$1^{\text{ère}}$ S

Le produit scalaire dans le plan (3)
Propriétés du produit scalaire

Plan :

Introduction :

Le produit scalaire est une sorte d'opération dans l'ensemble des vecteurs.

La difficulté c'est qu'on va la mêler aux deux opérations connues dans l'ensemble des vecteurs (addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel).

I. Propriétés fondamentales

1°) Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs quelconques.

k est un réel quelconque.

P_1 : $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

P_2 : $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

2°) Commentaires

• Il est important de savoir lire ces propriétés.

P_1 se lit : « $k\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ est égal à k facteur de $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

P_2 se lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}+\vec{w}$ est égal à $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ plus $\vec{u}$ scalaire $\vec{w}$ ».

• Dans la propriété P_1, k représente un réel.

• Dans la propriété P_2, on passe d'un produit scalaire à une addition de produits scalaires.
Je dirais plus précisément que l'on passe d'un produit scalaire à une somme de produits scalaires.

• Les deux propriétés constituent la propriété de *bilinéarité* du produit scalaire. On dit que l'application qui à tout couple de vecteurs $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ associe leur produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est bilinéaire.
L'adjectif *bilinéaire* sera expliqué dans le supérieur. Cet adjectif est de la même famille que l'adjectif *linéaire* (qui a donné aussi l'adjectif *colinéaire*).

3°) Exemples d'utilisation

$\left(2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

$\left(2\vec{u}\right)\cdot\vec{u}=2\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)=2\vec{u}^{2}$

$\vec{u}\cdot\left(-2\vec{u}\right)=-2\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)=-2\vec{u}^{2}$

« On n'est pas avec des nombres mais ça marche comme avec des nombres. »

4°) Démonstration de P_1

La propriété est évidente lorsque l'un au moins des deux vecteurs est nul ou (inclusif) $k=0$.

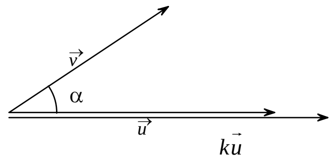
On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $k \neq 0$.

On pose $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\alpha$ ($\alpha \in [0\,;\pi]$).

On va distinguer deux cas, suivant que $k<0$ ou $k>0$.

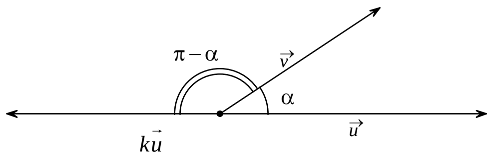
Dans chaque cas, on commence par faire une figure en représentant les deux vecteurs à partir de la même origine.

• 1^er^ cas : $\boxed{k>0}$



$$\begin{aligned}\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} &= \|k\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha\\ &= |k|\,\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha\\ &= k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha\\ &= k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\end{aligned}$$

• 2^e^ cas : $\boxed{k<0}$



$$\begin{aligned}\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} &= \|k\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\,(\pi-\alpha)\\ &= |k|\,\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\pi-\alpha)\\ &= (-k)\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times(-\cos\alpha)\\ &= k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha\\ &= k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\end{aligned}$$

Dans le cas $k>0$, le k « touche » (affecte) juste les longueurs (les normes). Il ne modifie pas l'angle géométrique.

5°) Démonstration de P_2 (à comprendre)

La propriété est évidente lorsque $\vec{u}=\vec{0}$.

On suppose donc que $\vec{u}\neq\vec{0}$.

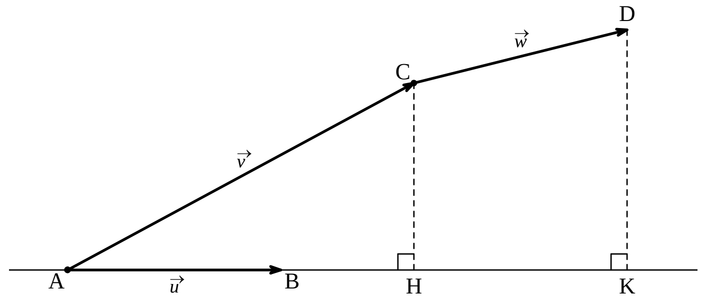
A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

C est le point tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

D est le point tel que $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

K est le projeté orthogonal de D sur (AB).



Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HK}=k\,\overrightarrow{AH}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\left(k\overrightarrow{AH}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+k\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right) \quad \text{d'après } P_1\\ &= \boxed{(1+k)}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left[(1+k)\overrightarrow{AH}\right]\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\boxed{k\overrightarrow{AH}}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HK}}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK} \quad (2)\end{aligned}$$

D'après (1) et (2), on a donc : $\boxed{\vec{u} \cdot \left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u} \cdot \vec{v}+\vec{u} \cdot \vec{w}}$.

6°) Retour sur la propriété P_1

• Un cas particulier d'application de la propriété P_1 :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \left(-\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\right) \cdot \vec{v}=-\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)}$$

Il s'agit d'une application de la propriété P_1 avec $k=-1$.
On rappelle que $-1x=-x$.

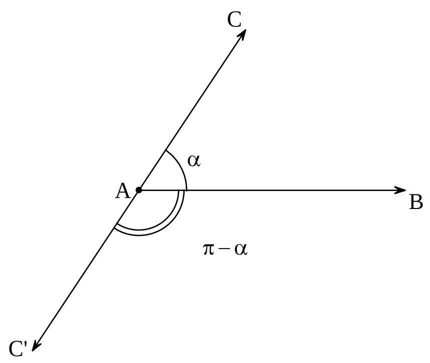
On omet souvent les parenthèses $\vec{u} \cdot \left(-\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\right) \cdot \vec{v}=-\vec{u} \cdot \vec{v}$.

• Un exemple pratique de mise en œuvre de la propriété P_1 :

A, B, C sont trois points quelconques.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB} \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right)=-\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

On peut aisément retrouver cette propriété dans le cas où $A \neq B$ et $A \neq C$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CA}}\right)\\ &= AB \times AC \times \cos\left(\pi-\alpha\right)\\ &= AB \times AC \times \left(-\cos\alpha\right)\\ &= -AB \times AC \times \cos\alpha\\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

En fait, on a refait la démonstration de la propriété !

II. Conséquences de la bilinéarité

1°) Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ sont quatre vecteurs quelconques.

k et k' sont deux réels quelconques.

$$\left(k\vec{u}\right) \cdot \left(k'\vec{v}\right)=kk'\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u}'+\vec{v}'\right)=\vec{u} \cdot \vec{u}'+\vec{u} \cdot \vec{v}'+\vec{v} \cdot \vec{u}'+\vec{v} \cdot \vec{v}'$$

2°) Commentaires

Pour la propriété $\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u}'+\vec{v}'\right)=\ldots$, on passe d'un produit scalaire à une addition de produits scalaires.

Je dirais plus précisément que l'on passe d'un produit scalaire à une somme de produits scalaires.

3°) Exemples d'utilisation

$\left(2\vec{u}\right) \cdot \left(3\vec{v}\right)=6\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$

$\left(2\vec{u}\right) \cdot \left(2\vec{u}\right)=4\left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right)=4\vec{u}^{2}$

$\left(3\vec{u}\right) \cdot \left(-2\vec{u}\right)=-6\vec{u}^{2}$

« On n'est pas avec des nombres mais ça marche comme avec des nombres. »

4°) Application

Calculs de produit scalaires par décomposition en utilisant la relation de Chasles (voir exercices).
Cette décomposition doit être choisie judicieusement. Elle sera donnée au début.

Cela fournit un troisième moyen de calculer un produit scalaire.

Attention, une erreur classique consiste à remplacer des vecteurs par des longueurs.

5°) Une égalité importante

$\vec{u} \cdot \left(\vec{v}-\vec{w}\right)=\vec{u} \cdot \vec{v}-\vec{u} \cdot \vec{w}$ (à utiliser dans les deux sens)

6°) Retour sur une propriété

$2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=2$ multiplié par « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »

$=\left(2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$ (« $2\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »)

$=\vec{u}\cdot\left(2\vec{v}\right)$ (« $\vec{u}$ scalaire $2\vec{v}$ »)

Attention, $2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ n'est pas égal à $\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{v}\right)$. Il ne s'agit pas du tout de distributivité !

$\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{v}\right)=4\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

III. Identités remarquables scalaires

1°) Formules

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

2°) Commentaires

- Il est important de savoir lire les 3 égalités.

- Normalement, on devrait écrire les deux premières identités remarquables sous la forme suivante :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+\vec{v}^2$;

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+\vec{v}^2$.

- Il est important de savoir lire les 3 égalités.

- Il est important de savoir lire les identités remarquables.

La première identité remarquable scalaire se lit ainsi :
« carré scalaire de $\vec{u}+\vec{v}=$ carré scalaire de $\vec{u}+2$ fois $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}+$ carré scalaire de $\vec{v}$ ».

La deuxième identité remarquable scalaire se lit ainsi :
« carré scalaire de $\vec{u}-\vec{v}=$ carré scalaire de $\vec{u}-2$ fois $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}+$ carré scalaire de $\vec{v}$ ».

La troisième identité remarquable scalaire se lit ainsi :
« $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ scalaire $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=$ carré scalaire de $\vec{u}-$ carré scalaire de $\vec{v}$ ».

3°) Démonstration (à savoir refaire)

On utilise les propriétés du **II.** c'est-à-dire la bilinéarité du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2&=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\&=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2&=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\\&=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)&=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\vec{u}^2-\vec{v}^2\end{aligned}$$

4°) Démonstration du théorème de Pythagore à l'aide du produit scalaire

ABC est un triangle rectangle en A.

Démontrons que $AB^2+AC^2=BC^2$.

$$\begin{aligned}BC^2&=\overrightarrow{BC}^2\\&=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2\\&=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}_{0}\\&=AC^2+AB^2\end{aligned}$$

Cette démonstration montre la puissance de l'outil « produit scalaire ».
Le produit scalaire permet de (re)démontrer de manière très courte et très simple le théorème de Pythagore.

5°) Exemple de développement par identité remarquable scalaire

Développer $\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)^2&=\left(3\vec{u}\right)^2+2\times\left(\left(3\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{v}\right)\right)+\left(2\vec{v}\right)^2\\&=9\vec{u}^2+2\times6\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+4\vec{v}^2\\&=9\vec{u}^2+12\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+4\vec{v}^2\\&=9\vec{u}^2+12\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2\end{aligned}$$

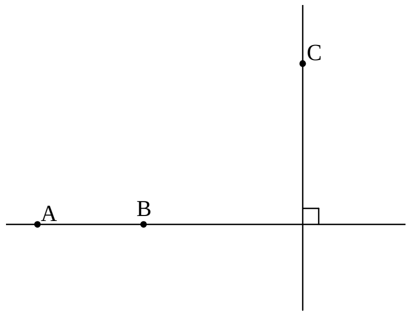
IV. Lieux géométriques d'orthogonalité

1°) Propriété 1 [droite perpendiculaire]

A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ est la **droite** orthogonale à (AB) passant par C.

En effet, l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ traduit l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ (cf. propriété vue dans le chapitre « Produit scalaire (1) » sur produit scalaire nul).

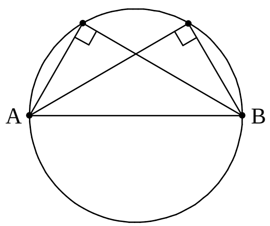


2°) Propriété 2 [cercle défini par un diamètre]

A et B sont deux points tels que $A \neq B$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle** de diamètre [AB].

En effet, l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ traduit l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ (cf. propriété vue dans le chapitre « Produit scalaire (1) » sur produit scalaire nul).



3°) Application aux ensembles de points

Voir exercices

V. Appendice : révision de la propriété de 4[e] sur triangle rectangle et cercle

1°) Énoncés en « si …, alors … »

● Propriété directe

Formulation 1

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

Formulation 2

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors son cercle circonscrit a pour diamètre [AB].

Formulation 3

Si ABC est un triangle rectangle en C, alors C appartient au cercle de diamètre [AB].

● Propriété réciproque (propriété de l'angle droit dans un cercle)

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.

Si un point C appartient au cercle de diamètre [AB] et est distinct de A et B, alors le triangle ABC est rectangle en C.

Formulation 2

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un angle droit.

Formulation 3

A et B sont deux points distincts.

Si C est un point du cercle de diamètre [AB] distinct de A et de B, alors l'angle $\widehat{ACB}$ est droit.

2°) « Création » d'un seul énoncé en « si et seulement si »

Formulation 1

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

- Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABM est rectangle en M.

- Si le triangle ABM est rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Formulation 2

A et B sont deux points distincts.
M est un point distinct de A et B.

- Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit.

- Si l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est droit.

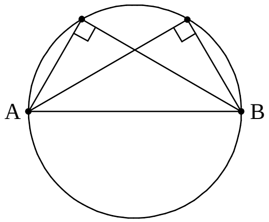
3°) Caractérisation d'un cercle comme ensemble de points

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$ où A et B sont deux points tels que $\text{A} \neq \text{B}$ est le **cercle** de diamètre de diamètre [AB].

Il s'agit d'une caractérisation d'un cercle comme lieu géométrique d'orthogonalité.

On peut dire qu'un cercle est le lieu des points d'où l'on « voit » un diamètre sous un angle droit.

C'est cette définition qui était utilisée dans l'Antiquité pour définir un cercle plutôt que par centre et rayon.



VI. Rappels sur le carré scalaire d'un vecteur

On a vu la notion de carré scalaire d'un vecteur dans le chapitre « Produit scalaire (1) ».
On rappelle ici la définition (très importante) et la propriété importante.

1°) Définition

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque.
On appelle **carré scalaire** de $\vec{u}$ le nombre noté $\vec{u}^{\,2}$ défini par $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

2°) Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^{\,2} = \left\| \vec{u} \right\|^2$.

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

3°) Cas particulier d'un vecteur défini par deux points

A et B sont deux points quelconques du plan.

$$\overrightarrow{\text{AB}}^{\,2} = \left\| \overrightarrow{\text{AB}} \right\|^2 = \text{AB}^2$$

Le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est égal au carré de la distance AB.