

L'objet de ce chapitre est la *géométrie vectorielle* dans l'espace.

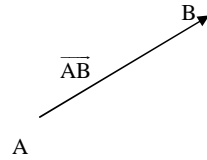
Dans tout le chapitre, on note \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace.

I. Calculs vectoriels dans l'espace

1°) Définition d'un vecteur non nul

A et B sont 2 points distincts de \mathcal{E} .
 Le **vecteur** \overrightarrow{AB} est défini par :

- **sa direction** : celle de la droite (AB)
- **son sens** : celui de A vers B.
- **sa norme** : la longueur AB ($\|\overrightarrow{AB}\| = AB$)



2°) Définition du vecteur nul

Un vecteur de l'espace défini par deux points confondus de \mathcal{E} (\overrightarrow{AA} , \overrightarrow{BB} ...) est appelé le **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

3°) Égalité de deux vecteurs

A, B, C, D sont 4 points distincts de \mathcal{E} .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow [AC] \text{ et } [BD] \text{ ont le même milieu.}$

Lorsque $A \neq B$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots$, on dit que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , $\overrightarrow{EF} \dots$ sont des représentants d'un même vecteur qui peut être noté par une seule lettre, par exemple \vec{u} .

4°) Opérations sur les vecteurs

- Comme dans le plan, on définit :
 - la somme de deux vecteurs ;
 - le produit d'un vecteur par un réel.

• Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

En particulier, pour tout vecteur \vec{u} de l'espace et pour tout réel k , on a : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

5°) Relation de Chasles

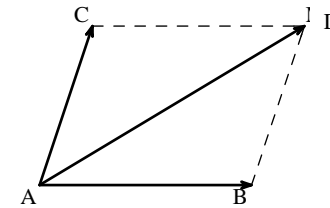
A, B, C sont trois points quelconques de \mathcal{E} .

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$)

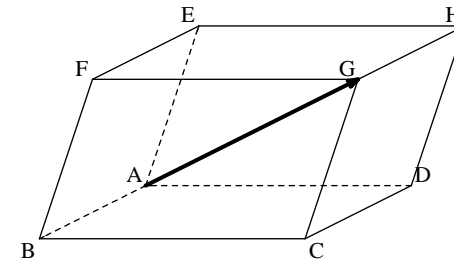
6°) Règle du parallélogramme

A, B, C sont 3 points quelconques de \mathcal{E} .
 En notant D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



7°) Règle du parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (les 6 faces sont des parallélogrammes).



On a : $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AG}$.

Démonstration :

$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ car ABCD est un parallélogramme.
D'où $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CG} = \overline{AG}$.

8°) Barycentre dans l'espace

On définit le barycentre de plusieurs points dans l'espace de la même manière que dans le plan.

Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

Cas particulier d'un milieu :

Propriété 1 : Le milieu I d'un segment $[AB]$ est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$

Propriété 2 : $\forall M \in \mathcal{E} \quad \overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$

II. Vecteurs colinéaires

1°) Définition

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont **colinéaires** pour exprimer que :

- soit ils sont tous les deux non nuls et ont la même direction
- soit l'un au moins des deux vecteurs est nul.

2°) Règle (admise sans démonstration)

\vec{u} et \vec{v} sont 2 vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

3°) Propriété

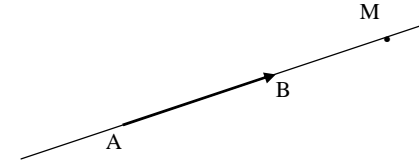
A, B, C sont 3 points quelconques de \mathcal{E} .

A, B, C sont alignés si et seulement si \overline{AB} et \overline{AC} sont colinéaires.

III. Droites de l'espace

1°) Théorème de caractérisation vectorielle

A et B sont 2 points distincts de \mathcal{E} .
M est un point quelconque de \mathcal{E} .



$M \in (AB) \Leftrightarrow A, B, M$ alignés

$\Leftrightarrow \overline{AB}$ et \overline{AM} sont colinéaires

Or $\overline{AB} \neq \vec{0}$ donc

$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$.

« Il existe »

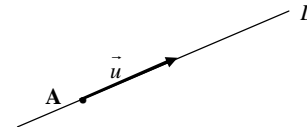
2°) Conséquence du théorème de caractérisation

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overline{AM} = \lambda\overline{AB}$ est la droite (AB) .

3°) Définition vectorielle d'une droite de l'espace

A est un point quelconque de l'espace.

\vec{u} est un vecteur non nul.



• L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overline{AM} = \lambda\vec{u}$ est une droite D .

• On dit que D est la droite de repère (A, \vec{u}) .

origine vecteur unité

• Le réel λ est appelé l'**abscisse** du point M dans le repère (A, \vec{u}) .

Autre formulation :

A est un point fixé de l'espace et \vec{u} est un vecteur fixé non nul de l'espace.

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overline{AM} = \lambda \vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} (ou de repère (A, \vec{u})).

4°) Définition d'un vecteur directeur d'une droite

Un **vecteur directeur** d'une droite D de l'espace est un vecteur non nul qui a la même direction que D .

IV. Plans de l'espace

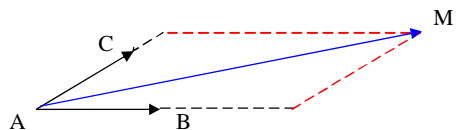
1°) Rappel

Un plan de l'espace est défini par :

- 3 points non alignés
- 2 droites sécantes
- 1 droite et un point n'appartenant pas à cette droite
- 2 droites strictement parallèles

2°) Théorème de caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

A, B, C sont trois points quelconques non alignés de l'espace.
M est un point quelconque de l'espace.



$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \text{il existe deux réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que } \overline{AM} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}.$$

3°) Démonstration de la partie directe

- **Hypothèses** : $M \in (ABC)$
- **But** : Démontrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overline{AM} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$
- **Démonstration** :

A, B, C ne sont pas alignés donc \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires.

On en déduit que $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$ est un repère du plan (ABC) .

$M \in (ABC)$ par hypothèse donc il possède des coordonnées cartésiennes x_M et y_M dans ce repère.

Par suite, $\overline{AM} = x_M \overline{AB} + y_M \overline{AC}$.

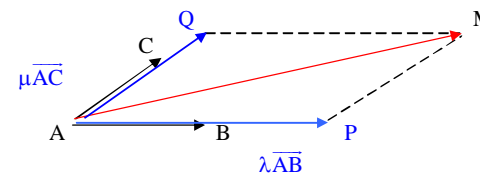
$$\text{On pose } \begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = \mu \end{cases}.$$

On obtient $\overline{AM} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$.

4°) Démonstration de la partie réciproque

- **Hypothèses** : M est un point de l'espace pour lequel il existe deux réels λ et μ tels que $\overline{AM} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$.
- **But** : Démontrer que $M \in (ABC)$.
- **Démonstration** :

Notons P le point tel que $\overline{AP} = \lambda \overline{AB}$
et Q le point tel que $\overline{AQ} = \mu \overline{AC}$.



$P \in (AB)$ donc $P \in (ABC)$.

$Q \in (AC)$ donc $Q \in (ABC)$.

Or $\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{AQ}$.

Par suite, APMQ est un parallélogramme.

Comme A, P, Q appartiennent au plan (ABC) , on en déduit que $M \in (ABC)$.

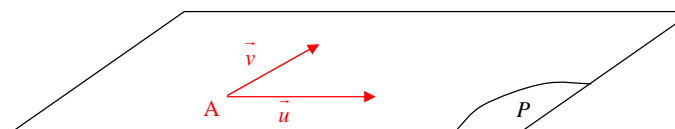
5°) Conséquence du théorème

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overline{AM} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$ est le plan (ABC) .

6°) Définition vectorielle d'un plan

A est un point quelconque de l'espace.

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace.



- L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overline{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ est un plan P de l'espace.
- On dit que P est le plan de **repère** (A, \vec{u}, \vec{v}) .

origine vecteurs de base

V. Vecteurs coplanaires

→ Rappel :

Définition [points coplanaires]

On dit que quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** lorsqu'ils sont situés dans un même plan.

→ Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une nouvelle notion : les vecteurs coplanaires.

1°) Définition 1

On s'intéresse à un « ensemble » de trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} de l'espace .

On dit que 3 vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer qu'il existe des points A, B, C, D, E, F, tous situés dans un même plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

2°) Commentaires

La définition établit un lien entre points coplanaires et vecteurs coplanaires.

Elle fournit une condition suffisante pour que trois vecteurs de l'espace soient coplanaires ; on peut formuler cette condition suffisante sous la forme de la propriété suivante :

Des vecteurs définis par des points d'un même plan sont coplanaires.

Cette propriété peut aussi être énoncée sous la forme suivante :

Si A, B, C, D, E, F sont des points coplanaires, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} sont coplanaires.

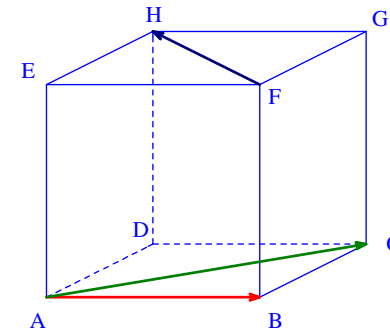
On peut utiliser cette propriété pour démontrer que des vecteurs sont coplanaires (voir exemple).

La réciproque de cette propriété est fautive comme va nous le montrer l'exemple suivant.

3°) Exemple et contre-exemple

On considère un cube ABCDEFH.

• On s'intéresse aux vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{FH} . Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?



$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ (l'idée à retenir, c'est que l'on peut « déplacer » les vecteurs dans l'espace ; ici, on a traduit les points F et H).

Les points A, B, C, D sont coplanaires (ils sont tous situés dans le plan (ABC)) donc les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{FH} sont coplanaires.

On peut observer que les points A, B, C, F, H ne sont pas coplanaires ; néanmoins, les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{FH} sont coplanaires.

• On s'intéresse aux vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BH} . Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

4°) Définition 2 (équivalente à la définition 1)

On dit que 3 vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer que, O étant un point fixé, les 4 points :

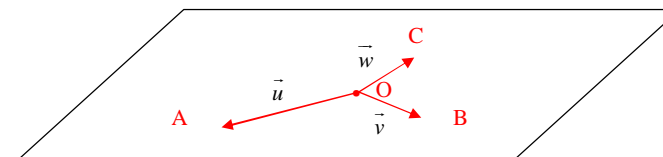
O,

A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$,

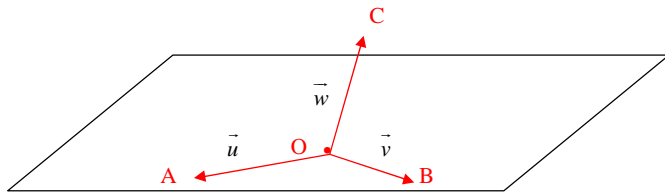
B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$,

C tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

sont dans un même plan.



Les points O, A, B, C sont coplanaires donc \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires.



Les points O, A, B, C ne sont pas coplanaires donc \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ne sont pas coplanaires.

Les **3** vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} sont coplanaires signifie que les **4** points O, A, B, C sont coplanaires.

Les **3** vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} ne sont pas coplanaires signifie que les **4** points O, A, B, C ne sont pas coplanaires.

Cette définition permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs ayant la même origine soient coplanaires :

Les vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} sont coplanaires si et seulement si les points O, A, B, C sont coplanaires.

On pourra se servir de cette propriété pour déterminer si des vecteurs de l'espace sont coplanaires.

5°) Propriété

(découle du théorème de caractérisation vectorielle d'un plan)

Condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs dont deux sont non colinéaires soient coplanaires.

\vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont 3 vecteurs quelconques de l'espace tels que \vec{u} et \vec{v} **ne sont pas colinéaires**.
 \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Démonstration :

\vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires $\Leftrightarrow C \in (OAB)$
 \Leftrightarrow il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$
 \Leftrightarrow il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Méthode : comment démontrer que trois vecteurs sont coplanaires par calcul vectoriel

Pour déterminer si 3 vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires sachant que \vec{u} et \vec{v} **ne sont pas colinéaires**, on **cherche** s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

6°) Vocabulaire

On ne dit pas que :

- des vecteurs sont contenus dans un plan ;
- des vecteurs appartiennent à un plan ;
- des vecteurs sont inclus dans un plan.

On dit qu'ils admettent un représentant dont l'origine et l'extrémité sont dans un plan P .

7°) Propriété

Soit A, B, C, D, E, F des points de l'espace.

On suppose que :

A et B appartiennent à un plan P_1 ;

C et D appartiennent à un plan P_2 ;

E et F appartiennent à un plan P_3 .

Si les plans P_1 , P_2 , P_3 sont parallèles, alors les vecteurs \vec{AB} , \vec{CD} , \vec{EF} sont coplanaires.

VI. Lieux géométriques de référence dans l'espace liés aux distances

1°) Ensemble des points de l'espace tels que $AM = R$ (A point fixé ; $R > 0$ fixé)

Sphère de centre A et de rayon R.

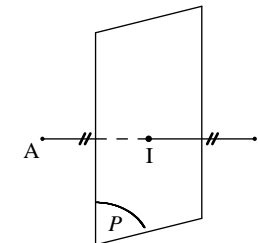
2°) Ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$ (A et B points fixés distincts)

Plan médiateur du segment $[AB]$ (c'est-à-dire plan perpendiculaire au segment $[AB]$ en son milieu).

VII. Appendice : plan médiateur d'un segment

1°) Définition

A et B sont deux points fixés distincts de l'espace.
 On appelle **plan médiateur** du segment $[AB]$ **le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et orthogonal à (AB)** .



2°) Propriété caractéristique (admise sans démonstration)

Un point M appartient au plan médiateur d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités de ce segment.

Appendice 1 : parallélépipède

Si ABCDEFGH est un parallélépipède, alors toutes ses faces sont des parallélogrammes.

Les segments [AG], [BH], [CE], [DF] ont le même milieu I.

Ce point I est appelé le centre du parallélépipède.

Appendice 2 : milieu d'une segment

Soit A et B deux points quelconques de l'espace. On note I le milieu de [AB].

Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration très facile utilisant la relation de Chasles

Appendice 3 : centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque.

Soit G son centre de gravité (point de concours des médianes).

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Cette égalité caractérise le point G (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul point G qui vérifie cette égalité).

On sait aussi que G est situé chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet c'est-à-dire :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ où A', B', C' désignent les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].