrence permettent l'étude des populations sous la forme de suites couplées.
Il n'est pas possible dans le cas général de déterminer des expressions de x_n et y_n en fonction de n.
Il est donc inutile de chercher leurs expressions en fonction de n.

1°) Écrire une feuille de calcul Excel permettant de déterminer x_n et y_n avec les paramètres suivants : $a=0{,}08$; $b=0{,}0001$; $c=0{,}00005$; $d=0{,}05$ et pour $x_0=900$ et $y_0=1100$ sur une durée de 500 ans.
Représenter le nuage de points $(x_n\,;\,y_n)$ pour n compris entre 0 et 500.

2°) On considère qu'il y a équilibre lorsque les suites (x_n) et (y_n) ne s'annulent pas et qu'elles sont constantes, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n $x_{n+1}=x_n$ et $y_{n+1}=y_n$.
Démontrer qu'il y a équilibre lorsque pour tout entier naturel n, $x_n=\dfrac{a}{b}$ et $y_n=\dfrac{d}{c}$ (on aura en particulier $x_0=\dfrac{a}{b}$ et $y_0=\dfrac{d}{c}$).

3°) Modifier dans le tableur $x_0=900$ par $x_0=\dfrac{a}{b}$ et $y_0=1100$ par $y_0=\dfrac{d}{c}$.
Que peut-on constater graphiquement ?
On rappelle que : $a=0{,}08$; $b=0{,}0001$; $c=0{,}00005$; $d=0{,}05$.

4°) On suppose qu'on se place au voisinage du point d'équilibre, c'est-à-dire que : $x_0\approx\dfrac{a}{b}$ et $y_0\approx\dfrac{d}{c}$.

Sous ces conditions, on considère que les équations de Lotka-Volterra sont à peu près « équivalentes » aux équations suivantes : $\begin{cases}x_{n+1}=x_n+\dfrac{ca}{b}y_n-\dfrac{ad}{b}\\ y_{n+1}=-\dfrac{bd}{c}x_n+y_n+\dfrac{ad}{c}\end{cases}$.
(On dit qu'on a *linéarisé* les équations de Lotka-Volterra au voisinage du point d'équilibre.)

a) On pose $\text{U}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et $\text{B}=\begin{pmatrix}-\dfrac{ad}{b}\\ \dfrac{ad}{c}\end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A vérifiant $\text{U}_{n+1}=\text{AU}_n+\text{B}$.

b) Déterminer le vecteur colonne C constant vérifiant $\text{C}=\text{AC}+\text{B}$.

c) En déduire que $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{ca}{b}\\-\dfrac{bd}{c}&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}x_0-\dfrac{a}{b}\\y_0-\dfrac{d}{c}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{a}{b}\\ \dfrac{d}{c}\end{pmatrix}$.

d) Application numérique :
En déduire une approximation des deux populations dans 5 ans (toujours avec $a=0{,}08$; $b=0{,}0001$; $c=0{,}00005$; $d=0{,}05$) et pour $x_0=810$ et $y_0=1010$.
Comparer avec les résultats donnés par le tableur.

On constate alors cette drôle de spirale qui s'explique biologiquement de la manière suivante ; au moment où les proies augmentent, il y a plus à manger : mécaniquement les prédateurs se sentent « mieux » et se multiplient davantage, leur nombre augmente. Lorsqu'ils deviennent plus nombreux, ils mangent plus (enfin pas chacun individuellement mais au total), il y a donc moins de proies (leur nombre va diminuer). S'il y a moins de proies, les prédateurs mangent moins, se sentent donc moins bien et vont diminuer en nombre, et ainsi de suite : la bouble est bouclée !

On peut constater que les résultats sont très proches et donc que le procédé de linéarisation au voisinage du point d'équilibre est très précis. Graphiquement on peut voir aussi la spirale se concentrer de manière très proche du point d'équilibre (un peu comme s'il était attiré par lui !)

Version 2 :

On s'intéresse à l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse.
On désigne par T_n et B_n les nombres respectifs de truites et de brochets dans la Meuse le premier juin de l'année $2001+n$.
On sait qu'entre une année $2001+n$ et la suivante :

- le nombre de truites augmente de 10 % mais lors des $\text{T}_n\times\text{B}_n$ rencontres possibles entre les deux espèces, seules 0,1 % ont effectivement lieu et à chacune d'entre elles la truite est dévorée par le brochet ;
- parmi les B_n brochets, 5 % meurent uniquement à cause de leur sensibilité à la toxicité de l'eau de la Meuse mais le fait de dévorer des truites permet aux brochets de se reproduire (naissance de nouveaux brochets). Ainsi, le nombre de nouveaux brochets est estimé à 50 % du nombre de truites dévorées.

1°) Étude des suites (T_n) et (B_n)

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases}\text{T}_{n+1}=1{,}1\text{T}_n-0{,}001\text{T}_n\times\text{B}_n\\ \text{B}_{n+1}=0{,}95\text{B}_n+0{,}0005\text{T}_n\times\text{B}_n\end{cases}\quad(1)$.

b) Quelle est la nature de la suite (T_n) lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ? Quels sont son sens de variation et sa limite ?

c) Quelle est la nature de la suite (B_n) lorsqu'il n'y a pas de proies ? Quels sont son sens de variation et sa limite ?

d) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} T_{n+1} - T_n = T_n(0,1 - 0,001B_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-0,05 + 0,0005T_n) \end{cases}$.

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?

2°) **À l'aide de la calculatrice**

En 2001, dans le secteur étudié, on comptait 210 truites et 50 brochets.

a) Rentrer les suites dans la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs donnant le nombre de proies (truites) et le nombre de prédateurs (brochets) au cours des 200 années suivant 2001.

b) Pour avoir une idée de l'évolution de ces deux populations, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux truites d'une part et aux brochets d'autre part.

De quel type d'évolution s'agit-il ?

Indication pour la calculatrice :

Après avoir configuré la touche fenêtre, aller dans 2nde zoom (format) puis sélectionner $f(n)$ et aller enfin dans trace.

Pour s'en convaincre, représenter le nuage de points de coordonnées $(T_n ; B_n)$.

Indication pour la calculatrice :

2nde zoom (format)

Sur la 1ère ligne, choisir uv puis appuyer sur la touche entrer puis fenêtre.

nMin = 0
nMax = 500
DbutTracé = 1
PasTracé = 1
X min = 0
X max = 500
Xgrad = 1
Y min = 0
Y max = 400
Ygrad = 1

c) Interpréter concrètement cette évolution.

d) Faire varier les données initiales. L'évolution est-elle fortement influencée par celles-ci ?

Illustrer le résultat de la question 2°) d).

3°) **Étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre**

a) Déterminer les réels T et B tous deux non nuls tels que $\begin{cases} T = 1,1T - 0,001T \times B \\ B = 0,95B + 0,0005T \times B \end{cases}$.

La matrice constante $U = \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}$ est alors appelée le point d'équilibre.

b) On se place au voisinage du point d'équilibre en posant $t_n = T_n - 100$ et $b_n = B_n - 100$, pour tout entier naturel n.

Démontrer que le système (1) (question 1°) a)) équivaut au système $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0,1b_n - 0,001t_n b_n \\ b_{n+1} = 0,05t_n + b_n + 0,0005t_n b_n \end{cases}$.

On peut considérer le terme $t_n b_n$ comme négligeable au voisinage du point d'équilibre. Ainsi, le système (1) peut être approximé par le système (2) $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,05t_n + b_n \end{cases}$.

c) On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} t_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Démontrer que le système (2) est équivalent à $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice carrée que l'on déterminera.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $V_n = A^n V_0$.

d) À l'aide de la calculatrice, conforter ou invalider les conjectures émises.

Note : Durant la Première Guerre mondiale, la pêche dans la mer Adriatique avait été restreinte. Le zoologiste italien Umberto d'Ancona remarqua que le pourcentage de poissons était supérieur à celui du début de la guerre. Il demanda à Vito Volterra de construire un modèle mathématique qui expliquerait ces observations.

Alfred James Lotka est un statisticien né en 1880 à Lviv, en Ukraine de parents américains. Il généralisa les travaux de Pierre-François Verhulst et Vita Volterra sur la dynamique des populations.

14 Des botanistes ont modélisé la prédation entre coccinelles et pucerons, sur un rosier, de la manière suivante : pour tout nombre entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,4a_n + 0,8b_n \\ b_{n+1} = -0,1a_n + 1,2b_n \end{cases}$ où a_n (respectivement b_n) est le nombre de dizaines de coccinelles (respectivement de pucerons) sur le rosier au bout de n jours.

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ avec une matrice carrée A que l'on précisera.

2°) Chaque jour, les botanistes ajoutent une coccinelle sur le rosier.

Déterminer la matrice unicolonne C telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + C$.

3°) Démontrer qu'il existe un état stable S que l'on déterminera c'est-à-dire une matrice colonne S avec deux lignes vérifiant $S = AS + C$.

15 Une substance B, présente dans le corps d'un animal, utilise une partie d'une autre substance, notée A. En temps normal, le bon équilibre se crée entre ces substances et l'animal est en bonne santé.

Chez un animal malade, on a modélisé l'évolution entre les substances A et B, de la manière suivante : pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,7b_n \\ b_{n+1} = -0,2a_n + 1,3b_n \end{cases}$ où a_n et b_n désignent respectivement les concentrations de substances A et B en mg par litre de sang, chez cet animal, le n-ième mois.

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice carrée que l'on précisera.

2°) Afin de le soigner, on lui administre chaque mois par intraveineuse une quantité q, en mg par litre de sang, de la substance A.

Déterminer la matrice C telle que pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1} = MU_n + C$.

3°) Démontrer qu'il existe un état stable S que l'on déterminera en fonctionde q.

4°) Pour que l'animal soit en bonne santé, la quantité de substance B doit se stabiliser autour de 1000 mg par litre de sang.

Quelle quantité de substance A faut-il administrer chaque mois ? Quelle est alors la quantité de substance A présente dans son sang ?

$\boxed{16}$ Le colza a des aptitudes particulières à disperser ses gènes. Deux espèces différentes A et B de colza sont plantées dans un même champ.
Une étude montre que si a_n et b_n sont les proportions respectives des espèces A et B dans ce champ l'année n, où n désigne un entier naturel, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n - 0,2b_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,4a_n + 0,7b_n + 0,1 \end{cases}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Partie A

1°) Donner les matrices M et C telles que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n + \mathrm{C}$.

2°) Démontrer qu'il existe une unique matrice S carrée d'ordre 2 que l'on déterminera telle que $\mathrm{S} = \mathrm{MS} + \mathrm{C}$.
puis que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$ pour tout entier naturel n.

Ancienne version du $\boxed{16}$:

Partie B - Étude de la convergence de la suite (U_n)

1°) a) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{S}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$, puis que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$.

2°) En 2012, il y avait une proportion égale à 0,2 pour l'espèce A et à 0,3 pour l'espèce B.
a) Quelle sera la proportion de l'espèce A :
• en 2013 ? • en 2016 ?
b) Utiliser la calculatrice pour déterminer la proportion de l'espèce A sur le long terme.

$\boxed{17}$ Des scientifiques ont modélisé la prédation de deux espèces animales A et B dans un milieu fermé de la manière suivante : $\begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n + 0,6y_n \\ y_{n+1} = -0,2x_n + 1,5y_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n, où x_n (respectivement y_n) est le nombre le nombre de dizaines d'animaux de l'espèce A (respectivement le nombre de dizaines d'animaux de l'espèce B) présents dans ce milieu fermé le n-ième jour.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n$ où M est une matrice carrée que l'on précisera.

2°) Chaque jour, les scientifiques retirent dix animaux de l'espèce B de ce milieu fermé.
Déterminer la matrice C telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{MU}_n + \mathrm{C}$ pour tout entier naturel n.

3°) Démontrer qu'il existe une unique matrice S telle que $\mathrm{S} = \mathrm{MS} + \mathrm{C}$ que l'on déterminera puis interpréter le résultat obtenu.

$\boxed{18}$ Trois enfants Alice, Bernard et Charles se font des passes avec un ballon de football. Alice passe toujours le ballon à Bernard, Bernard à Charles et Charles passe le ballon 1 fois sur 3 à Bernard.
À chaque étape, les enfants font des passes (ils ne gardent pas le ballon).

1°) Représenter la situation précédente à l'aide d'un graphe probabiliste et écrire la matrice de transition en colonnes M.

2°) On admet que la suite (M^n) de matrices converge. Conjecturer sa limite à l'aide de la calculatrice.

3°) Interpréter concrètement le résultat précédent.

On pourra utiliser un logiciel de calcul formel (par exemple, le logiciel en ligne dcode).

$\boxed{19}$ **Modèle de Leslie**

On s'intéresse à une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de 3 ans, répartie en trois catégories : juvéniles, pré-adultes (rongeurs de 1 an) et adultes (rongeurs de 2 ans).
On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles. On suppose que chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année.
Cependant, une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et 40 % de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.
En 2012, cette population de rongeurs comportait 30 juvéniles, 50 pré-adultes et 50 adultes.
On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.

1°) Représenter la situation avec un graphe pondéré en prenant pour sommets les états suivants :
J : juvénile ; P : pré-adulte ; A : adulte.

2°) Donner la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe en prenant les états dans l'ordre J-P-A.
Cette matrice M est appelée *matrice de Leslie*.

3°) Donner grâce à la calculatrice le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

4°) On souhaite conjecturer l'évolution de cette population à l'aide d'un tableur.
On note j_n le nombre de juvéniles, p_n le nombre de pré-adultes et a_n le nombre d'adultes l'année $2012 + n$.
Pour tout entier naturel n, on a : $j_{n+1} = 10 \times a_n + 6 \times p_n$, $p_{n+1} = 0,5 \times j_n$, $a_{n+1} = 0,4 \times p_n$.
Grâce à ces relations, on va pouvoir calculer de manière automatique les termes des différentes suites.
Dans la colonne F, on calcule le rapport du nombre total de rongeurs de chaque année sur le nombre total de rongeurs l'année précédente.

a) Réaliser cette feuille de calcul sur calculatrice (en allant dans l'application CellSheet, il est recommandé de regarder une vidéo). Saisir les formules suivantes dans les cellules indiquées puis recopier vers le bas.
Dans E2 : $= \mathrm{B2} + \mathrm{C2} + \mathrm{D2}$; dans B3 : $= 6 * \mathrm{C2} + 10 * \mathrm{D2}$; dans C3 : $= 0.5 * \mathrm{B2}$; dans D3 : $= 0.4 * \mathrm{C2}$;
dans F3 : $= \mathrm{E3}/\mathrm{E2}$.

Attention : On ne descend pas colonne par colonne mais par un groupe de colonnes – on remarque en effet que chaque résultat sur une ligne dépend des autres résultats sur la même ligne.

	A	B	C	D	E	F
1	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Nombre total de rongeurs	Rapport
2	0	30	50	50	130	
3	1	800	15	20	835	6,42307692
4	2					

b) Retrouver le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

c) Pour avoir une idée de l'évolution de cette population, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux trois catégories ainsi qu'à la population totale. De quel type d'évolution s'agit-il ?

d) Recopier et compléter la phrase :
« À partir d'un certain rang, la population totale semble être multipliée par …. d'une année sur l'autre ».

Note : Le statisticien anglais Patrick Leslie a développé en 1945 un modèle pour décrire l'évolution du nombre de femelles chez les rongeurs qui provoquent de gros dégâts dans les réserves alimentaires. Ce modèle est adopté par de nombreux biologistes.

Extrait page 99 d'un livre de TS spé ex. 45 livre édition Hâtier
Ce type de modèle d'étude de la dynamique d'une population structurée en âge est dû à P. H. Leslie (1945) ; il est l'un des plus utilisés en dynamique des populations et en démographie.

20 On souhaite étudier une population d'oiseaux migrateurs. Une étude menée en janvier 2020 a montré qu'un quart de la population séjournait dans la région nord. Le taux de migration vers le nord est égal à 20 % et le taux de migration vers la région sud est égal à 10 %.
1°) Représenter la situation par un graphe pondéré en définissant deux états.
Écrire la matrice de transition A en colonnes.
2°) On note P_n la distribution de la population d'oiseaux au bout de n mois (on commence en janvier 2020).
Exprimer A^n en fonction de n à l'aide du rappel ci-dessous puis P_n en fonction de n.
En déduire la distribution limite.

> Soit a et b deux réels de somme non nulle.
> On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$.

21 Une urne A contient 2 boules blanches et une urne B contient 4 boules noires.
On procède au tirage aléatoire simultané d'une boule de chaque urne et la boule extraite est changée d'urne.
On répète cette opération.
On s'intéresse au contenu de l'urne A à chaque étape.
Il y a trois états possibles :
« L'urne A contient 2 boules blanches » (état 1),
« L'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire » (état 2),
« L'urne A contient 2 boules noires » (état 3).
On notera que le nombre de boules est constant dans chaque urne.
Le contenu de l'urne B se déduisant à chaque fois de celui l'urne A, il n'est pas utile de le préciser pour définir les états.
1°) Déterminer les probabilités de transition (certaines nécessitent un calcul) puis faire un graphe probabiliste.
Écrire la matrice de transition M en colonnes.
2°) À l'aide du site dcode, déterminer la distribution de probabilités au bout de n étapes puis la distribution limite.
3°) **Simulation**
On se propose d'écrire une fonction Python `exp(n)` qui prend pour argument un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et qui renvoie une liste donnant le nombre de boules blanches dans l'urne A au cours de n tirages successifs.
On utilisera des listes et les fonctions append et remove.

22 Je propose deux versions de cet exercice.

Version 1 :
Une fourmi se déplace sur les « bords » d'un triangle ABC et change de sommet à chaque seconde. On se propose d'étudier la position de la fourmi au bout de n secondes.
On suppose qu'elle part du point A.
- Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition T en colonnes associée.
- Déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes.
- À l'aide du site « dcode », déterminer la distribution de probabilités après n secondes et la distribution limite.

Version 2 :
1°) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $M = 2U - V$.
Calculer U^2, V^2, UV et VU.
En déduire M^n pour n entier naturel quelconque.
2°) Une fourmi se déplace sur les « bords » d'un triangle ABC et change de sommet à chaque seconde. On se propose d'étudier la position de la fourmi au bout de n secondes.
On suppose qu'elle part du point A.
- Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition T en colonnes associée.
- Déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes.
- À l'aide de la question 1°), déterminer la distribution de probabilités après n secondes et la distribution limite.

23 On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient une boule noire et deux boules blanches ; l'urne U_2 contient deux boules noires et une boule blanche.
On effectue une suite de tirages avec remise de la façon suivante :

> Le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
>
> Lors du n-ième tirage (n désignant un entier naturel non nul) :
> - si la boule tirée est noire, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ;
> - si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

À chaque étape, on tire une boule que l'on remet dans la même urne.
On notera que le contenu des urnes n'évolue pas.
À chaque étape, on est dans l'un des états suivants :
« Le tirage s'effectue dans l'urne l'urne U_1 » (état 1) ; « Le tirage s'effectue dans l'urne U_2 » (état 2).
1°) Représenter le graphe probabiliste associé à la situation.
2°) Déterminer la distribution de probabilités après le n-ième tirage et la distribution limite.

24 Je propose deux versions de cet exercice.

Version 1 :
On reprend la situation de l'exercice **2**.
On se déplace sur les sommets d'un tétraèdre ABCD en partant du sommet A. On suppose qu'à chaque seconde on change de sommet, chaque sommet ayant la même probabilité d'être atteint.
À l'aide du site « dcode », déterminer la distribution de probabilités au bout de n déplacements et la distribution limite.

Version 2 :

1°) On pose $M=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$, $U=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ et $V=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$.

Vérifions que $M=3U-V$.

Calculer U^2, V^2, UV et VU.

En déduire M^n pour *n* entier naturel quelconque.

2°) On reprend la situation de l'exercice $\boxed{2}$.

On se déplace sur les sommets d'un tétraèdre ABCD en partant du sommet A. On suppose qu'à chaque seconde on change de sommet, chaque sommet ayant la même probabilité d'être atteint.

À l'aide de la question 1°), déterminer la distribution de probabilités au bout de *n* déplacements et la distribution limite.

Solutions

Progression exercices faite l'année scolaire 2020-2021 notée le 3-4-2022 :

1 et 2 graphes probabilistes
Exercice sur urnes d'Ehrenfest
Exercice marche aléatoire – 4 - 3 – 2
Exercices 7 et 8
22 et 24 avec M, U, V

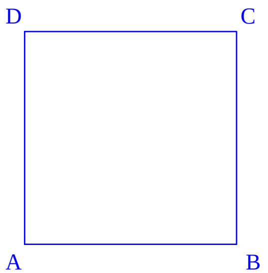
Progression exercices faite l'année scolaire 2021-2022 :
exercice 7 // 5 et 8 // 6 // 1, 2, 3
20 (oiseaux migrateurs) - 21 (urnes) - 22 (fourmi) - 23 (urnes) - 4 (Ehrenfest)

$\boxed{\textbf{1}}$

Noté par Cléméntine Haghighi le 23-3-2016

À quoi correspond P_0 ? Comment le trouve-t-on ?

$\Rightarrow$ il s'agit de l'état initial. À l'état initial, la fourmi est en A, donc $P_0(A)=1$, $P_0(B)=0$ …



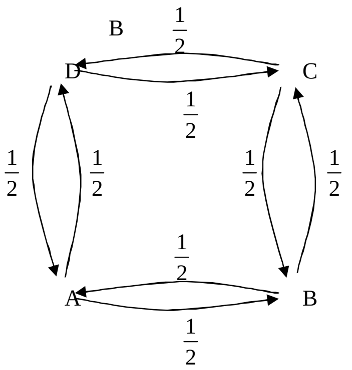
La fourmi met une minute pour se déplacer d'un sommet à l'autre.

Au bout de 4 minutes, la fourmi sera soit en A soit en C.
On cherche la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 4 minutes.

On pourrait dresser un arbre de probabilités, mais ce n'est pas la méthode qui est employée ici.

1°) **Représenter la situation par un graphe probabiliste.**

On dessine le graphe probabiliste associé à la situation.
Les états sont ici évidents : « La fourmi est en A », « La fourmi est en B », « La fourmi est en C », « La fourmi est en D ».



On peut modéliser la situation par une marche aléatoire sur ce graphe.

Il s'agit d'un « graphe étiqueté ».
La somme des probabilités sur les arêtes orientées partant d'un sommet est égale à 1.

Il s'agit d'une marche aléatoire sur un graphe à 4 sommets.

2°) **Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe.**

On dresse la matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste.
M est une matrice carrée d'ordre 4.

$$\mathrm{M}=\begin{array}{c}\\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{D}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

$m_{1,1}$ = coefficient sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne et dans la 1$^{\text{ère}}$ colonne = probabilité de passer de A à A = 0

$m_{1,2}$ = coefficient sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne et dans la 2$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de B à A = $\frac{1}{2}$

$m_{1,3}$ = coefficient sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne et dans la 3$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de C à A = 0

$m_{1,4}$ = coefficient sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne et dans la 4$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de D à A = $\frac{1}{2}$

$m_{2,1}$ = coefficient sur la 2$^{\text{e}}$ ligne et dans la 1$^{\text{ère}}$ colonne = probabilité de passer de A à B = $\frac{1}{2}$

$m_{2,2}$ = coefficient sur la 2$^{\text{e}}$ ligne et dans la 2$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de B à B = 0

$m_{2,3}$ = coefficient sur la 2$^{\text{e}}$ ligne et dans la 3$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de C à B = $\frac{1}{2}$

$m_{2,4}$ = coefficient sur la 2$^{\text{e}}$ ligne et dans la 4$^{\text{e}}$ colonne = probabilité de passer de D à B = 0

Il s'agit d'une matrice stochastique en lignes et en colonnes (car elle est symétrique c'est-à-dire qu'elle est égale à sa transposée).

3°) En déduire la probabilité que la fourmi soit en A au bout de 4 minutes.

On note P_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de n minutes ($n\in\mathbb{N}$).

Par définition, $\mathrm{P}_n=\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow 1^{\text{er}} \text{ coefficient } = \text{ probabilité d'être en A au bout de } n \text{ minutes}\\ \leftarrow 2^{\text{e}} \text{ coefficient } = \text{ probabilité d'être en B au bout de } n \text{ minutes}\\ \leftarrow 3^{\text{e}} \text{ coefficient } = \text{ probabilité d'être en C au bout de } n \text{ minutes}\\ \leftarrow 4^{\text{e}} \text{ coefficient } = \text{ probabilité d'être en D au bout de } n \text{ minutes}\end{array}$.

D'après l'énoncé, la fourmi est en A au bout de 0 minute donc $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{MP}_n$.

On a donc une suite de matrices vérifiant cette relation de récurrence.

On peut dire que donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$ (analogue aux suites géométriques de réels).
En particulier, pour $n=4$, on a : $\mathrm{P}_4=\mathrm{M}^4\times\mathrm{P}_0$.

$$\mathrm{M}^4=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4$$

On a $\mathrm{M}^4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (calcul très simple à faire « à la main » : on calcule M^2 puis M^4 ; on vérifie le résultat à la calculatrice).

On a donc $\mathrm{P}_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

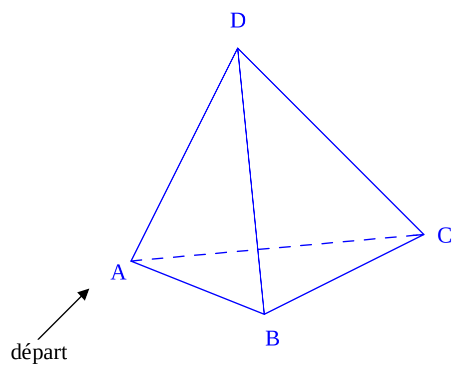
On en déduit que $P_4 = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (calcul très simple à faire « à la main »).

Donc la probabilité que la fourmi soit en A au bout de 4 minutes est égale à $\frac{1}{2}$.

Le 16 mars 2021

Il est intéressant de généraliser avec M^{2k} et M^{2k+1}.

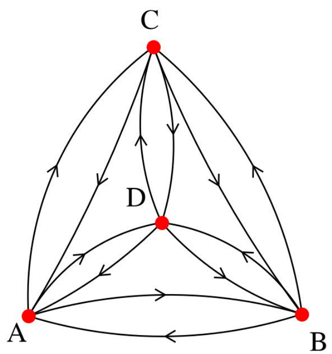
$\boxed{2}$ Même situation avec un tétraèdre pendant 5 minutes.



1°)

On n'écrit pas les probabilités sur le tétraèdre mais sur le graphe probabiliste (qui correspond au tétraèdre mis à plat ; on parle de graphe planaire).

Pour éviter d'avoir des arêtes qui se croisent, on représente le graphe sous la forme suivante :



Chaque arête orientée comporte le poids $\frac{1}{3}$.

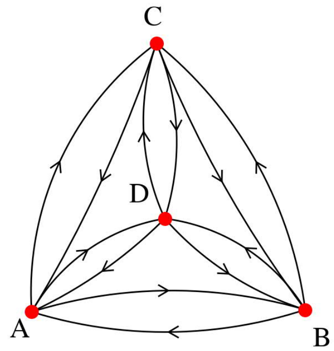
Noté par Cléméntine Haghighi le 23-3-2016

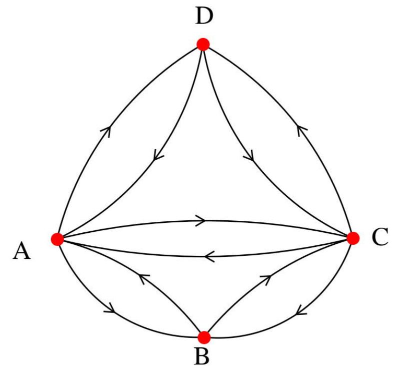
Problème : On ne se rend pas bien compte pourquoi les probabilités sont d'un tiers à chaque fois… On voit mieux avec la représentation 3D.

On écrit les probabilités sur les arêtes orientées du graphe.

2°)

On prend les sommets dans l'ordre A-B-C-D.





La matrice de transition du graphe en colonnes est la matrice M carrée d'ordre 4 suivante :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette matrice de transition ne dépend en fait pas de l'ordre dans lequel on prend les sommets.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = M \times P_n$

On a donc une suite de matrices vérifiant cette relation de récurrence.

On peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = M^n P_0$ (analogue aux suites géométriques de réels).

3°) 5 minutes est l'équivalent de 5 trajets.
Pour « mettre à jour » les probabilités à chaque trajet, on utilise une matrice P_n qui donne les probabilités au bout de n trajets.

La suite (P_n) vérifie la relation de récurrence $P_{n+1} = M \times P_n$.

On cherche $P_5 = M^5 \times P_0$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (le pion part de A).

$$P_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_5 = \begin{pmatrix} \frac{20}{81} \\ \frac{61}{243} \\ \frac{61}{243} \\ \frac{61}{243} \end{pmatrix}$ (calculs effectués à la calculatrice grâce à la commande de puissance d'une matrice)

La probabilité que le pion soit en A au bout de 5 minutes est égale à $\frac{20}{81}$.

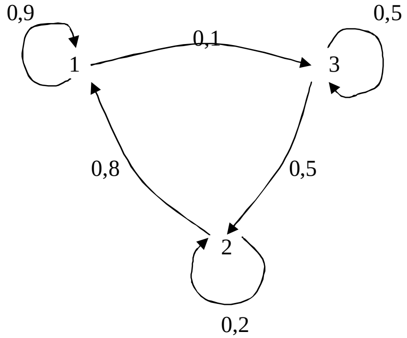
$\boxed{3}$

1°)

a) On désigne par :

- état 1, l'état où l'individu est immunisé ;
- état 2, l'état où l'individu est malade ;
- état 3, l'état où l'individu est sain.

On peut modéliser la situation par une marche aléatoire sur le graphe suivant.



On observe la présence de « boucles ».

b) La matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste est :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

2°) $A^2 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,88 & 0,4 \\ 0,05 & 0,04 & 0,35 \\ 0,14 & 0,08 & 0,25 \end{pmatrix}$

Les probabilités que l'individu soit dans l'état 1, 2 ou 3 au bout de n mois sont données par la matrice unicolonne P_n.
La suite (P_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = A \times P_n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = A^n P_0$.

Ici, on s'intéresse au cas où $n = 2$.

On a : $P_2 = A^2 \times P_0$ avec $P_0 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$ puisque l'individu est au départ immunisé.

Ainsi, $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}88 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}35 \\ 0{,}14 & 0{,}08 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0{,}81 \\ 0{,}05 \\ 0{,}14 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$.

Il y a deux façons pour répondre à la question.
On peut soit faire une phrase soit nommer des événements.
On se réfère à la définition des états 1, 2, 3.

La probabilité que l'individu soit malade au bout de 2 mois est égale à 0,05.
La probabilité que l'individu soit immunisé au bout de 2 mois est égale à 0,81.

4 Les urnes d'Ehrenfest

Schéma du dispositif (à refaire) :

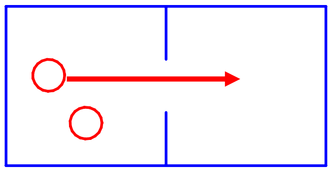
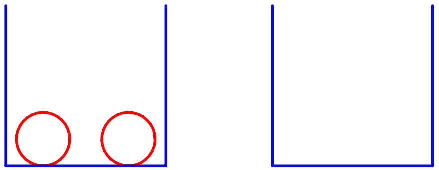


Schéma des urnes (à refaire) :



A B

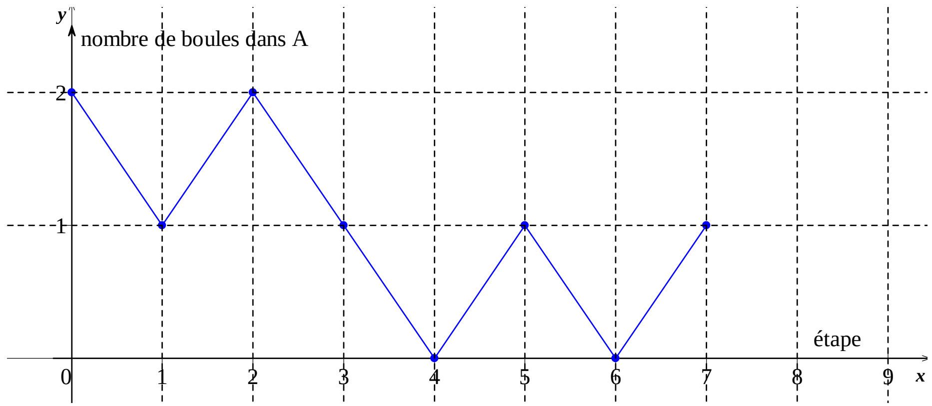
État E_0 : l'urne A contient 2 boules et l'urne B contient 0 boule.
État E_1 : l'urne A contient 1 boule et l'urne B contient 1 boule.
État E_2 : l'urne A contient 0 boule et l'urne B contient 2 boules.

E_0	E_1	E_2
Les 2 dans A	1 dans A 1 dans B	Les 2 dans B

		Urne A	**Urne B**	**Nombre de boules dans A**
Étape 0	Au départ	1-2		2
Étape 1	Après le 1er lancer	2	1	1
Étape 2	Après le 2^{e} lancer	1-2		2
Étape 3	Après le 3^{e} lancer	1	2	1
Étape 4	Après le 4^{e} lancer		1-2	0
Étape 5	Après le 5^{e} lancer	2	1	1
Étape 6	Après le 6^{e} lancer		1-2	0
Étape 7	Après le 7^{e} lancer	1	2	1

On observe un retour à l'état initial après le 2^{e} lancer.

La trajectoire conrrespondant à la promenade aléatoire est la suivante.

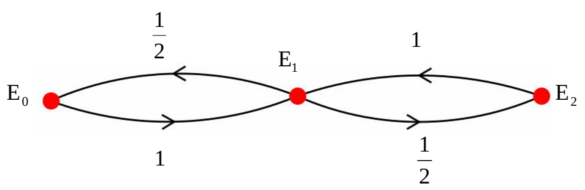


Ancienne version du corrigé :

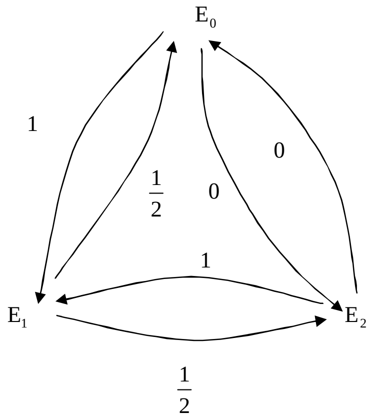
1°) **Représentons le graphe probabiliste associé à la situation.**

On effectue le graphe probabiliste.

La meilleure façon de représenter le graphe probabiliste est la suivante.



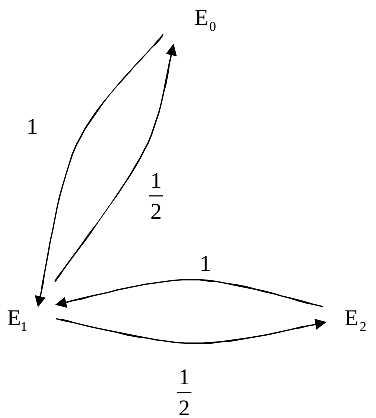
$1^{ère}$ version du graphe (à éviter) :



2^e version du graphe (meilleure) :

Sur un graphe probabiliste, on évite de tracer les arêtes qui ont un coefficient de pondération de 0.

Ne pas tracer les branches dont les probabilités sont 0.



Faire le graphe probabiliste « en ligne ».

2°) **Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe.**

On pren les sommets dans l'ordre E_0, E_1, E_2.

La matrice de transition en colonnes du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (en écrivant de haut en bas, et de droite à gauche).

On obtient une matrice stochastique en colonnes.

3°) **Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.**

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $M^3 = M$, on peut affirmer que la suite (M^n) est périodique à partir de l'indice 1.

• pour tout entier naturel n pair supérieur ou égal à 2 on a : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

• pour tout entier naturel n impair on a : $M^n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

4°) **En déduire l'état probabiliste au bout de *n* étapes.**

On pose $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = M^n P_0$

Partie surlignée à revoir :

Pour tout entier naturel n pair (et supérieur ou égal à 2), $P_n = M^n P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n impair, $P_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour P_n Il y a une cyclicité.

La suite (P_n) est périodique de période 2 à partir de l'indice 1.

La suite (P_n) ne converge pas donc il n'y a pas d'état stable.
En particulier, le système ne va pas revenir à l'état initial.

Voir animation Geogebra sur le site : tube.geogebra.org/student/m25500

Solution :

7°) On pose $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y, z sont des réels positifs ou nuls dont la somme est égale à 1.

On doit avoir $MS = S \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = x \\ x + z = y \\ \frac{y}{2} = z \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = x \\ \frac{y}{2} = z \end{cases}$$ (On laisse tomber la deuxième équation qui est toujours vérifiée avec les deux autres)

On a $x + y + z = 1$ donc $\frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 1$ soit $2y = 1$.

On en déduit $y = \frac{1}{2}$ d'où un unique état stable : $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

8°) Programme Python

```
from random import randint
import matplotlib.pyplot as plt

def ehrenfest(n):
    A=[1,2]
    X=[2]
    for i in range(n):
        b=randint(1,2)
        if b in A:
            A.remove(b)
        else:
            A.append(b)
        X.append(len(A))
    return X

def graphique(n):
    plt.xlim(0,n)
    plt.ylim(0,3)
    plt.grid(linestyle="-")
    x=[i for i in range(n+1)]
    plt.plot(x,ehrenfest(n),marker='o')
    plt.show()
```

Taper ce programme Python et le faire tourner.

Pour n boules :

```
from random import randint
import matplotlib.pyplot as plt

def ehrenfest(n):
    A=[i for i in range(1,3)]
    X=[len(A)]
    for i in range(n):
        b=randint(1,2)
        if b in A:
           A.remove(b)
        else:
           A.append(b)
        X.append(len(A))
    return X

def trajectoire(n):
    plt.xlim(0,n)
    plt.ylim(0,3)
    plt.grid(linestyle= "-" )
    x =[I for i in range (n+1)]
    plt.plot(x,ehrenfest(n),marker= ’ o ’)
    plt.show()
```

Meilleure version écrite le 30-3-2016 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi les suites (P_{2n}) et (P_{2n+1}) sont constantes (c'est-à-dire que tous les termes de la suite (P_{2n}) sont égaux à la même matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et que tous les termes de la suite (P_{2n+1}) sont égaux à la même matrice $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Comme $A \neq B$, la suite (P_n) ne peut pas converger (en effet, lorsqu'une suite converge vers une limite L, alors les deux « sous-suites » des termes d'indice pair et d'indice impair convergent aussi vers L).

On peut dire que la suite (P_n) est périodique de période 2 à partir de l'indice 1.

Remarque à la suite d'une question de Clémentine Haghighi le 30-3-2016 :

On ne peut utiliser la propriété du cours sur les matrices qui contiennent des 0 (ou dont une puissance). En effet, il s'agit d'une condition suffisante et non d'une condition nécessaire.

5°) Simulation

Programme Python

```
from random import randint

def transfert(a,b):
    r=randint(0,1)
    if r==0:
       a=1-a
    else:
       b=1-b
    return a,b

def simulation(n):
    a,b=1,1
    for i in range (1,n+1):
        a,b=transfert(a,b)
    return a,b
```

6°) Simulation

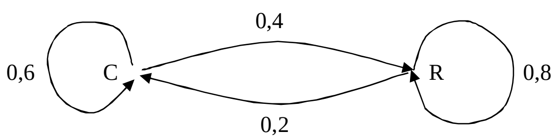
```
from random import randint

def transfert(L):
    N=len(L)
    i=randint(0,N-1)
    L[i]=1-L[i]
    return L

def simulation(N,n):
    L=[1]*N
    for k in range(n):
        L=transfert(L)
    return L
```

7°) Il y a un état stable pour le processus mais pas convergence.

$\boxed{5}$

Le thème de cet exercice est l'étude de flux de populations.

1°)



2°) **Donnons la matrice de transition en lignes M.**

$$\mathrm{M} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{R} \end{array}\begin{array}{c} \mathrm{C} \quad\quad \mathrm{R} \\ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

3°) **Calculons l'état de la population de l'île au bout d'un an, deux ans, trois ans.**

$\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} 12\,000 & 30\,000 \end{pmatrix}$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$.

D'où

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 12\,000 & 30\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\,200 & 28\,800 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 13\,200 & 28\,800 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\,680 & 28\,320 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_2 \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 13\,872 & 28\,128 \end{pmatrix}$$

4°) **Conjecturons avec la calculatrice l'état de la population de l'île à long terme.**

Armand Morelli TS2 (le 30-3-2016) noté par lui sur une feuille

À la calculatrice, on calcule $\mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^n$ avec *n* de plus en plus grand.
On constate que la matrice obtenu est égale à $\begin{pmatrix} 14\,000 & 28\,000 \end{pmatrix}$ quand la calculatrice ne peut plus afficher de chiffres significatifs.

Armand Morelli TS2 (le 30-3-2016) noté par moi sur une feuille

« On fait les calculs à la chaîne ».

On calcule M^n avec un *n* très grand.
On voit que plus *n* grand, plus ça se rapproche d'une matrice.
La calculatrice ça s'arrête.

Avec la calculatrice, on peut conjecturer que l'état de l'île à long terme est donné par la matrice $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 14\,000 & 28\,000 \end{pmatrix}$.
Il s'agit en fait de l'état stable du processus.

5°)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = \frac{1}{0,6}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} + \frac{(1-0,6)^n}{0,6}\begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$== \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{0,4^n}{6}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$ (principe simple de multiplication par 10 du numérateur et du dénominateur)

$$= \frac{1}{6} \times 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{0,4^n}{6} \times 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{0,4^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

● On cherche la distribution limite.

On cherche d'abord la limite de M^n.

On a $-1 < 0,4 < 1$ donc $0,4^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$$\mathrm{M}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{L}$ avec

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 12\,000 & 30\,000 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12\,000 & 30\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1000\begin{pmatrix} 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1000\begin{pmatrix} 14 & 28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14\,000 & 28\,000 \end{pmatrix}$$

On retrouve la distribution limite conjecturée.

$\boxed{6}$ **Étude d'une marche aléatoire**

1°)

N = 1

– 1	0	1

Graphe probabiliste à 3 sommets

La situation s'apparente à une marche aléatoire sur le graphe pondéré (chaîne de Markov).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N = 2

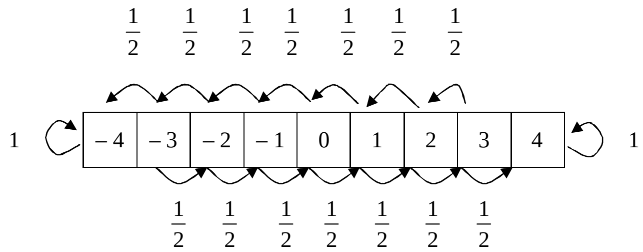
– 2	– 1	0	1	2

Graphe probabiliste à 5 sommets

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ancienne version du corrigées :

On a 9 cases numérotées de – 4 à 4.



1°) **Justifions que la matrice de transition en lignes associée à cette marche aléatoire est :**

$$\mathbf{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

En lisant l'énoncé, on s'aperçoit que dans tout l'exercice l'on travaille avec des matrices lignes.

Attention à l'ordre des sommets du graphe qui est donné dans l'énoncé : 0, 1, 2, 3, 4, – 1, – 2, – 3, – 4.

La matrice de transition A en lignes s'écrit :

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques d'écriture :

- Écrire plutôt $\frac{1}{2}$ que 0,5.
- Penser à bien écrire les fractions avec des barres horizontales et non des barres obliques.
- Prendre une demi-page pour bien écrire la matrice.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On met $\frac{1}{2}$ en facteur.

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2°) **Déterminons : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times A^4$.**

À l'aide la calculatrice, on obtient : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times A^4=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16}\end{pmatrix}$.

Indication pour la calculatrice :

On utilise le fait que $A^4=\frac{1}{2^4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^4$.

On définit la matrice [A] égale à la matrice ligne $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On définit la matrice [B] égale à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On effectue $[A]*[B]\wedge 4$. On obtient un résultat puis on fait Rep ∗ (1/2^4) pour obtenir la réponse.

Déduisons-en la probabilité que le pion revienne à la case de départ après 4 lancers.

On en conclut que la probabilité que le pion revienne à la case de départ après 4 lancers est $\frac{3}{8}$.

3°) Simulation

Algorithme à recopier

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *k* allant de 1 à 4 **Faire**
    a prend la valeur d'un entier aléatoire – 1 ou 1
    S prend la valeur $S+a$
FinPour

Sortie :
Afficher S

• Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme sert à simuler une marche aléatoire à 4 étapes.

• On suppose que la variable a pris successivement les valeurs – 1, 1, 1, 1. Qu'obtient-on à l'affichage ?

Lorsque a prend successivement les valeurs – 1, 1, 1, 1, l'algorithme affiche en sortie $S=2$.

4°) **Traduisons cet algorithme dans le langage d'un logiciel ou d'une calculatrice et simuler cette situation.**

Comment faire en sorte que l'on ait un entier aléatoire qui prenne soit la valeur – 1, soit la valeur 1 ?

1$^{\text{ère}}$ proposition :

x prend la valeur d'un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[
a prend la valeur $2\mathrm{E}(2x)-1$

2$^{\text{e}}$ proposition :
a prend la valeur d'un entier aléatoire soit 0 soit 1
Si $a=0$
  Alors a prend la valeur – 1
FinSi

```
: 0 → S
: For (K,1,4)
: nbrAléat(0,1,1)∗2−1 → A
: S+A → S
: End
: Disp S
```

Autre possibilité :

```
: 0 → S
: For (K,1,4)
: 2∗partEnt(2∗NbreAléat)−1 → A
: S+A → S
: End
: Disp S
```

Indications pour trouver les commandes sur la calculatrice :

Fonction	**Notation**	**Procédure d'accès dans la calculatrice**
Partie entière	partEnt ou iPart	math puis dans MATH sélectionner le choix 3
Nombre aléatoire	NbreAléat	math puis dans PROB ou PRB sélectionner le choix 1

Réaliser le programme correspondant en Python.

```python
from random import choice

s=0
for i in range(1,5):
    a=choice([-1,1])
    s=s+a
print (s)
```

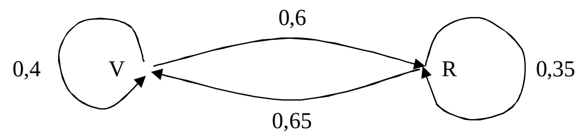
$\boxed{7}$

Partie A

$P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ (1 : vert ; 0 : rouge)

1°)

a) On note V l'état « Le compte est dans le vert » et R l'état « Le compte est dans le rouge ».



b) La matrice de transition en lignes du graphe en prenant les sommets dans l'ordre V-R est :

$$M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\mathrm{V} & \mathrm{R}\end{array}\\ \begin{array}{c}\mathrm{V}\\ \mathrm{R}\end{array} & \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,65 & 0,35\end{pmatrix}\end{array}$$

2°)

a)

$$P_1=P_0\times M=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,65 & 0,35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$$

$$P_2=P_1\times M=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$$

Pour effectuer, le calcul « à la main », on procède ainsi :

$$\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\\ 0,65 & 0,35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4\times0,4+0,6\times0,65 & 0,4\times0,6+0,6\times0,35\end{pmatrix}.$$

$$P_3=P_2\times M=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}0,5125 & 0,4875\end{pmatrix}$$

b) **Quelle est la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2$^{\text{e}}$ mois ? du 3$^{\text{e}}$ mois ?**

$P_2=\begin{pmatrix}0,55 & 0,45\end{pmatrix}$

Donc la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2$^{\text{e}}$ mois est égale à 0,55.

$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5125 & 0{,}4875 \end{pmatrix}$

Donc la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 3^e mois est égale à 0,5125.

Partie B

> Soit a et b deux réels de somme non nulle.
>
> On a $\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

Déterminons M^n pour n, entier naturel quelconque.

On applique la formule du cadre.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = \begin{pmatrix} 1-0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}65 & 1-0{,}65 \end{pmatrix}^n$$

$$= \frac{1}{0{,}6+0{,}65}\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}6 \\ 0{,}65 & 0{,}6 \end{pmatrix} + \frac{(1-0{,}6-0{,}65)^n}{0{,}6+0{,}65}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}6 \\ -0{,}65 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}8\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}6 \\ 0{,}65 & 0{,}6 \end{pmatrix} + \frac{(-0{,}25)^n}{1{,}25}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}6 \\ -0{,}65 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}8\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}6 \\ 0{,}65 & 0{,}6 \end{pmatrix} + (-0{,}25)^n \times 0{,}48\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}6 \\ -0{,}65 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

On peut éventuellement écrire M^n sous la forme d'une seule matrice.

$$= \begin{pmatrix} 0{,}52+(-0{,}25)^n \times 0{,}48 & 0{,}48\left(1+(-0{,}25)^n\right) \\ 0{,}52\left(1+(-0{,}25)^n\right) & 0{,}48+(-0{,}25)^n \times 0{,}52 \end{pmatrix}$$

Partie C

1°) **Exprimons P_n en fonction de n.**

On utilise la question 3°) de la partie B.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = P_0 M^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}52+(-0{,}25)^n \times 0{,}48 & 0{,}48\left(1+(-0{,}25)^n\right) \\ 0{,}52\left(1+(-0{,}25)^n\right) & 0{,}48+(-0{,}25)^n \times 0{,}52 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}52+(-0{,}25)^n \times 0{,}48 & 0{,}48\left(1+(-0{,}25)^n\right) \end{pmatrix}$$

2°) $-1 < -0{,}25 < 1$ donc $(-0{,}25)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On en déduit que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix}$ (distribution limite).

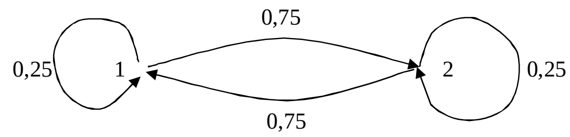
> On peut retrouver cette distribution limite en appliquant la formule du cours (distribution limite dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états).
> Cette distribution limite est égale à l'état stable.

8 L'allumeur de réverbères et le Petit Prince

État 1 : « Le réverbère est allumé »

État 2 : « Le réverbère est éteint ».

1°)



La situation se modélise par une marche aléatoire sur ce graphe probabiliste à deux états.

La matrice de transition en colonnes M du graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

2°) On applique la formule $\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$ avec $a = b = 0{,}75$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = \frac{1}{1{,}5}\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 0{,}75 \end{pmatrix} + \frac{(1-1{,}5)^n}{1{,}5}\begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} + (-0{,}5)^n \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

On peut éventuellement écrire M^n sous la forme d'une seule matrice.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

3°)

Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice colonne donnant la distribution de probabilités (état probabiliste) le jour n.

Au jour 0, le réverbère est allumé donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (rappel : $P_n = \begin{pmatrix} p_n \\ p'_n \end{pmatrix}$)

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = MP_n$ ce qui permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = M^n P_0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On en déduit que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

C'est la distribution limite.

On peut vérifier que cette distribution est stable c'est-à-dire $MS = S$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ et $p'_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$.

On a $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p'_n = \frac{1}{2}$.

À très long terme, il y a autant de chance que le réverbère soit allumé ou éteint.

Remarque : Les calculs sont identiques avec l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4°) Programme de simulation sur Python :

```python
from random import randint

def changement(a):
    r=randint(1,4)
    if r<=3:
       a=1-a
    return a

def freq(n):
    a=1
    c=0
    for i in range(1,n+1):
        a=changement(a)
        c=c+a
    f=c/n
    return f
```

On crée une fonction `changement(a)` qui prend pour argument un nombre 0 ou 1.
Il s'agit d'une fonction qui traduit le changement d'état du réverbère.
Elle n'a pas d'autre intérêt que d'être utilisé dans la fonction freq(n).

Proposition d'Auguste Charpentier (Terminale 7) le lundi 29-3-2021

```python
from random import randint

def changer():
    r = randint(1, 4)
    if r == 4:
        return 0
    else:
        return 1

def freq(n):
    etat = 0
    N = 0
    for i in range(n):
        r = changer()
        if r == 1:
           etat = 1 - etat
        N = N + etat
    f = N / n
    return f
```

9 **Étude d'un modèle proie-prédateur discret**

Objectif : observer l'évolution couplée de deux suites récurrentes dans un modèle proie-prédateur discrétisé

c_n : population de chouettes (en milliers)

s_n : population de souris (en milliers)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} c_{n+1} = 0,5\, c_n + 0,4\, s_n \\ s_{n+1} = -0,104\, c_n + 1,1\, s_n \end{cases}$ (le symbole $\forall$ est placé devant le système et non devant chacune des égalités)

$c_0 = 3$

$s_0 = 2$

1°)

a) **Tableau obtenu grâce à la calculatrice.**

Recopier le tableau demandé.

n	c_n	s_n	$\dfrac{s_n}{c_n}$
0	3	2	2/3
1	2,3	1,888	0,82087
2	1,9052	1,8376	0,96452
3	1,6876	1,8232	1,0803
4	1,5731	1,83	1,1633
5	1,5186	1,8494	1,2179
6	1,4991	1,8764	1,2517
7	1,5001	1,9082	1,272
8	1,5133	1,943	1,2839
9	1,5339	1,9799	1,2908
10	1,5589	2,0184	1,2947

b) **Conjectures sur l'évolution des populations.**

● Il semble que :
- la suite (c_n) soit décroissante pour n compris entre 0 et 6 puis croissante à partir de l'indice 6 ;
- la suite (s_n) soit croissante ;
- la suite $\left(\dfrac{s_n}{c_n}\right)$ soit croissante.

● À long terme, on observe une stabilisation du rapport $\dfrac{s_n}{c_n}$ autour de 1,3.

c) L'évolution ne semble pas être influencée par les conditions initiales.

Question de Clémentin Haghighi notée le mercredi 6-4-2016

Les conditions initiales ont-elles une grande importance sur le rapport chouettes/souris ?
S'il y avait 10 fois plus de chouettes que de souris, obtiendrait-on la même chose ?

Le 10-4-2016

Les conditions initiales ont une influence sur l'évolution (cf. formule que l'on trouve ensuite).

2°) $U_n = \begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$ $\qquad U_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -1,04 & 1,1 \end{pmatrix}$

On a $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

b) **Déduisons-en une relation liant U_n et U_0.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix}$

Démontrons que $PDP^{-1} = A$.

$\det P = 10 \times 1 - 5 \times 13 = -55$

$\det P \neq 0$ donc P est inversible.

On a donc $P^{-1} = \dfrac{1}{-55} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -13 & 10 \end{pmatrix}$.

Par conséquent,

$$\mathrm{PDP}^{-1}=\begin{pmatrix}10 & 13\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,02 & 0\\ 0 & 0,58\end{pmatrix}\times\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}10\times1,02+5\times0 & 10\times0+5\times0,58\\ 13\times1,02+1\times0 & 13\times0+1\times0,58\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}10,2 & 2,9\\ 13,26 & 0,58\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4\\ -0,104 & 1,1\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{A}$$

On pourrait aussi vérifier cette égalité à l'aide de la calculatrice.

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ (propriété du cours).

d) **Déduisons-en les coefficients de U_n en fonction de n.**

Comme la matrice D est diagonale, on a : $\mathrm{D}^n=\begin{pmatrix}1,02^n & 0\\ 0 & 0,58^n\end{pmatrix}$.

On va ensuite calculer A^n c'est-à-dire expliciter les coefficients de la matrice A^n.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 13 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,02^n & 0\\ 0 & 0,58^n\end{pmatrix}\times\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}10 & 5\\ 13 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,02^n & 0\\ 0 & 0,58^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-55}\begin{pmatrix}10\times1,02^n & 5\times0,58^n\\ 13\times1,02^n & 0,58^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -13 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}\times1,02^n+\frac{13}{11}\times0,58^n & \frac{10}{11}\left(1,02^n-0,58^n\right)\\ -\frac{13}{55}\times\left(1,02^n-0,58^n\right) & \frac{13}{11}\times1,02^n-\frac{2}{11}\times0,58^n\end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}\times1,02^n+\frac{13}{11}\times0,58^n & \frac{10}{11}\left(1,02^n-0,58^n\right)\\ -\frac{13}{55}\times\left(1,02^n-0,58^n\right) & \frac{1}{11}\left(13\times1,02^n-2\times0,58^n\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ s_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\left(-2\times1,02^n+13\times0,58^n\right)\times c_0+\frac{10}{11}\left(1,02^n-0,58^n\right)\times s_0\\ -\frac{13}{55}\times\left(1,02^n-0,58^n\right)\times c_0+\frac{1}{11}\left(13\times1,02^n-2\times0,58^n\right)\times s_0\end{pmatrix}$$

On peut remplacer c_0 et s_0 par leurs valeurs.

e) **Déterminons la limite des suites (c_n), (s_n) et $\left(\frac{s_n}{c_n}\right)$.**

- $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad c_n=\frac{1}{11}\left(-2\times1,02^n+13\times0,58^n\right)c_0+\frac{10}{11}\left(1,02^n-0,58^n\right)s_0$$
$$=1,02^n\times\frac{10s_0-2c_0}{11}+0,58^n\times\frac{13c_0-10s_0}{11}$$
$$=1,02^n\times\frac{10\times2-2\times3}{11}+0,58^n\times\frac{13\times3-10\times2}{11}$$
$$=1,02^n\times\frac{14}{11}+0,58^n\times\frac{19}{11}$$
$$=\frac{1,02^n\times14+0,58^n\times19}{11}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}1,02^n=+\infty$ car $1,02>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}0,58^n=0$ car $-1<0,58<1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=+\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad s_n=-\frac{13}{55}\left(1,02^n-0,58^n\right)c_0+\frac{1}{11}\left(13\times1,02^n-2\times0,58^n\right)s_0$$
$$=1,02^n\times\left(-\frac{13}{55}c_0+\frac{13}{11}s_0\right)+0,58^n\times\left(\frac{13}{55}c_0-\frac{2}{11}s_0\right)$$
$$=1,02^n\times\left(-\frac{13}{55}\times3+\frac{13}{11}\times2\right)+0,58^n\times\left(\frac{13}{55}\times3-\frac{2}{11}\times2\right)$$
$$=1,02^n\times\frac{18,2}{11}+0,58^n\times\frac{3,8}{11}$$
$$=\frac{1,02^n\times18,2+0,58^n\times3,8}{11}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1,02^n = +\infty$ car $1,02 > 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,58^n = 0$ car $-1 < 0,58 < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

- **$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{c_n}$**

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{s_n}{c_n} = \frac{\dfrac{1,02^n \times 18,2 + 0,58^n \times 3,8}{11}}{\dfrac{1,02^n \times 14 + 0,58^n \times 19}{11}}$$

$$= \frac{1,02^n \times 18,2 + 0,58^n \times 3,8}{1,02^n \times 14 + 0,58^n \times 19}$$

$$= \frac{\cancel{1,02^n} \times \left(18,2 + \dfrac{0,58^n}{1,02^n} \times 3,8\right)}{\cancel{1,02^n} \times \left(14 + \dfrac{0,58^n}{1,02^n} \times 19\right)}$$

$$= \frac{18,2 + \left(\dfrac{0,58}{1,02}\right)^n \times 3,8}{14 + \left(\dfrac{0,58}{1,02}\right)^n \times 19}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{0,58}{1,02}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{0,58}{1,02} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{c_n} = \dfrac{18,2}{14}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{c_n} = 1,3$.

f) **Répondons au problème posé et vérifions la cohérence avec les conjectures émises au 1°).**

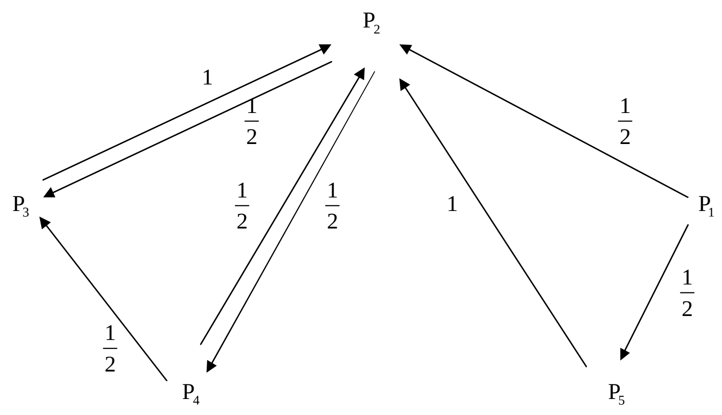
Les suites (c_n) et (s_n) divergent vers $+\infty$. La suite $\left(\dfrac{s_n}{c_n}\right)$ converge vers $1,3$.

Les suites (c_n) et (s_n) tendent vers $+\infty$. La suite $\left(\dfrac{s_n}{c_n}\right)$ converge vers $1,3$.

$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $\dfrac{s_n}{c_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,3$

10 Comment un moteur de recherche classe les pages web

Graphe probabiliste à refaire en complétant avec les probabilités



1°) La page qui semble la plus pertinente est la page P_2.

2°) La matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste est :

$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5$

$$A = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3°)

a) On suppose que l'utilisateur est situé au départ sur la page P_1 donc l'état initial est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pages	**Après 0 clic**	**Après 1 clic**	**Après 2 clics**	**Après 5 clics**	**Après 10 clics**
P_1	1	0	0	0	0
P_2	0	0,5	0,5	0,40625	0,44726562…
P_3	0	0	0,25	0,34375	0,333007812…
P_4	0	0	0,25	0,25	0,21976526…
P_5	0	0,5	0	0	0

On calcule AX_0 (après un clic), A^2X_0 (après deux clics), A^4X_0 (après cinq clics), A^9X_0 (après 9 clics) à l'aide de la calculatrice.

Plus d'influence

b) Après 10 clics, la page qui apparaît la plus pertinente est la page 2.

c) On fait un très grand nombre d'essais avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Après 50 clics, en effectuant les calculs, on obtiendrait la distribution suivante : $X_{50} = A^{50}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44444... \\ 0,33333... \\ 0,22222... \\ 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc conjecturer que $X_n = A^nX_0$ tend vers la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On obtient aisément les fractions grâce à la commande de la calculatrice permettant de passer d'un nombre décimal à une fraction (MATH Frac).

4°) Si on suppose que l'utilisateur est situé initialement sur la page 2, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on observe la même limite (on retrouve S).

Idem pour les autres positions.

5°) On observe tout d'abord que tous les coefficients de S sont positifs ou nuls et que leur somme vaut 1.

On vérifie ensuite par le calcul que $AS = S$.

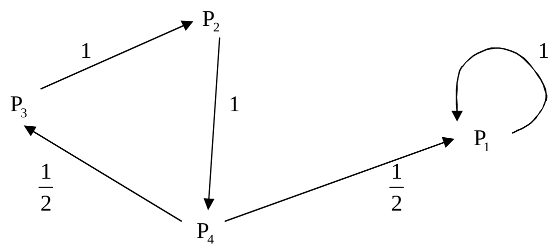
$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \end{pmatrix} = S$$

On obtient le classement des pages internet par page ranking (pertinence des pages) :

P1 : 0 % ; P2 : 33,3 % ; P3 : 33,3 % ; P4 : 22,2 % ; P4 : 0 %

$\boxed{11}$ Amélioration du procédé de classement du moteur de recherche

Graphe probabiliste (à refaire)



Ce graphe probabiliste ne sera pas utilisé sous cette forme dans la suite de l'exercice.

1°) **Pour un utilisateur situé au départ page 1, que se passe-t-il ?**

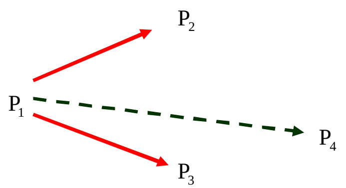
Si un utilisateur est situé en page 1, il reste en page 1 (« trou noir »).

2°)

Le 14-4-2016

Caroline Quériaud (TS1)

L'algorithme donné dans l'exercice $\boxed{11}$ des graphes probabilistes ne correspond pas au schéma au-dessus, il n'a presque aucun rapport.
Elle m'a proposé le schéma suivant que je reproduis tel quel.



85 %

15 %

Pour le graphe probabiliste du début, la matrice de transition en colonnes s'écrit : $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Les coefficients $\frac{1}{2}$ proviennent du fait qu'il y a équiprobabilité des choix.

$0{,}85AX_n$ est la matrice colonne dont les éléments sont les probabilités qu'il suive un des liens.

0,15C est la matrice colonne dont les éléments donnent la probabilité de choisir une page au hasard.

On a donc $X_{n+1}=0{,}85AX_n+0{,}15C$.

Un phénomène d'évolution :

Dans cet exercice, ce phénomène d'évolution se modélise par une relation de la forme $X_{n+1}=AX_n+B$ où A est une matrice carrée de taille *p*, B une matrice colonne de dimension *p* et (X_n) une suite vecteurs colonne de dimension *p*.

3°)
Comme on n'a pas de formule explicite, on est obligé d'utiliser l'une des deux méthodes indiquées dans l'énoncé.
Le plus simple est d'utilise la commande « Rép » / « Ans » de la calculatrice.
On rentre d'abord les matrices 0,85A et 0,15C.
Ensuite c'est un peu long…

Pages	Après 0 clic	Après 1 clic	Après 2 clics	Après 5 clics	Après 10 clics
P_1	1	0,8875	0,8078	0,6946	0,6515
P_2	0	0,0375	0,0694	0,1042	0,1178
P_3	0	0,0375	0,0534	0,0834	0,0950
P_4	0	0,0375	0,694	0,1178	0,1363

4°)

$X=0{,}85AX+0{,}15C \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow X-0{,}85AX=0{,}15C$

$\Leftrightarrow (I_4-0{,}85A)X=0{,}15C \quad (1')$

I_4 est la matrice diagonale avec que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs ; on a $I_4X=X$.

On a : $I_4-0{,}85A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-0{,}85\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0 & 0 & -0{,}425\\ 0 & 1 & -0{,}85 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -0{,}425\\ 0 & -0{,}85 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On vérifie à l'aide de la calculatrice que la matrice $I_4-0{,}85A$ est inversible.

$(1') \Leftrightarrow X=0{,}15(I_4-0{,}85A)^{-1}C$

À l'aide la calculatrice, on trouve que les coefficients de C sont environs égaux à ceux de la matrice $\begin{pmatrix} 0,6445 \\ 0,1197 \\ 0,0967 \\ 0,1392 \end{pmatrix}$

(valeurs arrondies aux dix-millièmes).

En valeurs exactes, on a : $C = \begin{pmatrix} \dfrac{7\,145}{11\,087} \\ \dfrac{5\,307}{44\,348} \\ \dfrac{4287}{44\,348} \\ \dfrac{3\,087}{22\,174} \end{pmatrix}$ (obtenu grâce à un logiciel de calcul).

L'état stable X associé à l'algorithme définit la pertinence des pages associées à une information comme dans **l'exercice précédent**, il s'ensuit un classement des pages (phrase à reprendre). En pratique, la recherche de l'état stable ne se fait pas par la résolution de l'équation matricielle (les dimensions trop importantes rendent les calculs trop longs). On approche l'état stable très rapidement par une suite de matrices colonnes construites à partir de l'algorithme comme dans cet exercice.

Les algorithmes de classement des pages web sont différents pour chaque moteur de recherche.

12

Objectif : observer diverses évolutions de populations sur le long terme en fonction d'un paramètre de prédation

1°) **Mathématisons la situation.**

x_n : population de chouettes

y_n : population d'écureuils

$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

La matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -p & 1,2 \end{pmatrix}$ ($p \in \mathbb{R}_+^*$).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$

$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec

x_0 : nombre initial de chouettes

y_0 : nombre initial d'écureuils

On a la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.

On a donc $U_n = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -p & 1,2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

1°)

a) $p = 0,325$

$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,325 & 1,2 \end{pmatrix}$

Grâce à la calculatrice, on observe que le rapport du nombre d'écureuils sur le nombre de chouettes semble tendre avers le nombre 2,166666... soit $2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$.

(On pourrait aussi calculer $U_{100} = A^{100}U_0$ avec la calculatrice…).

b) $p = 0,5$

Les populations semblent décroître toutes les deux et tendre vers 0.
On peut dire qu'il semble que l'évolution tende vers l'extinction des deux espèces.

c) **Cherchons *p* de telle sorte que les deux populations tendent vers des niveaux constants.**

Il n'y a pas d'autres moyens que de faire une recherche par tâtonnements.
Le coefficient de prédation qui permet d'atteindre des niveaux constants est 0,4.

3°)

a) **Cherchons la valeur de *p* pour laquelle il existe un état stable S.**

On pose $S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels positifs ou nuls tels que $a + b = 1$.

On cherche p tel qu'il existe S vérifiant $S = AS$ (1). On peut aussi écrire $AS = S$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -p & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4a + 0,3b \\ b = -ap + 1,2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4a + 0,3b \\ b = -ap + 1,2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a = 0,3b \\ -0,2b = -ap \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - b = \dfrac{b}{2} & \text{(e)} \\ b = \dfrac{ap}{0,2} & \text{(e')} \end{cases} \qquad (\text{car } a = 1 - b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{ap}{0,2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{1}{3}p}{0,2} \end{cases} \qquad \left(\text{car } a = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2}{3} \\ p = 0,4 \end{cases}$$

Le système admet un état stable si et seulement si $p = 0,4$.

Dans ce cas, l'état stable correspond aux proportions suivantes : $\dfrac{1}{3}$ de chouettes ; $\dfrac{2}{3}$ d'écureuils.

Cette valeur corrobore notre conjecture du 2°) c), ce que nous avions fait sur tableur.

(P_n) converge vers l'état stable.

13

Objectif : Découvrir un modèle important non linéaire. Étudier le problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.

Modèle proie prédateur discrétisé

1°) a)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} T_{n+1} = 1,1T_n - 0,001T_n \times B_n \\ B_{n+1} = 0,95B_n + 0,0005T_n \times B_n \end{cases}$$

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 10 % est de 1,1.
Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 5 % est 0,95.
Lors des rencontres entre truites et brochets, 0,1 % des truites sont dévorées et le nombre de brochets correspond à 50 % du nombre de truites dévorées.

La dernière phrase se traduit par $0,001T_n \times 0,5B_n = 0,0005T_nB_n$.

b) En l'absence de prédateurs, $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1} = 1,1T_n$.

Ainsi, la suite (T_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,1$.

La suite (T_n) est donc strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$ car $T_0 > 0$ et $1,1 > 1$.

c) En l'absence de proie, $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} = 0,95B_n$.

(B_n) est une suite géométrique de raison $q' = 0,95$.

La suite (B_n) est donc strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = 0$ car $-1 < 0,95 < 1$.

d)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} T_{n+1} - T_n = 1,1T_n - 0,001T_n \times B_n - T_n \\ B_{n+1} - B_n = 0,95B_n + 0,0005T_n \times B_n - B_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_{n+1} - T_n = T_n(0,1 - 0,001B_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-0,05 + 0,0005T_n) \end{cases}$$

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?
On effectue un raisonnement par « analyse-synthèse » ou « condition nécessaire-condition suffisante ».

Condition nécessaire :

Si les suites (T_n) et (B_n) sont constantes, alors nécessairement $T_1 = T_0$ et $B_1 = B_0$.

Cela donne donc $T_1 - T_0 = 0 \ (a)$ et $B_1 - B_0 = 0 \ (b)$.

Les égalités $T_{n+1} - T_n = T_n(0,1 - 0,001B_n)$ et $B_{n+1} - B_n = B_n(-0,05 + 0,0005T_n)$ valables quel que soit l'entier naturel n donnent donc pour $n = 0$ les égalités $T_1 - T_0 = T_0(0,1 - 0,001B_0)$ et $B_1 - B_0 = B_0(-0,05 + 0,0005T_0)$.

Compte tenu des égalités (a) et (b), $T_0(0,1 - 0,001B_0) = 0$ et $B_0(-0,05 + 0,0005T_0) = 0$.

Or T_0 et B_0 sont non nuls (même strictement positifs), donc $0,1 - 0,001B_0 = 0$ et $-0,05 + 0,0005T_0 = 0$.

Ainsi, on obtient $B_0 = \dfrac{0,1}{0,001} = 100$ et $T_0 = \dfrac{0,05}{0,0005} = 100$.

Condition suffisante :

On suppose que $B_0 = 100$ et que $T_0 = 100$.

On démontre alors par récurrence que les suites (T_n) et (B_n) sont constantes.

Conclusion :

Pour que les suites (T_n) et (B_n) soient constantes, il faut et il suffit que $B_0 = 100$ et que $T_0 = 100$.

2°) a) On utilise la calculatrice.

b) L'évolution est oscillante avec déphasage.
On observe une convergence vers un état d'équilibre correspondant à 100 truites et 100 brochets.
Cela se voit non seulement dans le tableau mais aussi sur les deux graphique notamment celui qui représente les couples $(T_n\,;B_n)$ (enroulement autour du point de coordonnées $(100\,;100)$).

c)
Lorsque le nombre de brochets augmente, le nombre de truites diminue.
Lorsque le nombre de brochets diminue, le nombre de truites augmente.
Quand le nombre de truites augmente, les brochets ayant plus de nourriture ont un effectif croissant, mais mangent alors plus de truites. Donc le nombre de truites diminue, donc les brochets manquent de nourriture, alors leur effectif diminue et le nombre de truites augmente, ainsi de suite.

d) Si l'on modifie les données initiales, on remarque le même type d'évolution mais avec des minima et maxima locaux qui diffèrent.
L'évolution n'est pas vraiment influencée par les conditions initiales.

3°) a) On pose $U = \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}$.
On utilise la question 1°) d). à enlever

On cherche à résoudre le système $\begin{cases} T = 1{,}1T - 0{,}001T \times B & (1) \\ B = 0{,}95B + 0{,}0005T \times B & (2) \end{cases}$ sachant que B et T sont non nuls.

1ère méthode :

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(0{,}1 - 0{,}001B) = 0 & (1') \\ B(-0{,}05 + 0{,}0005T) = 0 & (2') \end{cases}.$$

$(1') \Leftrightarrow T = 0$ ou $0{,}1 - 0{,}001B = 0$
$\Leftrightarrow T = 0$ ou $B = 100$

$(2') \Leftrightarrow B = 0$ ou $-0{,}05 + 0{,}0005T = 0$
$\Leftrightarrow B = 0$ ou $T = 100$

La solution du système formée de réels non nuls est $(100\,;100)$.

Donc les réels cherchés sont $B = 100$ et $T = 100$.

$$U = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

2e méthode :

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1{,}1 - 0{,}001B \\ 1 = 0{,}95 + 0{,}0005T \end{cases}$$ (on simplifie par T et B qui sont supposés non nuls)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 100 \\ B = 100 \end{cases}$$

b) **Démontrons que (1) peut être approximé par (2).**

$$(1)\ \begin{cases} T_{n+1} - T_n = T_n(0{,}1 - 0{,}001B_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-0{,}05 + 0{,}0005T_n) \end{cases}$$

On a : $t_n = T_n - 100$ et $b_n = B_n - 100$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t_{n+1} + 100 - t_n - 100 = (t_n + 100)\left[0{,}1 - 0{,}001(b_n + 100)\right] \\ b_{n+1} + 100 - b_n - 100 = (b_n + 100)\left[-0{,}05 + 0{,}0005(t_n + 100)\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_{n+1} - t_n = (t_n + 100)(-0{,}001b_n) \\ b_{n+1} - b_n = (b_n + 100)(0{,}0005t_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0{,}1b_n - 0{,}001b_nt_n \\ b_{n+1} = b_n + 0{,}05t_n + 0{,}0005b_nt_n \end{cases}$$

On peut écrire $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = b_n + 0{,}05t_n \end{cases}$ au voisinage du point d'équilibre.

On va considérer que les termes b_nt_n sont négligeables au voisinage du point d'équilibre.

c) $V_n = \begin{pmatrix} t_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 \\ 0{,}05 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad AV_n = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 \\ 0{,}05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_n - 0{,}1b_n \\ b_n + 0{,}05t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = A^nV_0$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = AV_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = A^nV_0$ (propriété du cours).

d) **En calculant les puissances successives de la matrice A avec la calculatrice, conforter ou invalider les conjectures émises.**

On a $T_0 = 210$ et $B_0 = 50$.

On a donc $t_0 = \mathrm{T}_0 - 100 = 110$ et $b_0 = \mathrm{B}_0 - 100 = -50$.

Donc $\mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} 110 \\ -50 \end{pmatrix}$.

d) D'après la calculatrice, on a : $u_{20} = \begin{pmatrix} 75 \\ -0{,}98 \end{pmatrix}$, $u_{100} = \begin{pmatrix} 72{,}7 \\ -39{,}4 \end{pmatrix}$ et $u_{200} = \begin{pmatrix} 116{,}7 \\ 10{,}1 \end{pmatrix}$.
Donc : $\mathrm{U}_{20} = \begin{pmatrix} 175 \\ 99{,}02 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}_{100} = \begin{pmatrix} 172{,}7 \\ 60{,}6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_{200} = \begin{pmatrix} 216{,}7 \\ 110{,}1 \end{pmatrix}$.

Attention qu'ensuite, pour comparer avec les résultats obtenus dans la partie, on doit ajouter 100 à chacune des deux valeurs.

On étudie ici l'évolution autour du point d'équilibre.

Alfred Lotka est né en 1880 à Lviv, en Ukraine. De parents américains, il généralisera les travaux de Pierre-François Verhulst et Vito Volterra sur la dynamique des populations.
Fidèle partisan de l'URSS, il fut passé à la chaise électrique par la CIA.

14

a_n : nombre de dizaines de coccinelles
b_n : nombre de dizaines de pucerons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}8b_n \\ b_{n+1} = -0{,}1a_n + 1{,}2b_n \end{cases}$$

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Attention, il s'agit de nombres de dizaines de pucerons et de coccinelles.

1°) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ [matrice carrée d'ordre 2].

La matrice A est appelée « matrice proies-prédateurs ».

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{AU}_n = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & 1{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4a_n + 0{,}8b_n \\ -0{,}1a_n + 1{,}2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{U}_{n+1}$$

2°) De nouveau, il faut bien faire attention : on compte en nombre de dizaines.

On a : 1 coccinelle $= 0{,}1 \times 10$.

On peut donc écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}8b_n + 0{,}1 \\ b_{n+1} = -0{,}1a_n + 1{,}2b_n \end{cases}$.

Cette deux égalités permettent d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3°) **Déterminons l'état stable S.**

On cherche la matrice S d'ordre 2 telle que $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{C}$ (1).

1[ère] méthode :

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{S} - \mathrm{AS} = \mathrm{C}$

$\Leftrightarrow \mathrm{I}_2\mathrm{S} - \mathrm{AS} = \mathrm{C}$ (rappel : $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [matrice identité d'ordre 2])

Attention, pour pouvoir factoriser le membre de gauche, on écrit bien $\mathrm{I}_2\mathrm{S}$ et non SI_2.
Il y a vraiment un ordre.

$\Leftrightarrow (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})\mathrm{S} = \mathrm{C}$

$$\mathrm{I}_2 - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = 0{,}6 \times (-0{,}2) - 0{,}1 \times (-0{,}8) = -0{,}12 + 0{,}08 = -0{,}04$$

$\det(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) \neq 0$ donc $\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$ est inversible.

$$(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} = -\frac{1}{0{,}04}\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = -25\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ 2{,}5 & -15 \end{pmatrix}$$

On vérifie cet inverse à la calculatrice.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{S} = (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{C}$ (multiplication des deux membres par $(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1}$ à gauche)

$$\Leftrightarrow \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ 2{,}5 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

2[e] méthode :

On pose $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Attention, on n'ajoute pas la condition $a + b = 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ -0,1 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4a + 0,8b + 0,1 \\ b = -0,1a + 1,2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a - 0,8b = 0,1 \\ 0,1a - 0,2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 8b = 1 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0,25 \\ a = 0,5 \end{cases}$$

On peut observer la convergence vers l'état stable à l'aide de la calculatrice.

15

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,7b_n \\ b_{n+1} = -0,2a_n + 1,3b_n \end{cases}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

1°) On pose $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ -0,2 & 1,3 \end{pmatrix}$.

La matrice A est appelée « matrice proies-prédateurs ».

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad AU_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ -0,2 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n + 0,7b_n \\ -0,2a_n + 1,3b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n + C$ avec $C = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$

3°) **Déterminons l'état stable S.**

On cherche une matrice S carrée d'ordre 2 telle que $S = AS + C \quad (1)$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$(1) \Leftrightarrow (I_2 - A)S = C$ [rappel : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est la matrice identité d'ordre 2]

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,7 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix}$$

$$\det(I_2 - A) = 0,7 \times (-0,3) - 0,2 \times (-0,7) = -0,21 + 0,14 = -0,07$$

$\det(I_2 - A) \neq 0$ donc $I_2 - A$ est inversible.

$$(I_2 - A)^{-1} = -\frac{1}{0,07} \begin{pmatrix} -0,3 & 0,7 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = -\frac{100}{7} \begin{pmatrix} -0,3 & 0,7 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \frac{10}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow S = (I_2 - A)^{-1} C$$

$$\Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{30}{7}q \\ \frac{20}{7}q \end{pmatrix}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

On pose $S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ -0,2 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,3a + 0,7b + q \\ b = -0,2a + 1,3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

4°) $\frac{20}{7}q = 1000 \Leftrightarrow q = 350$

Il faut administrer 350 mg de A chaque jour pour que B se stabilise autour de 1000 mg.

$$\frac{30}{7} \times 350 = 1500$$

Il y a alors 1500 mg.l^{-1} de A dans le sang.

16

a_n : proportion de l'espèce A l'année n
b_n : proportion de l'espèce B l'année n

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n - 0,2b_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,4a_n + 0,7b_n + 0,1 \end{cases}$$

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Partie A

1°) **Déterminons … .**

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$ [matrice carrée d'ordre 2] et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ [matrice colonne].

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{AU}_n + \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7a_n - 0,2b_n + 0,07 \\ -0,4a_n + 0,7b_n + 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{U}_{n+1}$$

2°) **Déterminons l'état stable S.**

On cherche une matrice colonne S à deux lignes (donc de format 2×1) qui vérifie l'égalité $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{C}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{S} - \mathrm{AS} = \mathrm{C}$

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{I_2S} - \mathrm{AS} = \mathrm{C}$

$(1) \Leftrightarrow (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})\mathrm{S} = \mathrm{C}$ avec $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{I}_2 - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}) = 0,3\times0,3 - 0,4\times0,2$$
$$= 0,01$$

Donc $\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$ est inversible.

$$(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{0,01}\begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$
$$= 100\begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -40 & 30 \end{pmatrix}$$

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{S} = (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{C}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -40 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 30\times0,07 - 20\times0,1 \\ -40\times0,07 + 30\times0,1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Partie B

1°)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{S}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{S}$$
$$= \mathrm{AU}_n + \mathrm{C} - (\mathrm{AS} + \mathrm{C})$$
$$= \mathrm{A}(\mathrm{U}_n - \mathrm{S})$$
$$= \mathrm{AV}_n$$

La suite (V_n) est géométrique de « raison » A et de premier terme V_0.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$$

$$\mathrm{U}_n - \mathrm{S} = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S})$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$.

2°) $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ (proportions des espèces A et B de colza en 2012)

En 2013, $\mathrm{U}_1 = \mathrm{A}(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$
$$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,23 \end{pmatrix}$$

En 2016, $\mathrm{U}_4 = \mathrm{A}^4(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$

$$=\begin{pmatrix}0{,}11625\\0{,}18433\end{pmatrix}$$

En faisant (à l'aide de la calculatrice) les calculs pour des valeurs de n de plus en plus grandes, on peut conjecturer que (U_n) converge vers l'état stable $\mathrm{S}=\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix}$.

17

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}x_{n+1}=0{,}7x_n+0{,}6y_n\\y_{n+1}=-0{,}2x_n+1{,}5y_n\end{cases}$$

$$\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

1°) On pose la matrice carrée $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}6\\-0{,}2 & 1{,}5\end{pmatrix}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\mathrm{AU}_n=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}6\\-0{,}2 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7x_n+0{,}6y_n\\-0{,}2x_n+1{,}5y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\mathrm{U}_{n+1}$$

2°) **Déterminons la matrice C telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{MU}_n+\mathrm{C}$.**

Rappel :

x_n : nombre de dizaines d'animaux de l'espèce A le n-ième jour.

y_n : nombre de dizaines d'animaux de l'espèce B le n-ième jour.

Chaque jour, les scientifiques retirent dix animaux de l'espèce B de ce milieu fermé : ils retirent donc une dizaine d'animaux de l'espèce B ce qui explique le – 1.

Grâce à l'information de l'énoncé, $\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}x_{n+1}=0{,}7x_n+0{,}6y_n\\y_{n+1}=-0{,}2x_n+1{,}5y_n-1\end{cases}$.

On pose $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\mathrm{AU}_n+\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}6\\-0{,}2 & 1{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\mathrm{U}_{n+1}$$

3°) **Déterminons l'état stable S.**

On cherche la matrice S carrée d'ordre 2 telle que $\mathrm{S}=\mathrm{AS}+\mathrm{C}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow(\mathrm{I}_2-\mathrm{A})\mathrm{S}=\mathrm{C}$ avec $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\mathrm{S}=(\mathrm{I}_2-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{C}$ [On a pris soin de vérifier que $\mathrm{I}_2-\mathrm{A}$ est inversible.]

$\Leftrightarrow\mathrm{S}=\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$

L'état stable correspond à 200 animaux de l'espèce A et 100 animaux de l'espèce B.

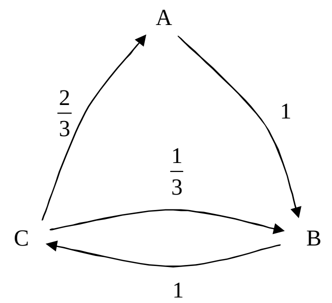
18

3 enfants avec un ballon

On n'a pas besoin de l'état initial dans les questions 1°) et 2°).

1°)

On représente la situation par le graphe probabiliste suivant :



La matrice de transition en colonnes associée à cette situation (en prenant les sommets dans l'ordre A-B-C) est

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\1 & 0 & \frac{1}{3}\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2°) **Conjecturons la limite de la suite (M^n).**

Avec la calculatrice, on obtient l'affichage suivant pour M^{99} :

$$\begin{pmatrix}0{,}2500000012 & 0{,}2499999988 & 0{,}2500000003\\0{,}3750000005 & 0{,}3750000007 & 0{,}374999999\\0{,}3749999953 & 0{,}3750000005 & 0{,}3750000007\end{pmatrix}.$$

On peut donc conjecturer que $\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

L'expression de M^n obtenue avec dcode est assez compliquée.

3°) **Interprétons concrètement le résultat précédent.**

Notons $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice donnant l'état probabiliste au bout de n étapes.

On notera que la matrice $\mathrm{P}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente l'état initial.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_n = \mathrm{M}^n \mathrm{P}_0$

Donc $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0) \\ \frac{3}{8}(a_0+b_0+c_0) \\ \frac{3}{8}(a_0+b_0+c_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ car $a_0+b_0+c_0=1$.

L'état initial n'a pas d'influence sur l'état asymptotique.

La matrice $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ est l'état stable (on peut d'ailleurs aisément le vérifier par le calcul : $\mathrm{MS} = \mathrm{S}$).

À long terme :

- Alice aura 1 chance sur 4 d'avoir le ballon ;

- Bernard et Claude auront 3 chances sur 8 d'avoir le ballon.

On peut aussi retrouver l'état stable par le calcul.

On pose $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels positifs ou nuls tels que $a+b+c=1$.

$$\mathrm{MS} = \mathrm{S} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}c \\ b = a + \frac{1}{3}c \\ c = b \end{cases}$$

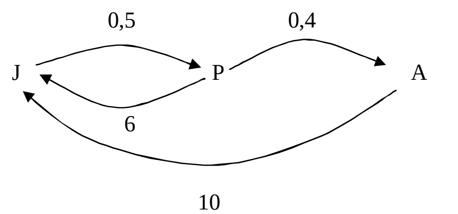
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{8} \\ c = \frac{3}{8} \end{cases}$$

L'état stable est $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

19 Modèle de Leslie

Objectif : découvrir des modèles utilisés dans la dynamique de population. Étude à long terme.

1°)



Attention, il ne s'agit pas d'un graphe probabiliste, mais d'un graphe pondéré !
En effet, on voit que les pondérations ne sont pas toutes comprises entre 0 et 1.
Cela n'est pas gênant du tout. On peut quand même faire la matrice de transition du graphe pondéré.

2°) La matrice de transition en colonnes associée au graphe pondéré en prenant les états dans l'ordre J-P-A est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$.

3°) Donner grâce à la calculatrice le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne donnant l'état de la population au bout de n années (dans l'ordre juvénile, pré-adultes, adultes).

D'après les données de l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Comme $2027 = 2015 + 12$, il faut calculer X_{15}.

$$X_{15} = M^{15} \times X_0 = \begin{pmatrix} 6993540 \\ 1746205 \\ 350036 \end{pmatrix} \quad \text{(on utilise la calculatrice)}$$

Les coefficients de la matrice X_{15} sont des entiers naturels. Il ne s'agit pas de valeurs arrondies.

En 2027 il y a donc :
- 350 036 adultes ;
- 1 746 205 pré-adultes ;
- 6 993 540 juvéniles.

Donc 9 089 801 rongeurs au total.
4°)

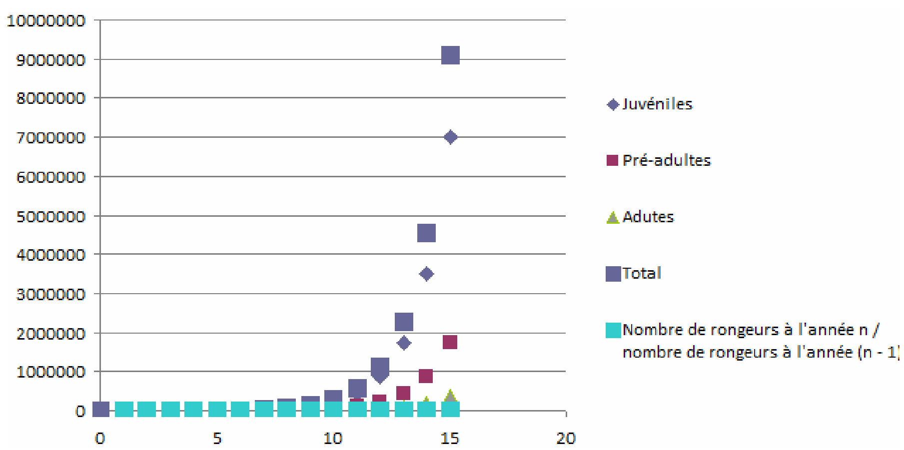
a) Feuille de calcul

Année n	Juvéniles	Pré-adultes	Adutes	Total	Nombre de rongeurs à l'année n / nombre de rongeurs à l'année $(n-1)$
0	30	50	50	130	
1	800	15	20	835	6,42307692
2	290	400	6	696	0,83353293
3	2460	145	160	2765	3,97270115
4	2470	1230	58	3758	1,35913201
5	7960	1235	492	9687	2,5777009
6	12330	3980	494	16804	1,73469598
7	28820	6165	1592	36577	2,17668412
8	52910	14410	2466	69786	1,90792028
9	111120	26455	5764	143339	2,05397931
10	216370	55560	10582	282512	1,97093603
11	439180	108185	22224	569589	2,01615861
12	871350	219590	43274	1134214	1,99128494
13	1750280	435675	87836	2273791	2,00472838
14	3492410	875140	174270	4541820	1,99746591
15	6993540	1746205	350056	9089801	2,0013565

b) On retrouve avec le tableur les résultats obtenus à la question 3°) par calcul de matrices.
On fait donc un copié-collé des résultats obtenus.
En 2027 :
- 350 056 adultes ;
- 1 746 205 pré-adultes ;
- 6 993 540 juvéniles.

Donc 9 089 801 rongeurs au total.

c)



Il s'agit d'une croissance exponentielle.

Il semblerait que pour les quatre catégories on ait une croissance exponentielle.

d) Au bout de 14-15 ans (estimation faite grâce au tableau obtenu sur tableur), la population totale semble être multipliée par 2 d'une année sur l'autre.

Ces résultats peuvent également être déterminés à la calculatrice.
En mode "suite", on tape "tel quel" :

$u(n) = 10 * w(n-1) + 6 * v(n-1)$

$u(n\text{Min}) = \{30\}$

$v(n) = 0{,}5 \times u(n-1)$

$v(n\text{Min}) = \{50\}$

$w(n) = 0{,}4 * v(n-1)$

$w(n\text{Min}) = \{50\}$

On ne peut pas descendre plus bas pour rentrer d'autres suites donc la somme des individus ainsi que les rapports ne peuvent être trouvés qu'au tableur – à moins de les calculer "à la main".

20

Thèmes : Oiseaux migrateurs/taux de migration

Version changée en avril-mai 2020

1°)

On définit les états suivants.

État 1 : « L'oiseau est dans la région nord »
État 2 : « L'oiseau est dans la région sud ».

Taux de migration de 20 % et 10 % donnent les probabilités de transition 0,2 et 0,1.
On calcule les compléments à 1 pour trouver 0,8 et 0,9.

Faire le graphe probabiliste.

La matrice de transition en colonnes est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\0,1 & 0,8\end{pmatrix}$.

2°)

On commence par calculer A^n.

On applique la formule donnée dans l'énoncé pour $a=0,1$ et $b=0,2$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\frac{1}{0,3}\begin{pmatrix}0,2 & 0,2\\0,1 & 0,1\end{pmatrix}+\frac{(1-0,1-0,2)^n}{0,1+0,2}\begin{pmatrix}0,1 & -0,2\\-0,1 & 0,2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}+\frac{0,7^n}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

On écrit A^n soit sous cette forme (somme de deux matrices) soit sous la forme d'une seule matrice.

• On cherche la distribution des proportions au bout de n mois.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{AP}_n$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{P}_0$.

D'après l'énoncé, $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ puisque l'énoncé dit que, initialement, un quart de la population vit dans la région nord.

On obtient aisément P_n en fonction de n.

• On cherche la distribution limite.

On cherche d'abord la limite de A^n.

On reprend l'égalité $\mathrm{A}^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}+\frac{0,7^n}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

On a $-1<0,7<1$ donc $(0,7)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

$$\mathrm{A}^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{L}$$

On vérifie que l'on a une matrice stochastique en colonnes avec le même nombre sur la première ligne et le même nombre sur la deuxième ligne.
Il s'agit d'un résultat parfaitement confirme au cours sur les limies de matrices stochastiques en colonnes.

On a donc $\mathrm{P}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{S}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

On vérifie dans peine que S est un état stable.

Donc au bout d'une grand nombre de mois, on aura : $\begin{cases}N_n=\frac{2}{3}\\S_n=\frac{1}{3}\end{cases}$ soit $\frac{2}{3}$ des oiseaux au nord et $\frac{1}{3}$ au sud.

21

Une urne A contient 2 boules blanches et une urne B contient 4 boules rouges.
On procède au tirage aléatoire simultané d'une boule de chaque urne et la boule extraite est changée d'urne.

1°)

état 1 ⟶ état 1 pas possible

état 1 ⟶ état 2 toujours vrai

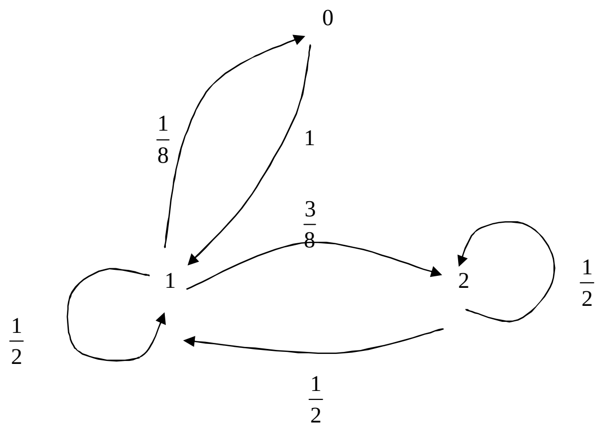
état 1 ⟶ état 3 pas possible

état 2 ⟶ état 1
Pour passer de l'état 2 à l'état 1, il faut tirer une boule noire dans A et une boule blanche dans B
La probabilité de passage est donc $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.
On peut éventuellement faire un rabre de probabilité.

état 2 ⟶ état 2
Pour passer de l'état 2 à l'état 2, il faut tirer une boule blanche dans A et une boule blanche dans B ou une boule noire dans A et une boule noire dans B.
La probabilité de passage est donc $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.
On peut éventuellement faire un arbre de probabilités.

état 2 ⟶ état 3
Pour passer de l'état 2 à l'état 3, il faut tirer une boule blanche dans A et une boule noire dans B
La probabilité de passage est donc $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

Il s'agit d'un problème similaire à celui des urnes d'Ehrenfest.
Un exercice similaire a été posé au bac en 2016.



On ne met pas d'arêtes reliant les sommets 1 et 2, ni de boucle sur le sommet 2.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2°) À l'aide du site dcode, déterminer la distribution de probabilités au bout de n étapes

● Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice colonne donnant la distribution de probabilités au n-ième tirage.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{MP}_n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$.

D'après l'énoncé, $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de dcode, on observe que l'on peut écrire :

$$\mathrm{M}^n=\mathrm{L}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\mathrm{U}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\mathrm{V} \text{ avec } \mathrm{L}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{8}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix},\ \mathrm{U}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \ldots & \ldots \\ -\frac{6}{5} & \ldots & \ldots \\ \frac{3}{5} & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{V}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \ldots & \ldots \\ \frac{2}{3} & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

● On cherche la distribution limite.

$$\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{8}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

On obtient alors aisément $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que c'est un état stable.

3°) **Simulation**

On se propose d'écrire une fonction Python `exp(n)` qui prend pour argument un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et qui renvoie une liste donnant le nombre de boules rouges dans l'urne A au cours de n tirages successifs.
On utilisera les fonctions append et remove.

Proposition d'Auguste Charpentier le mardi 30-3-2021 :

Pour une explication détaillée sur l'affichage en tableau, la documentation est disponible ici :
https://docs.python.org/3/library/string.html#format-examples

```
from random import choice

def exp(n):
    a = ["B", "B"]
    b = ["N", "N", "N", "N"]
    print("{:<30}".format("Urne A"), end="")
    print("{:>30}".format("Urne B"))
    print("="*60)

    for i in range(n):
    # On pioche un élément de chaque liste
    tirage_a = choice(a)
    tirage_b = choice(b)

    # On ajoute cet élément à l'un et le retire à l'autre
    a.remove(tirage_a)
    b.append(tirage_a)
    b.remove(tirage_b)
    a.append(tirage_b)

    # On affiche le résultat
    # ", ".join = afficher chaque élément de la liste séparé par une
virgule
    affichage_a = ", ".join(a) + " (" + str(a.count("B")) + " blanches)"
    affichage_b = ", ".join(b) + " (" + str(b.count("B")) + " blanches)"
    # Affichage décalé à gauche ou à droite
    print("{:<30}".format(affichage_a), end="")
    print("{:>30}".format(affichage_b))

    return a, b
```

Le 24-3-2021

A : 2 blanches 1-2
B : 4 rouges 3-4-5-6

```
A=[1,1]
B=[2,2,2,2]
for _ in range(1,n+1) :
    x=choice(A)
    y=choice(B)
    A.remove(x)
    B.remove(y)
    A.append(y)
    B.append(x)
    U=[a for x in A if x<=2]
    u=len(U)
```


```
from random import choice

def exp(n):
    a = ["B", "B"]
    b = ["N", "N", "N", "N"]
    print("{:<30}".format("Urne A"), end="")
    print("{:>30}".format("Urne B"))
    print("="*60)

    for i in range(n):
    # On pioche un élément de chaque liste
    tirage_a = choice(a)
    tirage_b = choice(b)

    # On ajoute cet élément à l'un et le retire à l'autre
    a.remove(tirage_a)
    b.append(tirage_a)
    b.remove(tirage_b)
    a.append(tirage_b)

    # On affiche le résultat
    # ", ".join = afficher chaque élément de la liste séparé par une
virgule
    affichage_a = ", ".join(a) + " (" + str(a.count("B")) + " blanches)"
    affichage_b = ", ".join(b) + " (" + str(b.count("B")) + " blanches)"
    # Affichage décalé à gauche ou à droite
    print("{:<30}".format(affichage_a), end="")
    print("{:>30}".format(affichage_b))

    return a, b
```


$\boxed{\textbf{22}}$

1°) $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\qquad V=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

Vérifions que $M=2U-V$.

$$2U-V=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{M}$$

$$\mathrm{U}^2 = \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{U}$$

$\mathrm{V}^2 = \mathrm{V}$

$$\mathrm{UV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{VU} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire M^n pour n entier naturel quelconque.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = (2\mathrm{U} - \mathrm{V})^n$

$= (2\mathrm{U})^n + (-\mathrm{V})^n$ (on obtient cette égalité grâce à la formule du binôme de Newton car les produits $(2\mathrm{U})(-\mathrm{V})$ et $(-\mathrm{V})(2\mathrm{U})$ sont tous les deux égaux à la matrice nulle)

$= 2^n \mathrm{U}^n + (-1)^n \mathrm{V}^n$

Or $\mathrm{U}^2 = \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}^2 = \mathrm{V}$ donc les matrices U et V sont idempotentes. On en déduit que leurs puissances d'exposants entiers naturels supérieurs ou égaux à 1 sont toutes égales à U et V.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{M}^n = 2^n \mathrm{U} + (-1)^n \mathrm{V}$.

On peut vérifier que cette expression fonctionne bien pour $n = 0$ car $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3$ d'une part et $\mathrm{U} + \mathrm{V} = \mathrm{I}_3$ (simple calcul) d'autre part.

On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = 2^n \mathrm{U} + (-1)^n \mathrm{V}$.

On peut expliciter les coefficients de M^n mais ce n'est pas utile pour la suite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2°)

On étudie une marche aléatoire sur un triangle.

● Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition T en colonnes associée.

On définit les états :
« La fourmi est en A » (état 1) ;
« La fourmi est en B » (état 2) ;
« La fourmi est en C » (état 3).

graphe à faire

La matrice de transition T en colonnes associée est $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

● Déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes.

La matrice de l'état probabiliste à l'état 0 : $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{T}^5\times\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}\dfrac{5}{16}\\\dfrac{11}{32}\\\dfrac{11}{32}\end{pmatrix}$$

La probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes est de $\dfrac{11}{32}$.

• À l'aide de la question 1°), déterminer la distribution de probabilités après *n* secondes et la distribution limite.

On a $\mathrm{T}=\dfrac{1}{2}\mathrm{M}$ ce qui va nous permettre d'appliquer le résultat de la question 1°).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{T}^n=\left(\frac{1}{2}\mathrm{M}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{M}^n$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(2^n\mathrm{U}+(-1)^n\mathrm{V}\right)$$

$$=\mathrm{U}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{V}$$

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{TP}_n$ ce qui permet d'écrire $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_n=\mathrm{T}^n\mathrm{P}_0$.

On peut éventuellement écrire $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_n=\left(\mathrm{U}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\mathrm{V}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ puis poursuivre pour expliciter les coefficients de P_n.

$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ donc $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ d'où $\mathrm{T}^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{U}$.

On en déduit que $\mathrm{P}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{UP}_0=\mathrm{U}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ (distribution limite).

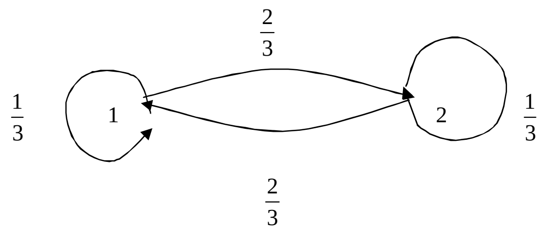
La distribution de probabilité limite est la probabilité uniforme sur l'ensemble des états (ou loi d'équiprobabilité sur l'ensemble des états). Ce résultat est tout à fait conforme à l'intuition.

« Au bout d'un grand laps de temps », les probabilités que la fourmi soit en A, en B ou en C sont égales à $\dfrac{1}{3}$.

$\boxed{23}$

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient une boule noire et deux boules blanches ; l'urne U_2 contient deux boules noires et une boule blanche.

1°) Représenter le graphe probabiliste associé à la situation.



La situation peut être modélisée par une marche aléatoire sur le graphe probabiliste (à deux sommets).

La probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2 est égale à la probabilité de tirer une boule blanche sachant que le tirage a lieu dans l'urne 1. Cette probabilité est donc égale à $\dfrac{2}{3}$.

La probabilité de transition de l'état 2 à l'état 1 est égale à la probabilité de tirer une boule noire sachant que le tirage a lieu dans l'urne 2. Cette probabilité est donc égale à $\dfrac{2}{3}$.

La probabilité de transition de l'état 1 à l'état 1 est égale à la probabilité de tirer une boule noire sachant que le tirage a lieu dans l'urne 1. Cette probabilité est donc égale à $\dfrac{1}{3}$.

La probabilité de transition de l'état 1 à l'état 1 est égale à la probabilité de tirer une boule blanche sachant que le tirage a lieu dans l'urne 2. Cette probabilité est donc égale à $\dfrac{1}{3}$.

Il s'agit de probabilités conditionnelles.

On vérifie que la somme des probabilités issues d'un même sommet est égale à 1.

La matrice de transition en colonnes M du graphe est : $\text{M}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice colonne donnant la distribution de probabilités (état probabiliste) le jour n.

$$\text{P}_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

On applique la formule $\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}$ avec $a=b=\dfrac{2}{3}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{M}^n=\frac{1}{\frac{4}{3}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

On peut éventuellement écrire M^n sous la forme d'une seule matrice.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{M}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}$$

3°)
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice colonne donnant la distribution de probabilités (état probabiliste) le jour n.

Au jour 0, le réverbère est allumé donc $\text{P}_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{P}_{n+1}=\text{MP}_n$ ce qui permet d'écrire $\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{P}_n=\text{M}^n\text{P}_0$

$-1<-\dfrac{1}{3}<1$ donc $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ d'où $\text{M}^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\text{P}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

La distribution de probabilité limite est la probabilité uniforme sur l'ensemble des états (ou loi d'équiprobabilité sur l'ensemble des états).

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{P}_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{P}_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ donc $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

On en déduit que $\text{P}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

C'est la distribution limite.

On peut vérifier que cette distribution est stable c'est-à-dire MS=S.

2°) Déterminer la distribution de probabilités après le n-ième tirage et la distribution limite.

24

Version 2 :

On étudie une marche aléatoire sur les sommets d'un tétraèdre.

1°) $\text{M}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad \text{U}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad \text{V}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

Vérifions que $\text{M}=3\text{U}-\text{V}$.

$$3U - V = 3\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\times\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}\right]$$ (petite astuce pour éviter de faire des calculs de fractions)

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&4&4\\4&0&4&4\\4&4&0&4\\4&4&4&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$= M$$

$$U^2 = \left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right]^2$$

$$= \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4^2}\times 4\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$= U$$

$$V^2 = V$$

$$UV = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$VU = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = (3U - V)^n$

$= (3U)^n + (-V)^n$ (on obtient cette égalité grâce à la formule du binôme de Newton car les produits $(3U)(-V)$ et $(-V)(3U)$ sont tous les deux égaux à la matrice nulle)

$$= 3^n \mathrm{U}^n + (-1)^n \mathrm{V}^n$$

Or $\mathrm{U}^2 = \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}^2 = \mathrm{V}$ donc les matrices U et V sont idempotentes. On en déduit que leurs puissances d'exposants entiers naturels supérieurs ou égaux à 1 sont toutes égales à U et V.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{M}^n = 3^n \mathrm{U} + (-1)^n \mathrm{V}$.

On peut vérifier que cette expression fonctionne bien pour $n = 0$ car $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_4$ d'une part et $\mathrm{U} + \mathrm{V} = \mathrm{I}_4$ (simple calcul) d'autre part.

On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = 3^n \mathrm{U} + (-1)^n \mathrm{V}$.

On peut expliciter les coefficients de M^n mais ce n'est pas utile pour la suite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^n = \frac{3^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2°)

On définit les états :
« La fourmi est en A » (état 1) ;
« La fourmi est en B » (état 2) ;
« La fourmi est en C » (état 3) ;
« La fourmi est en D » (état 4).

graphe à faire

La matrice de transition en colonnes associée est $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{T} = \frac{1}{3}\mathrm{M}$ ce qui va nous permettre d'appliquer le résultat de la question 1°).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{T}^n = \left(\frac{1}{3}\mathrm{M}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{M}^n$$

$$= \frac{1}{3^n}\left(3^n \mathrm{U} + (-1)^n \mathrm{V}\right)$$

$$= \mathrm{U} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{V}$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{TP}_n$ ce qui permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_n = \mathrm{T}^n \mathrm{P}_0$.

On peut éventuellement écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_n = \left(\mathrm{U} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{V}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis poursuivre pour expliciter les coefficients de P_n.

$-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\mathrm{T}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{U}$.

On en déduit que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{UP}_0 = \mathrm{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (distribution limite).

La distribution de probabilité limite est la probabilité uniforme sur l'ensemble des états (ou loi d'équiprobabilité sur l'ensemble des états). Ce résultat est tout à fait conforme à l'intuition.

« Au bout d'un grand laps de temps », les probabilités que la fourmi soit en A, en B, en C ou en D sont égales à $\frac{1}{4}$.