1$^{\text{ère}}$ S

Les angles orientés (3)
Propriétés des angles orientés

Plan :

I. Relation de Chasles pour les angles orientés

II. Angles orientés opposés

III. Angles orientés formés par les opposés de deux vecteurs non nuls

IV. Angles orientés formés par les multiples de deux vecteurs non nuls

V. Formulaire récapitulatif

VI. Exemples d'utilisation des propriétés

VII. Déplacements sur le cercle trigonométrique

VIII. Propriété dans le cercle trigonométrique

Dans ce chapitre, on aborde la partie « calculs » des angles orientés.

Plus on avance dans les chapitres sur les angles orientés, plus ça devient simple. En effet, on se familiarise de plus en plus avec la notion d'angle orienté.

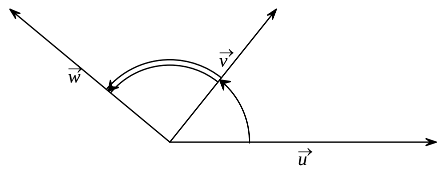
Dans tout le chapitre, le plan est orienté.

Les formules de ce chapitre permettent d'éviter le recours à la création de points.
On détermine des mesures d'angles orientés par le calcul.

I. Relation de Chasles pour les angles orientés

1°) Propriété (admise sans démonstration)

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs quelconques non nuls.



Si x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et y est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{v}\,;\vec{w})$, alors $x+y$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{w})$.

• On visualise facilement la relation de Chasles sur une figure.

• Cette propriété généralise la propriété d'additivité des mesures pour les angles géométriques adjacents vue en 6$^{\text{e}}$.

2°) Écriture de la relation de Chasles

• On dira que la somme des angles orientés $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $(\vec{v}\,;\vec{w})$ est l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{w})$.

• On écrira : $(\vec{u}\,;\vec{v})+(\vec{v}\,;\vec{w})=(\vec{u}\,;\vec{w})$.

3°) Mise en pratique

On peut appliquer la relation de Chasles à des vecteurs non nuls définis par des points ; par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

On peut écrire $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{EF}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{EF}\right)$$

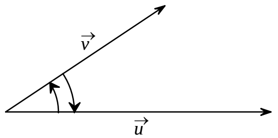
Les vecteurs n'ont pas besoin d'avoir la même origine.

II. Angles orientés opposés

1°) Propriété (admise sans démonstration)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.

Figure



> Si x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, alors $-x$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)$.

2°) Écritures

D'après la relation de Chasles : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=\underbrace{\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\text{angle nul}}$.

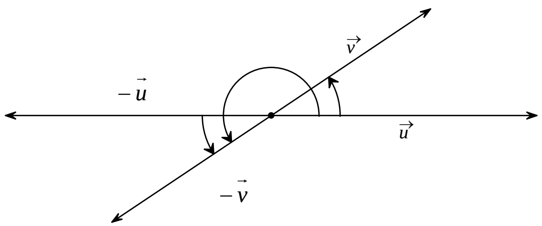
> • On écrit : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=0$
> ou encore : $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.
> • On dit que l'angle orienté $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)$ est l'**opposé** de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

III. Angles orientés formés par les opposés de deux vecteurs non nuls

1°) Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.

Figure



$$\boxed{\begin{array}{l}\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\\ \left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\\ \left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\end{array}}$$

2°) Commentaires

La présence d'un signe – ajoute π.

La présence de deux signes – ne change rien.

Pour la 3[e] égalité, on retrouve la propriété des angles opposés par le sommet (démontrée avec la symétrie centrale).

3°) Démonstration

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\underbrace{\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ (relation de Chasles)

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$

$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\underbrace{\left(\vec{v}\,;-\vec{v}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}$ (relation de Chasles)

$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$

$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\underbrace{\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\underbrace{\left(\vec{v}\,;-\vec{v}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}$ (relation de Chasles)

$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$

$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+2\pi$

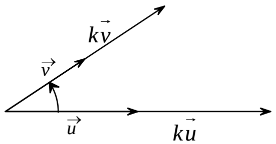
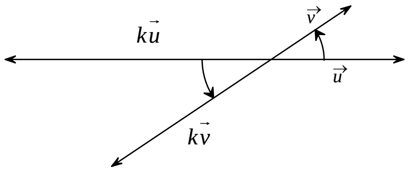
$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

IV. Angles orientés formés par les multiples de deux vecteurs non nuls

1°) Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
k est un réel non nul.

Figures

<table>
<tr><th>$k > 0$ (exemple : $k = 2$)</th><th>$k < 0$ (exemple : $k = -2$)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

$$\boxed{\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)}$$

2°) Démonstration

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\,;\vec{u}\right)+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;k\vec{v}\right)$$

1er cas : $k > 0$

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=0+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+0$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$

2e cas : $k < 0$

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$

3°) Généralisation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
k et k' sont deux réels non nuls.

$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)=\begin{cases}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe}\\ \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes contraires}\end{cases}$$

V. Formulaire récapitulatif

$$\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)=0$$
$$\left(\vec{u}\,;-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)=\pi$$
$$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$$
$$\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$$
$$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)=\begin{cases}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe}\\ \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes contraires}\end{cases}$$

VI. Exemples d'utilisation des propriétés

1°) Calculer des mesures d'angles orientés

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

$$\left(\boxed{\overrightarrow{BA}}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$
propriété
$$=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\pi$$

$$\left(\boxed{\overrightarrow{CA}}\,;\boxed{\overrightarrow{BA}}\right) = \left(-\overrightarrow{AC}\,;-\overrightarrow{AB}\right)$$
propriété
$$=\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$

En exercice, on peut utiliser à la fois la relation de Chasles et les propriétés sur les angles orientés.

2°) Démontrer que deux droites sont parallèles

On démontre que des vecteurs directeurs de chacune des deux droites sont colinéaires en utilisant les angles orientés (voir exercices).

3°) Démontrer que trois points sont alignés

On applique la même méthode que pour démontrer que deux droites sont parallèles avec les angles orientés (voir exercices).

Rappel : caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs non nuls à l'aide des angles orientés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} (\vec{u}\,;\vec{v})=0 \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\,;\vec{v})=\pi \end{vmatrix}$

On ne doit pas oublier que les mesures en radians sont données à $2k\pi$ près.
Ainsi un énoncé plus sécurisé de la propriété serait :

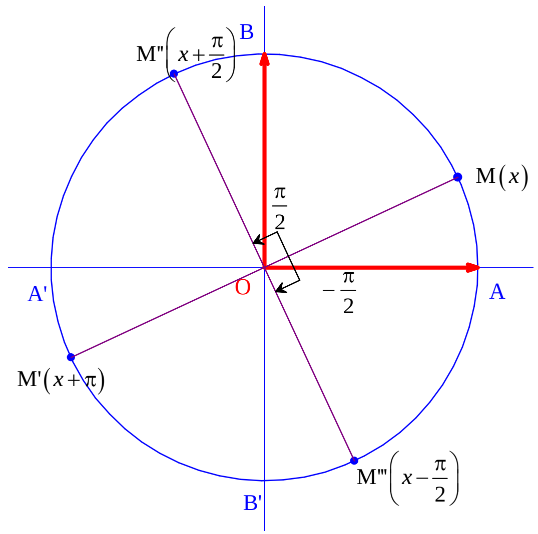
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} (\vec{u}\,;\vec{v})=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\,;\vec{v})=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{vmatrix}$

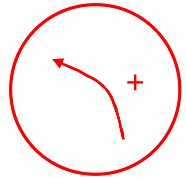
VII. Déplacements sur le cercle trigonométrique

Dans le chapitre précédent, nous avions étudié les déplacements sur le cercle trigonométrique à partir du point A (on « partait » de A).

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer ce qui se passe quand on « part » d'un point M quelconque du cercle trigonométrique associé à un réel x quelconque.

Ce paragraphe prend place dans ce chapitre car on utilise de manière cachée la relation de Chasles.





Comme dans le chapitre précédent, il est important de parler des gestes : avec le doigt, on effectue les gestes associés aux déplacements sur le cercle trigonométrique.

1°) Exemple 1

- Déplacement de 2π. On se retrouve où ? Au même endroit.
- Déplacement de -2π. On se retrouve au même endroit.
- Déplacement de $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. On se retrouve au même endroit.

2°) Exemple 2

- Déplacement de π. « On se retrouve à l'opposé » (les guillemets veulent attirer l'attention sur le fait qu'on ne le dit pas).

On dit que l'on se retrouve au point M' diamétralement opposé à M (ou encore symétrique de M par rapport à O).

- Déplacement de $-\pi$. Idem.

3°) Exemple 3

- Déplacement de $\frac{\pi}{2}$. On se retrouve au point M'' qui est le milieu de l'un des deux arcs $\overset{\frown}{\text{MM}'}$.

On peut préciser que $(\text{OM}'')\perp(\text{OM})$.

On dit plutôt que M'' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on parle de quart de tour direct de centre O).

• Déplacement de $-\frac{\pi}{2}$. On se retrouve au point M''' qui est le point diamétralement opposé à M'' sur le cercle trigonométrique.

On dit que M''' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (on parle de quart de tour indirect de centre O).

4°) Cas général

• Déplacement de α $(\alpha \in \mathbb{R})$. On arrive au point N associé à $x+\alpha$.
On dit que N est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle α.

• Exemple :

On prend $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Si on avance de $\frac{2\pi}{3}$, on est en $x+\frac{2\pi}{3}$.
Si on avance encore de $\frac{2\pi}{3}$, on est en $x+\frac{4\pi}{3}$.
Si on avance encore de $\frac{2\pi}{3}$, on est en $x+2\pi$. On se retrouve au point de départ.

Les trois points forment alors un triangle équilatéral direct.

• Généralisation de l'exemple :

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ⟶ carré direct

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ⟶ octogone régulier direct

$\alpha = \frac{2\pi}{5}$ ⟶ pentagone régulier convexe direct

5°) Déplacement « opposé »

Si un déplacement partant de A conduit en un point M associé à un réel *x*, alors le déplacement en sens opposé partant de A et de même longueur conduit au point M' associé à $-x$ (gestes associés).

VIII. Propriété dans le cercle trigonométrique

1°) Énoncé

> Soit *x* et *y* deux réels.
>
> On note M et N leurs images respectives sur le cercle trigonométrique.
> Une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})$ est $y-x$.

2°) Démonstration

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}) &= (\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON})\\
&= -x+y\\
&= y-x
\end{aligned}
$$

3°) Utilisation

Cette propriété permet de retrouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux réels aient la même image sur le cercle trigonométrique.

• Énoncé

> Soit *x* et *y* deux réels.
>
> *x* et *y* ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement si $y-x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

• Démonstration

On note M et N les images respectives de *x* et de *y* sur le cercle trigonométrique.

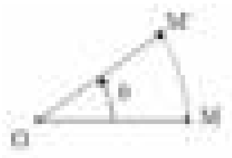
M et N sont confondus si et seulement si $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$
si et seulement si $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})=0$
si et seulement si $y-x=2k\pi$

• Autre formulation :

> Soit *x* et *y* deux réels.
>
> *x* et *y* ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x=y+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

4°) Complément : définition d'une rotation dans le plan

On se place dans le plan orienté.

> Ω est un point du plan.
> θ est un réel fixé.
> La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' ainsi défini :
>
> **1er cas : $M \neq \Omega$**
>
> M' est le point défini par $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad (2\pi) \end{cases}$
>
> 
>
> **2e cas : $M = \Omega$**
> Dans ce cas, $M' = \Omega$.

Le sens de rotation est très important. Il est donné par l'angle (orienté).

Par exemple, plutôt que de parler de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le sens indirect, on dira « rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ ».