TS

Les nombres complexes (2)
Module d'un nombre complexe

I. Généralités

1°) Définition

z est un nombre complexe quelconque.
$z = a + ib \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$
On appelle **module** de z le réel positif ou nul $|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2°) Remarque

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\,z\,| \geqslant 0$

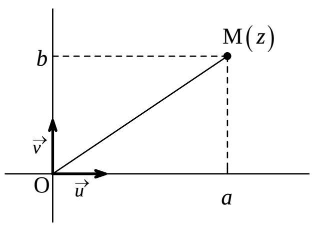
3°) Exemples

$z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$	$z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$	$z_3 = -5$	$z_4 = 2\mathrm{i}$
$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$	$\lvert z_2 \rvert = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$	$\lvert z_3 \rvert = \sqrt{(-5)^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$	$\lvert z_4 \rvert = \sqrt{0^2+2^2} = 2$

$|\,\mathrm{i}\,| = 1$

4°) Interprétation géométrique

z est un nombre complexe quelconque.
$z = a + ib \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$
M est le point d'affixe z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.



$|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\,z\,| = \mathrm{OM}$

5°) Lien avec la valeur absolue d'un réel

$z = a + ib \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |\,a\,| = \mathrm{d}(0\,;a) = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

module **définition** **distance**

ou module de $z = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$ = valeur absolue de a

La notion de module est une généralisation, une extension de la notion de valeur absolue des réels.

6°) Propriété (une autre expression du module)

● **Énoncé**

$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\,z\,| = \sqrt{z\bar{z}}$

● **Démonstration**

On pose $z = a + ib \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$.

On a alors : $\bar{z} = a - ib$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 + b^2 \quad (\geqslant 0) \end{aligned}$$

Donc $|\,z\,|^2 = z\bar{z}$.

● **Mise ne garde**

On ne peut pas écrire : $|\,z\,| = \sqrt{z} \times \sqrt{\bar{z}}$.
En effet, z et $\bar{z}$ sont dans $\mathbb{C}$ et on n'a pas le droit de considérer des racines carrées dans les nombres complexes.
En revanche, $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$ donc on a bien le droit d'écrire sa racine carrée.

7°) Propriété (cas de nullité du module)

● **Énoncé**

$$\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$$

● **Démonstration**

Démonstration 1 :

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ $\left((a\,;b) \in \mathbb{R}^2\right)$.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 2 :

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

7°) Propriété évidente

Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$.

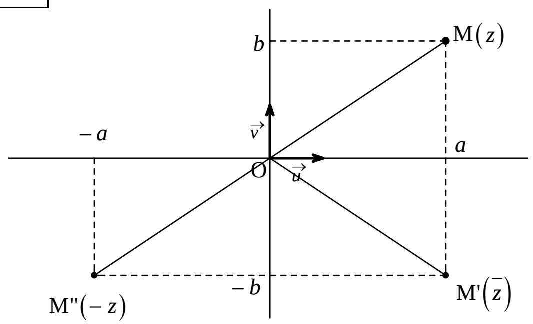
La réciproque est évidemment fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $|1| = |\mathrm{i}| = 1$.

II. Propriétés du module

1°) Propriété 1

● **Énoncé**

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\bar{z}| = |-z| = |z|}$$



OM = OM' = OM''

● **Démonstration**

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ $\left((a\,;b) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On a alors :
$\bar{z} = a - \mathrm{i}b$
et
$-z = -a - \mathrm{i}b$.

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

Autre méthode :

$$|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z} \times \bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$$

$$|-z| = \sqrt{-z \times \overline{(-z)}} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

2°) Propriété 2

● **Énoncé**

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad |zz'| = |z||z'|}$$

● **Démonstration**

On utilise l'expression du module à l'aide du conjugué.

On pose $Z = zz'$.

$$\begin{aligned} |zz'| &= |Z| \\ &= \sqrt{Z\bar{Z}} \\ &= \sqrt{zz'\,\overline{zz'}} \\ &= \sqrt{z \times z' \times \bar{z} \times \bar{z'}} \\ &= \sqrt{\underbrace{z\bar{z}}_{\in \mathbb{R}_+} \times \underbrace{z'\bar{z'}}_{\in \mathbb{R}_+}} \end{aligned}$$

Or $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \qquad \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

Donc $|zz'| = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}}$.

Par conséquent, $|zz'| = |z| \times |z'|$.

● **Généralisation**

$$\forall (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad |z_1 z_2 ... z_n| = |z_1| \times |z_2| \times ... \times |z_n|$$

● **Exemples**

$|3\mathrm{i}| = |3| \times |\mathrm{i}| = 3 \times 1 = 3$

$|-5\mathrm{i}| = |-5| \times |\mathrm{i}| = 5 \times 1 = 5$

3°) Propriété 3

● **Énoncé**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

● **Démonstration**

On utilise la propriété 2.

Astuce de départ : $\frac{z}{z'} \times z' = z$

$\left|\frac{z}{z'} \times z'\right| = |z|$

$\big\downarrow$ propriété 2

$\left|\frac{z}{z'}\right| \times |z'| = |z|$

$z' \neq 0$ donc $|z'| \neq 0$

D'où : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Autre méthode : on utilise la même méthode que pour démontrer la propriété 2.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\left(\frac{z}{z'}\right) \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}} = ...$

● **Cas particulier**

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

4°) Propriété 4

● **Énoncé**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |z^n| = |z|^n$$

● **Démonstration**

On utilise la généralisation de la propriété 2.

Astuce de départ : $z^n = \underbrace{z \times z \times z \times ... \times z}_{n \text{ facteurs}}$

$|z^n| = \underbrace{|z| \times |z| \times |z| \times ... \times |z|}_{n \text{ fois}}$ (d'après la généralisation de la propriété 2)

On en déduit que $|z^n| = |z|^n$.

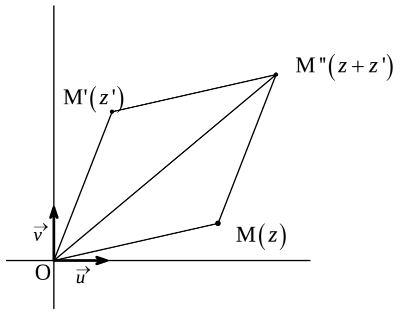
5°) Propriété 5 : inégalité triangulaire

● **Énoncé**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

● **Interprétation géométrique**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.



$M(z)$ $M'(z')$ $M''(z+z')$

OMM″M′ est un parallélogramme.
Dans le triangle OMM″, $OM'' \leqslant OM + MM''$.

$OM'' = |z_{M''}| = |z+z'|$
$OM = |z|$
$MM'' = OM' = |z'|$

Donc $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$

III. Applications géométriques (normes et distances)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Norme d'un vecteur

• **Énoncé**

> $\vec{w}(z)$ est un vecteur quelconque.
> $\|\vec{w}\| = |z|$

• **Démonstration**

On pose $z = x + iy$ $\left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$.
$\vec{w}$ a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y)$.

$\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

2°) Distance de deux points

• **Énoncé**

> $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points quelconques.
>
> $AB = |z_B - z_A|$

• **Démonstration**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ (on peut écrire directement : $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$).

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$

On a aussi de manière évidente $AB = |z_A - z_B|$.

• **Règle pratique**

Pour calculer la distance entre deux points A et B, on soustrait leurs affixes (peu importe l'ordre) et l'on calcule le module du résultat.

3°) Caractérisation d'ensembles de points (lieux géométriques)

• **cercle $\mathcal{C}$** | **de centre $\Omega(a)$**, **de rayon $R > 0$**

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \Omega M = R \\ &\Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = R \\ &\Leftrightarrow |z - a| = R \end{aligned}$$

• **médiatrice Δ de [AB] avec $A(a)$ et $B(b)$ $(A \neq B)$**

$$\begin{aligned} M(z) \in \Delta &\Leftrightarrow MA = MB \\ &\Leftrightarrow AM = BM \\ &\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \\ &\Leftrightarrow |z - a| = |z - b| \end{aligned}$$

4°) Module de $\dfrac{z-a}{z-b}$

On considère un triplet $(a, b, z) \in \mathbb{C}^3$, $z \neq b$.

Dans le plan complexe, on note les points $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$.

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{AM}{BM} = \frac{MA}{MB}$$

IV. Utilisation de la calculatrice ou de logiciels de calcul formel

1°) Mode d'emploi

Sur les calculatrices de lycée, il y a une commande spéciale qui permet de calculer le module d'un nombre complexe.

TI 83 Premium CE

Faire $\boxed{\text{2nde}}$ puis la touche avec une barre de fraction $\boxed{\frac{\square}{\square}}$ et enfin, choix avec les barres de module $|\square|$.

TI 83 Premium CE et TI 83 Plus

Taper $\boxed{\text{math}}$ puis dans NUM choisir 1 : abs( ).

Ou

Taper $\boxed{\text{math}}$ puis dans CPX ou CMPLX (complexes) choisir 5 : abs( ).

Taper le nombre i en utilisant la touche $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{.}$ (i), fermer la parenthèse et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient le module du nombre que l'on a rentré.

Il faut prendre garde que le résultat est en général donné en valeur approchée.

2°) Exemple

On calcule le module de $1+2\text{i}$.

Sur calculatrice TI 83 Premium CE, on obtient directement la valeur exacte $\sqrt{5}$.

3°) Logiciel de calcul formel

Il en est de même pour les logiciels de calcul formel.

Appendice :

Inégalité triangulaire

Dans le cours, nous avons donné une démonstration géométrique.

Nous allons donner une démonstration algébrique.

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad |\, z + z' \,| \leqslant |\, z \,| + |\, z' \,|}$$

On va rester avec z et z' tout le temps sans repasser à la forme algébrique.

$|\, z + z' \,| \geqslant 0$ et $|\, z \,| + |\, z' \,| \geqslant 0$

Pour démontrer l'inégalité, on peut comparer les carrés des deux membres.

$$\begin{aligned} |\, z + z' \,|^2 &= (z + z') \times \left(\overline{z + z'}\right) \\ &= |\, z \,|^2 + \underbrace{z\overline{z'} + z'\overline{z}}_{\textbf{conjugués}} + |\, z' \,|^2 \\ &= |\, z \,|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |\, z' \,|^2 \end{aligned}$$

On a le droit d'écrire ainsi Re … *dans un calcul.*

$$\begin{aligned} \left(|\, z \,| + |\, z' \,|\right)^2 &= |\, z \,|^2 + 2|\, z \,| \times |\, z' \,| + |\, z' \,|^2 \\ &= |\, z \,|^2 + 2|\, z \,| \times \left|\, \overline{z'} \,\right| + |\, z' \,|^2 \\ &= |\, z \,|^2 + 2\left|\, z\overline{z'} \,\right| + |\, z' \,|^2 \end{aligned}$$

Lemme : $\forall Z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re} Z \leqslant |\, Z \,|$ et $\mathrm{Im}\, Z \leqslant |\, Z \,|$ (démonstration évidente en revenant à la forme algébrique)

En appliquant ce lemme, on obtient $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|\, z\overline{z'} \,\right|$.
Donc $2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant 2\left|\, z\overline{z'} \,\right|$.

On en déduit que $|\, z + z' \,|^2 \leqslant \left(|\, z \,| + |\, z' \,|\right)^2$.
D'où $|\, z + z' \,| \leqslant |\, z \,| + |\, z' \,|$.

***Conséquence :* module d'une différence**

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad \big|\, |\, z \,| - |\, z' \,| \,\big| \leqslant |\, z - z' \,|}$$

Remarque :

$|\, z \,| - |\, z' \,|$ est un réel donc $\big|\, |\, z \,| - |\, z' \,| \,\big|$ désigne la valeur absolue de $|\, z \,| - |\, z' \,|$.

Démonstration :

On a : $|\, z \,| = |\, (z - z') + z' \,|$ donc d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|\, z \,| \leqslant |\, z - z' \,| + |\, z' \,|$.
Par suite, $|\, z \,| - |\, z' \,| \leqslant |\, z - z' \,| \quad (1)$.

On a : $|\, z' \,| = |\, (z' - z) + z \,|$ donc d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|\, z' \,| \leqslant |\, z' - z \,| + |\, z \,|$.
Par suite, $|\, z' \,| - |\, z \,| \leqslant |\, z - z' \,| \quad (2)$ [en effet, $|\, z' - z \,| = |\, z - z' \,|$].

(1) et (2) donnent $-|\, z - z' \,| \leqslant |\, z \,| - |\, z' \,| \leqslant |\, z - z' \,|$.

On en déduit que $\big|\, |\, z \,| - |\, z' \,| \,\big| \leqslant |\, z - z' \,|$.