TS Limite d'une fonction composée

Plan du chapitre :

I. Théorème

En dépit de son apparente complexité, ce théorème est simple d'utilisation.

f et *g* sont deux fonctions.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[drr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) & \\ & X \arrow[r, mapsto, "g"] & g(X) \end{tikzcd}$$

a, b, c désignent $\begin{cases} \text{soit des réels} \\ \text{soit } +\infty \\ \text{soit } -\infty \end{cases}$ (petit abus que l'on s'autorise à titre exceptionnel).

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Le rond qui apparaît sert à noter la composée de deux fonctions.
$g \circ f$ désigne la composée de *f* suivie de *g*.
On parle parfois de théorème de « croisement ». On évitera cependant d'employer cette appellation ; on parlera plutôt de théorème de limite d'une composée.

Ce théorème est admis sans démonstration.

II. Exemples d'utilisation directe

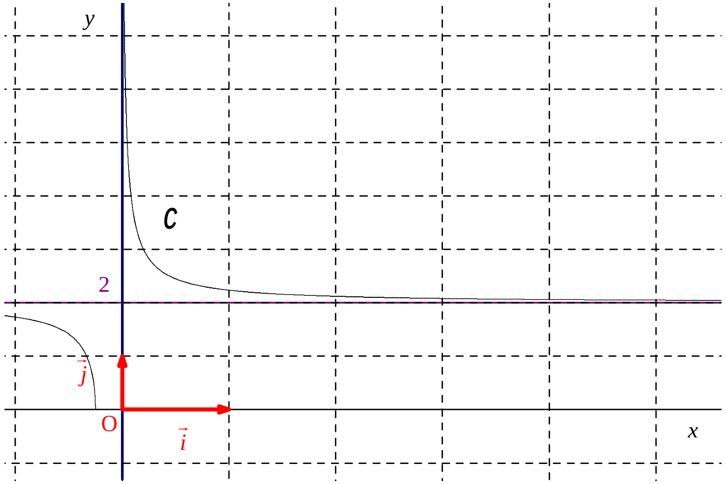
1°) Exemple 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+\frac{1}{x}}$.

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{4+\frac{1}{x}}_{X}\Big) = 4 \\ \lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2 \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$.

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.



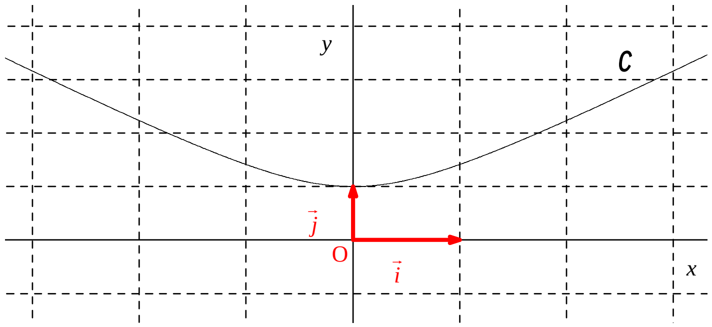
2°) Exemple 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{x^2+1}_{X}\Big) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.



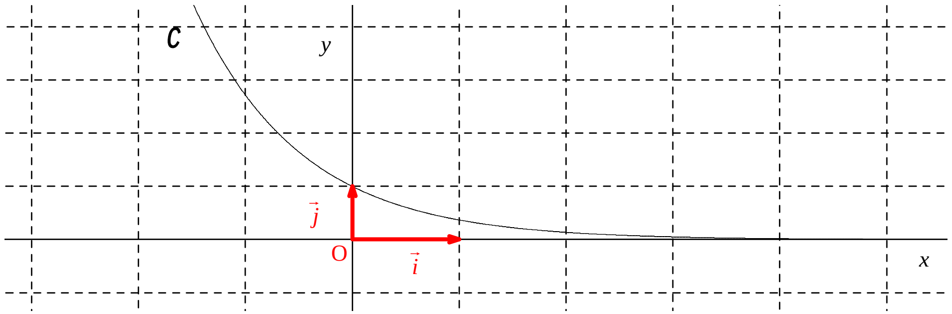
3°) Exemple 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{-x}_{X}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.



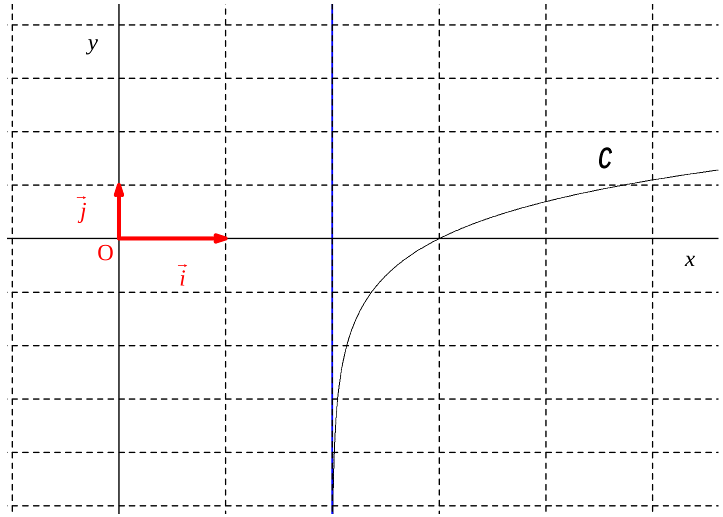
4°) Exemple 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x-2)$.

Déterminons $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\left(\underbrace{x-2}_{X}\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+} \ln X = -\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty}$.

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice



3°) Utilisation dans des cas simples

Dans des cas aussi simples que ceux des exemples 1 et 2, on s'autorisera fréquemment à écrire directement le résultat de la limite sans détailler la démarche mais il faut avoir conscience qu'il s'agit de la limite d'une composée et éventuellement être capable d'écrire la démarche en entier.
On s'autorisera par exemple à écrire directement $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ou $\mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ qui proviennent, par limite de composée, de la limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

III. Limites par changement de variable

1°) Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On effectue le changement de variable $X = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X}{2} = x$

$(x \to +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (X \to +\infty)$

On effectue la réécriture de l'expression en fonction de X.

On a $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{X}}{\frac{X}{2}} = 2\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}$

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (limite de référence du chapitre « Fonction exponentielle (2) », croissance comparée).

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

2°) Utilisation

La technique du changement de variable permet de réutiliser des limites de référence (comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ …).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x e^x\right) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \ln x\right) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

IV. Application : autre définition de la dérivabilité et du nombre dérivé d'une fonction

1°) Définition (fonction dérivable en un réel ; nombre dérivé)

I est un intervalle (non vide et non réduit à un singleton).
f est une fonction définie sur I.
a est un réel fixé dans I.

On dit que *f* est **dérivable en *a*** lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{I}}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est un réel (fini).

Cette limite est appelée **le nombre dérivé** de *f* en *a* ; on le note $f'(a)$ (notation de Lagrange).

2°) Autre écriture du nombre dérivé

$$f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{I}}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Passage de l'une à l'autre

$x = a + h \iff h = x - a$

$h \to 0 \iff x \to a$

V. Bilan

Retenir les 2 utilisations d'un *X* :

- changement de variable ;
- limite d'une composée.