$1^{\text{ère}}$ S Nombre dérivé d'une fonction (3)

Ce chapitre est le point d'aboutissement des chapitres précédents.
On va reprendre les notions précédentes de nombre dérivé et de tangente en donnant une version finale des définitions et en complétant les connaissances sur ces notions.

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude du nombre dérivé en donnant :

- un nouveau langage (le langage des limites)

- une notation pour le nombre dérivé

- la définition d'une fonction dérivable et du nombre dérivé comme limite

- la définition d'une tangente

- l'équation d'une tangente

- quelques précisions sur les tangentes

- une écriture symbolique pour les limites

Dans ce chapitre, on donne des énoncés précis ainsi que la « formule de la tangente ».

Toutes les définitions du chapitre sont à connaître par cœur.

Plan du chapitre

I. Exemple

On reprend l'exemple déjà étudié plusieurs fois dans les chapitres précédents.
Nous allons introduire un nouveau langage.

1°) Notations

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

On s'intéresse à la dérivabilité de f en 1.

2°) Étude

On avait démontré que le rapport de Newton de f en 1 – en « version simplifiée » – est donné par :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2+h \quad (h\neq 0)$$

Nous avions dit dans le chapitre précédent que :

« lorsque h tend vers 0 (sans jamais être égal à 0 puisque $h \neq 0$), $2+h$ tend vers $\text{L}=2$ ».

Nous allons formuler le résultat autrement en disant que :

« la limite de $2+h$ lorsque h tend vers 0 est égale à $\text{L}=2$. »

On dit que 2 est le « résultat de la limite » ou la « valeur de la limite ».

3°) Intérêt de la notion de limite

La notion de limite supplée au fait que l'on ne peut pas dire que h est égal à 0 ; on fait juste tendre h vers 0 (c'est-à-dire que h se rapproche de 0 sans jamais être égal à 0, il est important de le rappeler pour bien l'avoir en tête).

Le langage des limites sera étudié de manière générale en Terminale.
Pour nous, la notion de limite sera juste un outil commode. Cette année, l'opération de passage à la limite quand h tend vers 0 dans le rapport de Newton simplifié consistera à remplacer h par 0 (opération que nous n'écrirons pas ; nous nous contenterons de donner le résultat de la limite).

II. Définition du nombre dérivé d'une fonction

Le concept de limite permet donner (enfin !) une définition précise d'une fonction dérivable et du nombre dérivé d'une fonction en un réel.

On se place dans un cadre général – abstrait – où l'expression de f n'est pas connue.
On sort du cadre géométrique pour donner cette définition.

1°) Formulation définitive

f est une fonction définie sur un intervalle I.

$a \in \text{I}$

Lorsque le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite L avec $\text{L} \in \mathbb{R}$, on dit que :

- la fonction f est **« dérivable »** en a ;

- le nombre L est le **« nombre dérivé »** de f en a.

2°) Utilisation de la définition

Cette définition fait le lien entre nombre dérivé et limite.

La définition ramène l'étude de la dérivabilité d'une fonction à une recherche de limite et la détermination d'un nombre dérivé à un calcul de limite.

On utilisera toujours la forme simplifiée du rapport de Newton comme nous l'avions dit dans le chapitre précédent.

Cette définition est opérationnelle : elle permet de démontrer « à la main » qu'une fonction est dérivable en un réel et de trouver le nombre dérivé. La méthode reste cependant assez lourde à cause du calcul du rapport de Newton et sera remplacée par une méthode plus rapide et plus simple dans les chapitres à venir.

On pourra retenir la méthode de calcul d'un nombre dérivé « à la main » grâce au schéma suivant :

	calcul		limite	
rapport de Newton taux de variation	$\longrightarrow$	expression simplifiée	$\longrightarrow$	nombre dérivé de f en a
	« évanouissement » du h au dénominateur		on remplace h par 0	
	méthode de séparation des calculs		technique de calcul de limite quand h tend vers 0	

3°) Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

On souhaite étudier la dérivabilité de f en 1.

On introduit un réel h pour former le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ (avec $h \neq 0$).

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h}=\frac{\frac{-h}{1+h}}{h}=\frac{-\cancel{h}}{1+h}\times\frac{1}{\cancel{h}}=-\frac{1}{1+h}\quad(\text{pour } h\neq 0 \text{ et } h\neq -1)$$

On a obtenu la forme simplifiée. On va l'utiliser pour étudier la limite quand h tend vers 0.

La limite de $-\frac{1}{1+h}$ lorsque h tend vers 0 est égale à $\text{L}=-1$.

Comme – 1 est un réel, on peut dire que *f* est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de *f* en 1 est égal à – 1.

III. Notation du nombre dérivé

Nous allons voir une notation commode pour noter le nombre dérivé, due au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

1°) Notation

Lorsque *f* est dérivable en *a*, le nombre dérivé L de *f* en *a* est noté $f'(a)$. Autrement dit, $\text{L}=f'(a)$.

2°) Commentaires

Pour nous, à ce stade de l'étude, la notation $f'(a)$ ne fait pas référence à une fonction « f' ».

$f'(a)$ est une notation globale qui ne veut pas dire « image de *a* par la fonction f' » car nous n'avons pas parlé de fonction f' pour l'instant (cela viendra dans le chapitre suivant).

La notation $f'(a)$ est à considérer dans son entier. Elle désigne juste le nombre dérivé de *f* en *a*.

La notation rappelle juste que le nombre L dépend à la fois de *f* et de *a*.

3°) Utilisation

Cette notation évitera d'avoir à écrire des phrases en français.
Elle sera très pratique pour écrire des formules.

4°) Exemple

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$

On a démontré dans le paragraphe précédent que *f* est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de *f* en 1 est égal à – 1.
On peut écrire $f'(1)=-1$.

IV. Définition de la tangente en un point

Nous allons revenir au cadre géométrique pour donner une définition précise de la tangente en un point en utilisant la notion de nombre dérivé.

1°) Formulation définitive (à connaître par cœur)

f est une fonction définie sur un intervalle I.
$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère.

A est un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a \in \text{I}$.

Lorsque *f* est dérivable en *a*, on appelle **tangente** à $\mathscr{C}$ en A la droite *T* :

- passant par A ;

- et de coefficient directeur $f'(a)$.

2°) Conséquence de la définition

On retiendra que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente *T* à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse *a*.

On notera également que dans la situation du 1°) la tangente *T* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

3°) Application

Cette définition permet de répondre à la question : « Comment tracer une tangente avec précision ? ».

Pour tracer une tangente avec précision, il faut connaître le nombre dérivé qui correspond au coefficient directeur.

Avec les notations du 1°), **le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\ f'(a)\end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de *T***.

V. Équation de la tangente

1°) Formule

Mêmes hypothèses qu'au **IV**.

Une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse *a* s'écrit $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Attention à bien voir qu'il y a un produit : $y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$.

2°) Démonstration

On utilise la formule donnant une équation de la droite passant par un point A et de coefficient directeur *m* donné : $y=m(x-x_{\text{A}})+y_{\text{A}}$.

T
- passe par le point A de coordonnées $x_{\text{A}}=a$ et $y_{\text{A}}=f(a)$
- a pour coefficient directeur $f'(a)$

D'où la formule.

3°) Commentaires

a désigne l'abscisse du point de contact (ou de tangence).

x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque de la tangente comme pour toute équation de droite où x et y désignent les coordonnées d'un point variable de la droite.
On peut, à partir de cette équation, développer pour obtenir l'équation réduite de la tangente (voir exemple numérique).

4°) Exemple numérique

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

On a démontré dans le paragraphe précédent que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -1$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f au point A d'abscisse 1.

Déterminons l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

On applique la formule en remplaçant a par 1.

Une équation de T s'écrit $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ (on utilise directement la formule en situation).
En remplaçant $f(1)$ et $f'(1)$ par leurs valeurs, on obtient $y = -(x-1)+1$.
En développant et en réduisant, on trouve $y = -x+2$.

L'équation réduite de T s'écrit $y = -x+2$.

L'équation réduite est une équation de droite « normale ».
C'est donc une égalité dans laquelle figure immuablement x et y.
Il est important de souligner que comme pour une équation de droite « normale », les lettres x et y ne peuvent être affublées d'aucun indice ni de prime (en particulier, on n'utilisera en aucun cas des notations du type y_T qui n'auraient aucun sens).

On peut vérifier cette équation en traçant la tangente sur l'écran de la calculatrice graphique.

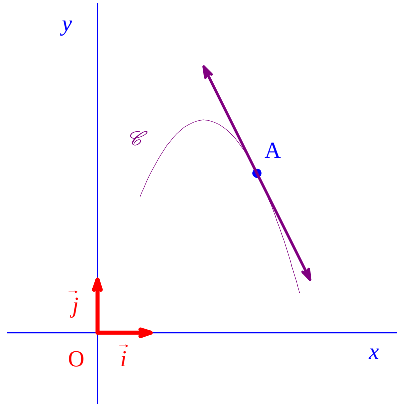
On notera – et c'est très important de l'enregistrer – que l'on n'a pas besoin de cette équation pour tracer la tangente au point A. Le coefficient directeur suffit.

On évitera tout recours systématique aux équations de tangentes (en particulier pour les tracés de tangentes pour lesquels le coefficient directeur suffit).

VI. Quelques précisions sur les tangentes

1°) Indications simplifiées des tangentes

Il arrive assez fréquemment que l'on représente la tangente en un point sous la forme d'une **double flèche** comme le montre le graphique ci-dessous.



Cette représentation est très commode quand on doit tracer plusieurs tangentes d'une même courbe.
Elle permet une meilleure visibilité que si l'on traçait ces tangentes comme on le fait ordinairement pour des droites.

2°) Tangentes horizontales

Lorsque la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses, on dit que la tangente est **« horizontale »**.
Dans ce cas, le coefficient directeur est égal à 0 c'est-à-dire que le nombre dérivé est nul.

On retiendra que lorsque $f'(a) = 0$, la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.

Les tangentes horizontales sont particulièrement importantes lorsque l'on trace la représentation graphique d'une fonction sur un graphique. C'est par elles que l'on doit commencer le tracé d'une fonction. On les représente en utilisant la représentation conventionnelle d'une double flèche tangente.
On retiendra qu'en général, on fait toujours apparaître la (les) tangente(s) horizontale(s), s'il en existe, sur un graphique sous la forme d'une double flèche tangente.

Par exemple, la courbe représentative de la fonction « carré » dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en son sommet O. On peut dire qu'elle est tangente en son sommet à l'axe des abscisses.
Plus généralement, on peut noter dès à présent en particulier qu'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$ admet une tangente horizontale en son sommet. Ce résultat sera justifié plus tard.

La courbe représentative de la fonction « cube » dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en son sommet O. Cette tangente est un peu particulière en ce sens que la courbe est d'abord en dessous puis au-dessus. On dit qu'il s'agit d'une tangente d'inflexion et on dit que le point O est un point d'inflexion pour la courbe.

VII. Écriture symbolique

1°) Notation

Lorsque *f* est dérivable en un réel *a* et que le nombre dérivé de *f* en *a* est égal à L, nous pourrons utiliser l'écriture suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{L}$$

2°) Commentaires

- Le « lim » n'est pas une abréviation ; c'est une notation mathématique.
- Le « $h \to 0$ » est contenu entièrement sous le « lim ».

3°) Utilisation

Cette écriture pourra être utilisée pour remplacer des phrases en français.
On écrira par exemple : $\lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2$.
Nous ne l'utiliserons cependant pas – ou très peu – cette année en exercices.

4°) Formule du nombre dérivé

On retiendra que si f est dérivable en un réel *a*, alors $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

VIII. Retour sur le nombre dérivé obtenu sur calculatrice

1°) Pourquoi la calculatrice nous donne-t-elle un nombre plus compliqué que le résultat exact ?

Par exemple, pour le nombre dérivé de la fonction « racine carrée » en 1, une calculatrice TI donne 0,5000000625 au lieu de 0,5.

Une calculatrice est moins performante qu'un logiciel de calcul formel.

2°) Comment fait la calculatrice pour calculer une limite de fonction ?

La calculatrice travaille avec la forme « brute » (forme initiale) du rapport de Newton.

La calculatrice procède numériquement en donnant à *h* des valeurs de plus en plus proches de 0.
Elle s'arrêtera à un moment donné, par exemple 10^{-10}, d'où le nombre approché.

En bref, la calculatrice évalue le rapport de Newton pour une valeur de *h*, proche de 0, par exemple 10^{-10}.

On peut essayer de faire l'essai avec le rapport de Newton de la fonction « racine carrée » en 1.

Ce rapport de Newton est $\varphi(h) = \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$.

L'évaluation de $\varphi(h)$ pour des valeurs de *h* proches de 0 pose quelques problèmes à la calculatrice.
La calculatrice « patauge » pour calculer ce type d'expression.

La calculatrice ne sait pas calculer $\varphi(h)$ sur la forme de base pour des valeurs de *h* proches de 0.

3°) Pourquoi la calculatrice donne-t-elle une valeur approchée supérieure à 0,5 (0,5000000625) et non valeur inférieure (par exemple, 0,4999…) ?

Il est probable que la calculatrice remplace *h* par une valeur négative proche de 0 et non par une valeur positive. Laquelle ? Cela reste un peu mystérieux.

Il faudrait faire la moyenne des deux valeurs approchées, mais la calculatrice n'est pas parfaite.

Il est possible également que la calculatrice utilise la notion de « dérivée symétrique » qui n'est pas au programme du lycée.

4°) Comment interpréter l'affichage ?

Souvent, les dernières décimales de la valeur affichée sont fausses.
En général, le résultat exact est fourni en conservant un petit nombre de décimales.

5°) Pourquoi la calculatrice n'utilise-t-elle pas les formules des fonctions de référence afin de trouver le nombre dérivé ?

Prenons par exemple le nombre dérivé en 1 de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la dérivée de f est donnée par $f'(x) = 2x$.

Donc le nombre dérivé de *f* en 1 est égal à $f'(1) = 2 \times 1 = 2$; on obtient ainsi la valeur exacte du résultat.

La calculatrice ne procède pas ainsi car elle n'effectue pas de calcul formel (sans Symbolic).

Le 8-12-2015

Grégoire Griffon

terme : décimale résiduelle

Pour $f'(3) = .50000013$, $f'(3) = \dfrac{1}{2}$

On peut parler de « décimales résiduelles ».

Résumé

Compléter les phrases suivantes :

1°)

f est une fonction définie sur un intervalle I.

a est un réel de I et h est un réel non nul tel que $a+h$ appartienne à I.

a) Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle ……………….. .

b) Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0 (sans jamais être égal à 0), on dit que f est ………………….. en a et L s'appelle ……………………………….. .

c) L est alors noté …………………….. .

2°) A est le point d'abscisse a de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

a) $f(a)$ est ………………….. du point A.

b) $f'(a)$ s'appelle …………………………… .

c) La tangente T à $\mathscr{C}$ en A a pour équation ………………… .