Exercices sur les vecteurs de l'espace

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace.

1 Soit ABCD un tétraèdre. On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

Faire une figure.
Démontrer que I, J, K, L sont coplanaires et déterminer la nature du quadrilatère IJKL en utilisant les vecteurs.
On s'intéressera aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

Autre version :
Soit ABCD un tétraèdre. Soit λ un réel.
On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{BI}=\lambda\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BJ}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK}=\lambda\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DL}=\lambda\overrightarrow{DA}$.
1°) Démontrer que I, J, K, L sont coplanaires et déterminer la nature du quadrilatère IJKL en utilisant les vecteurs.
Le centre de ce parallélogramme est le point O tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
2°) On pose $AC=a$ et $BD=b$. On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
Exprimer l'aire de IJKL en fonction de λ, a, b, θ.
Pour quelle valeur de λ l'aire de IJKL est-elle maximale ?

Rappel : L'aire d'un parallélogramme ABCD est donné par $AB\times AD\times\sin\widehat{BAD}$.

2 Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
Réduire la somme vectorielle $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

3 Soit ABCDEFGH un cube. On note I le centre de gravité du triangle BEG.
On pourra se reporter au rappel sur le centre de gravité ci-après.
1°) Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MI}$.
2°) Écrire l'égalité précédente pour $M=F$.
3°) En déduire que $I\in[FD]$. Préciser la position de I sur le segment [FD].

4 Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ACD.
On pourra se reporter au rappel sur le centre de gravité ci-après.
Démontrer que (IJ) est parallèle au plan (BCD).

5 Soit A, B, C, D quatre points quelconque de l'espace. On note E, F, G les points définis par $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$.
Faire une figure en prenant A, B, C, D non coplanaires.
Démontrer que G est le milieu de [EF].

6 Soit A, B, C, D quatre points quelconque de l'espace. On note I et J les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.
1°) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.
2°) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$?

7 Soit ABCD un tétraèdre. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$. On note Δ la droite de repère $\left(A,\vec{u}\right)$ et Δ' la droite de repère $\left(B,\vec{v}\right)$.
Étudier la position relative de Δ et Δ'.

8 Soit ABCDEFGH un parallélépipède.
1°) Construire le point P tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
2°) Démontrer que P est le centre de la face BCGF.

9 Soit A, B, C trois points quelconques de $\mathcal{E}$.
Pour tout réel m, on note G le point tel que $(1-m)\overrightarrow{GA}+2m\overrightarrow{GB}-m\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2°) On suppose que B n'est pas le milieu de $[AC]$.
Quel est l'ensemble des points G lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

10 Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. On note I le milieu de [AB], E le point tel que CAIE soit un parallélogramme et F le point tel que DBIF soit un parallélogramme.
Démontrer que les droites (EF) et (CD) sont sécantes en un point J. Préciser la position de J.

11 Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Démontrer que (IJ) // (EG).
En déduire que les points I, J, G, E sont coplanaires.

12 Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les points définis par $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JC}-2\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.
2°) Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$.
3°) Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\|$.

13 Soit ABCD un tétraèdre et k un réel distinct de -1. On note I et J les points définis par $\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JC}+k\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.
1°) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.
2°) Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=(1+k)\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}=(1+k)\overrightarrow{MJ}$.
3°) Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}\right\|$.

14 Soit A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.
Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB$.

15 **Un problème important dans le tétraèdre**
Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$, $[AD]$, $[BC]$.
Faire une figure en prenant les points A, B, C, D non coplanaires. Tracer le tétraèdre ABCD.
1°) Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?
Indication : Utiliser les vecteurs (penser au parallélogramme de Varignon).
2°) Démontrer que les segments $[IJ]$, $[KL]$, $[MN]$ se coupent en leurs milieux.
On en déduit en particulier que les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes (mais non coplanaires).
On dit parfois qu'il s'agit des bimédianes du tétraèdre.

3°) On note O le point en lesquels ces trois segments se coupent.
Démontrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.
À tout point M de $\mathcal{E}$ on associe les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$.
Proposer une expression simplifiée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
1°) On suppose dans cette question que les points B et C ne sont pas confondus.
Déterminer l'ensemble F_1 des points M de $\mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
2°) Déterminer l'ensemble F_2 des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace.
Démontrer que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

16 Rajouter exercice sur vecteurs coplanaires.

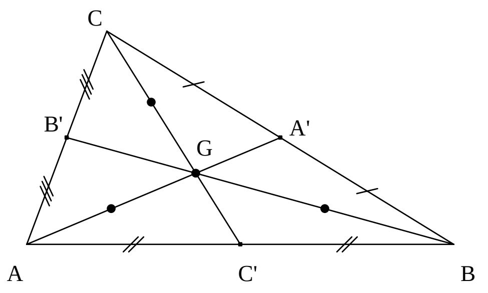
Rappel sur le centre de gravité d'un triangle :

Soit ABC un triangle quelconque.
Soit G son centre de gravité (point de concours des médianes).

On a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Cette égalité caractérise le point G (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul point G qui vérifie cette égalité).

On sait aussi que G est situé sur chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet c'est-à-dire :
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ où A', B', C' désignent les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].



Corrigé version Terminale

$\boxed{1}$ Mettre les hypothèses sous forme d'une liste sans phrases dans un encadré.

Faire une figure (1/3 ou 1/4 de page).

La représentation en perspective d'un tétraèdre peut montrer 1, 2, 3 faces visibles.

En général, on privilégie une représentation en perspective avec 2 faces visibles.

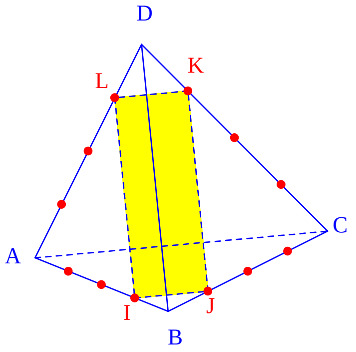
ABCD tétraèdre

$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$



Déterminons la nature du quadrilatère IJKL.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK}&=\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DK}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\\&=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.
Cette égalité permet d'affirmer que les points I, J, K, L sont coplanaires et que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

À partir de l'égalité $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$, on ne peut rien dire de plus.

On ne peut pas aller plus loin en l'absence de précision sur le tétraèdre ABCD.

Autre version de corrigé (le 13 octobre 2021) :

ABCD tétraèdre

$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ (1)

$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (2)

$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ (3)

$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ (4)

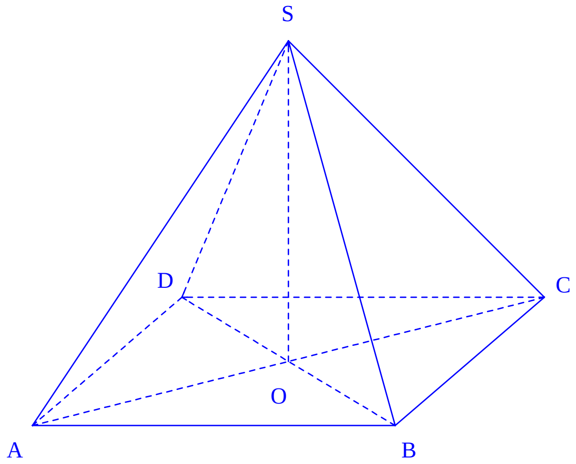
$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow -\vec{u}=-\vec{v}$

$k\vec{u}+k\vec{v}=k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}\\&=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2

SABCD : une pyramide régulière de sommet S
ABCD : carré de centre O



Réduisons $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}&=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}\right)\\&=4\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

Or ABCD est un carré de centre O donc O est le milieu de [AC] et [BD].

Ainsi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

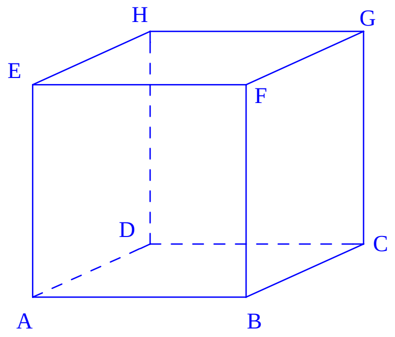
On en déduit que $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

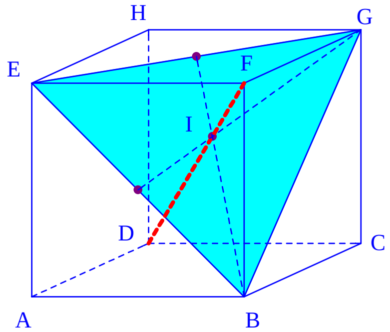
3

ABCDEFGH : cube
I : centre de gravité du triangle BEG

Faire une figure.

Pour placer I, on trace deux médianes du triangle BEG.





1°) **Démontrons que $\forall M\in\mathcal{E}\quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MI}$.**

I est le centre de gravité du triangle BEG donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}=\vec{0}$ *.

* Cette égalité caractérise le centre de gravité d'un triangle.

On a alors $\forall M\in\mathcal{E}$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}&=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}\\&=3\overrightarrow{MI}\end{aligned}$$

2°) **Écrivons l'égalité précédente pour $M=F$.**

En appliquant l'égalité précédente pour $M=F$, on obtient : $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=3\overrightarrow{FI}$.

Pour répondre à cette question, il suffit de remplacer M à F dans l'égalité établie à la question précédente (il n'y a pas de calcul vectoriel).

3°) **Déduisons-en que $I\in[FD]$ et précisons la position de I sur le segment [FD].**

ABCDEFGH est un cube donc, d'après la règle du parallélépipède, $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$.

On peut donc écrire : $\overrightarrow{FD}=3\overrightarrow{FI}$.

Par suite, $\overrightarrow{FI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

Or $0\leqslant\dfrac{1}{3}\leqslant 1$, donc I appartient au segment [FD].

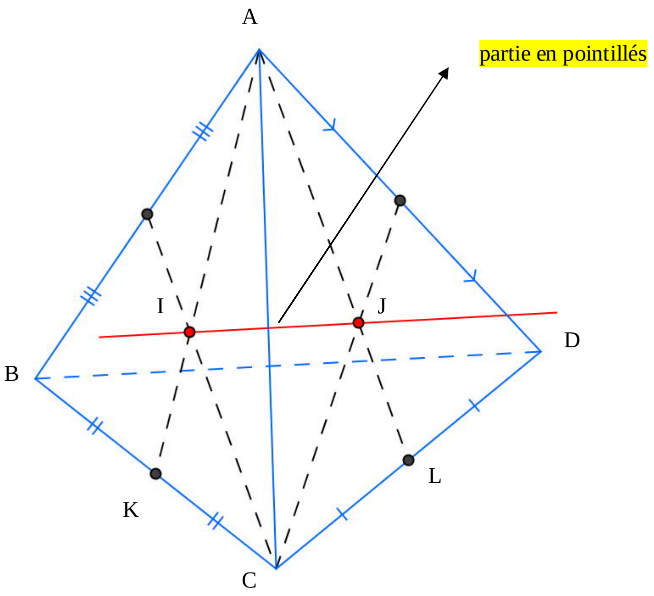
I est situé sur le segment [FD], au tiers en partant de F.

La question précédente n'est peut être pas forcément utile :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IG}\\ &= 3\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}\\ &= 3\overrightarrow{FI}+\vec{0}\\ &= 3\overrightarrow{FI}\end{aligned}$$

4

ABCD : tétraèdre
I : centre de gravité de ABC
J : centre de gravité de ACD



Sur la figure, les médianes sont en pointillés bien qu'étant sur des faces visibles, elles devraient être en tracées en traits pleins. La seule raison est qu'il s'agit de traits de constructions pour placer les centres de gravité.

Autre perspective possible :

(ABC) horizontal
A à gauche
D au-dessus

Démontrons que (IJ) est parallèle au plan (BCD).

1ère méthode :

Soit K le milieu de [BC] et L le milieu de [CD].

On a $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$ (le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet)

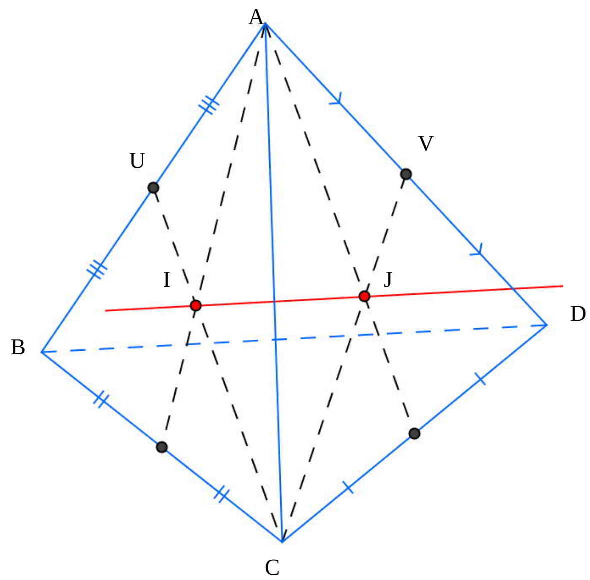
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}\\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}\right)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{KL}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires donc (IJ) // (KL).

Or (KL) $\subset$ (BCD).

D'où (IJ) // (BCD).

2e méthode :



Soit U le milieu de [AB] et V le milieu de [AD].

On a $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CU}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CV}$ (le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CI}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CV} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CU}\\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CV} - \overrightarrow{CU}\right)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{UV}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{UV}$ sont colinéaires donc (IJ) // (UV).

Or (UV) // (BD) (théorème des milieux dans le triangle ABD).
Or si une droite est parallèle à une droite d'un plan alors elle est parallèle à ce plan.

D'où (IJ) // (BCD).

3^e^ méthode : sans introduire de nouveau point

On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ}$ (relation de Chasles).

Or

- I est le centre de gravité de ABC donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$;
- J est le centre de gravité de ACD donc $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

On peut donc écrire $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JA}$.

Par suite, $$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= -\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JA}\\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{BD}\\ &= -2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{IJ}$.
Donc (IJ) // (BD).

On en déduit que (IJ) // (BCD).

$\boxed{5}$

ABCD : tétraèdre
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

On peut éventuellement faire une figure.

Démontrons que G est le milieu de [EF].

Il y a plusieurs possibilités.

On va par exemple démontrer que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EG}$ ou $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.
Les deux méthodes sont envisageables. On va utiliser à chaque fois la relation de Chasles.

1^ère^ méthode :

Le point E est « relié » au point A et le point F est également « relié » au point A par les égalités $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
Il est donc naturel d'introduire A dans $\overrightarrow{EF}$ pour « faire » une relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}\\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\\ &= 2\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AG}\\ &= 2\overrightarrow{EG}\end{aligned}$$

On en déduit que G est le milieu de $[EF]$.

2^e^ méthode :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF}\\ &= -2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{BA} + \cancel{\overrightarrow{DA}} + \overrightarrow{AC} + \cancel{\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{CB}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

On en déduit que G est le milieu de $[EF]$.

Autre méthode :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}$
et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\\ &= 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Donc en divisant les deux membres par 2, on obtient : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.
Donc G est le milieu de [EF].

Meilleure méthode le 13 octobre 2021 :

On exprime $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ en utilisant la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AE}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{CB}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AF}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

On constate que $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{GE}$.

On en déduit que G est le milieu de $[\text{EF}]$.

$\boxed{6}$

A, B, C, D : quatre points quelconque de l'espace
I : milieu de [AD]
J : milieu de [BC]

Faire une figure codée (coder les milieux)

Pour faire une figure, on trace un tétraèdre ABCD (la disposition des points adoptée ici diffère de celle préconisée habituellement)

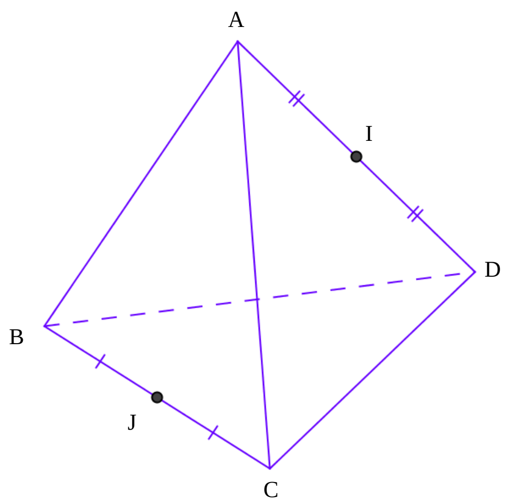


Figure de cet exercice pas forcément utile.

1°) **Démontrons que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.**

On utilise la relation de Chasles en introduisant les points I et J dans les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}\quad(1)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}\quad(2)$

Ajoutons membre à membre les deux égalités (1) et (2).

On obtient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\quad(3)$.

On sait par hypothèse que I est le milieu de [AD] donc $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0}$.
On sait par hypothèse que J est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

(3) donne donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\quad(4)$.

2°) **Que pouvons-nous en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$?**

L'égalité (4) donne $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ ou encore $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\quad(4')$.

$(4')$ donne une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

On utilise la propriété :

> Si $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
> alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Ou encore

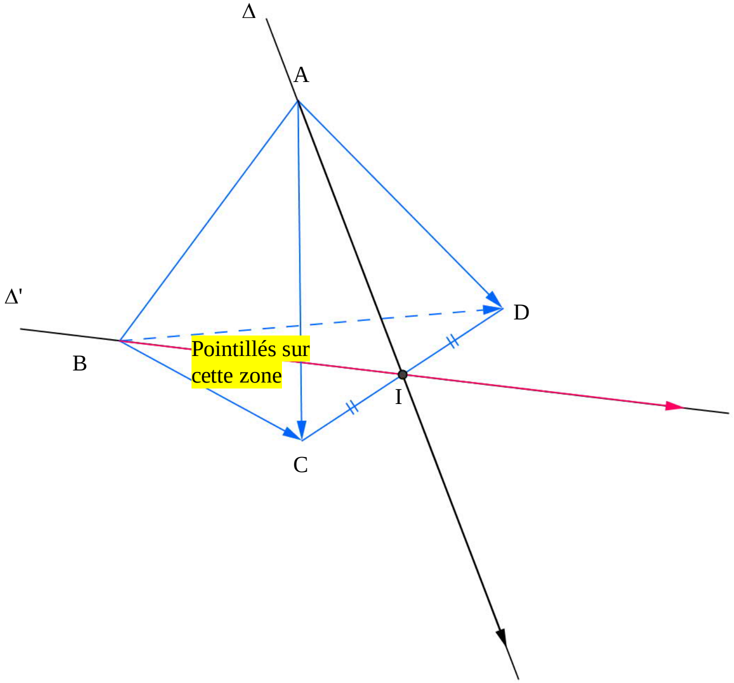
> Si $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

On exprime le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (avec des coefficients réels).

$\boxed{7}$

ABCD : tétraèdre
$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$\vec{v}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$
Δ : droite de repère $\left(\text{A},\vec{u}\right)$
Δ' : droite de repère $\left(\text{B},\vec{v}\right)$.

Faire une figure.
Éviter de faire deux côtés du tétraèdre parallèles.



Étudions la position relative de Δ et Δ'.

On s'appuie sur la figure pour conjecturer que Δ et Δ' sont sécantes et leur point d'intersection.

Soit I le milieu de [CD].

On a : $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ (1) et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ (2).

On peut démontrer ces deux égalités à l'aide de la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{BI}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{BI}}\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser directement la propriété du cours $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ puis particulariser M en prenant $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ puis $\mathrm{M} = \mathrm{B}$.

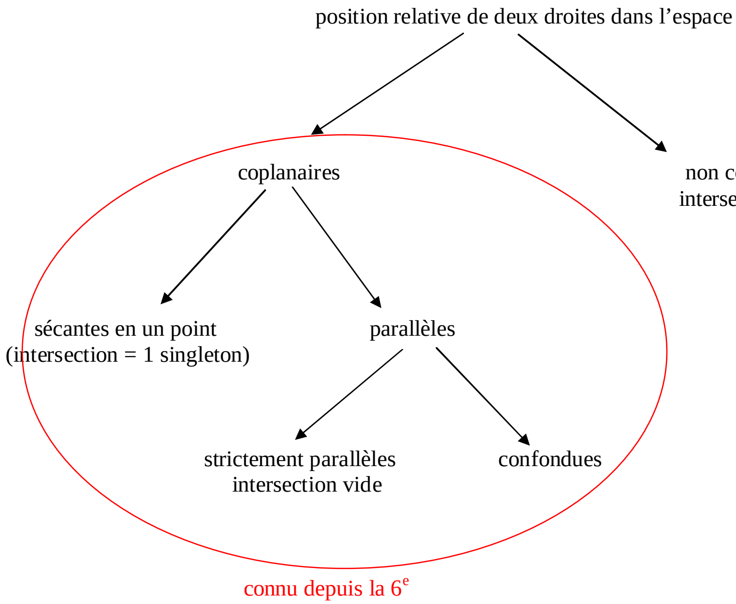
(1) donne $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\vec{u}$ ce qui montre $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

Or Δ a pour repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$. Donc $\mathrm{I} \in \Delta$.

(2) donne $\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \frac{1}{2}\vec{v}$ ce qui montre $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

Or Δ' a pour repère $\left(\mathrm{B}, \vec{v}\right)$. Donc $\mathrm{I} \in \Delta'$.

On en déduit que les droites Δ et Δ' sont sécantes au point I, milieu de [CD].



- position relative d'une droite et d'un cercle dans le plan
- position relative de deux cercles dans le plan
- position relative de deux sphères dans l'espace ; cas de tangence

$\boxed{\textbf{8}}$

ABCDEFGH : parallélépipède

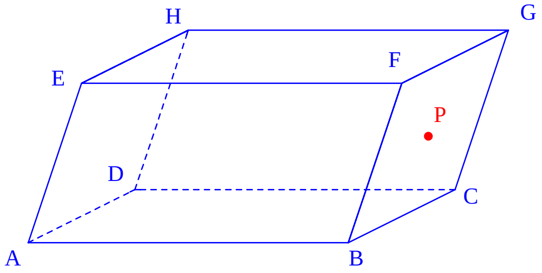
Le vendredi 10-1-2020

Parallélépipède oblique
Un parallélépipède n'est rien d'autre qu'un prisme oblique dont la base (les bases) est un parallélépipède.

1 « prisme » → base polygonale
Effectuer une translation de la base (autre base). On joint chaque point à son translaté → on obtient un prisme.
Volume d'un prisme
Les faces latérales sont toutes des parallélogrammes.
Cas d'un prisme droit

Les faces d'un parallélépipède sont toutes des parallélogrammes.
Deux faces opposées sont superposables.

1°) **Construisons le point P tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.**



2°) **Démontrons que P est le centre de la face BCGF.**

On va démontrer que P est le milieu de l'une des diagonales.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\\&=\cancel{\overrightarrow{BA}}+\cancel{\overrightarrow{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\quad\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH}\text{ d'après l'égalité du parallélogramme car la face AEHD est un parallélogramme}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\end{aligned}$$

On en déduit que P est le milieu du segment [BG].
Comme ABCDEFGH est un parallélépipède, toutes ses faces sont des parallélogrammes.
On en déduit en particulier que la face BCGF est un parallélogramme et donc que P est le milieu de la face BCGF.

$\boxed{9}$

A, B, C : trois points non alignés de $\mathcal{E}$
$m\in\mathbb{R}$
G : point défini par $(1-m)\overrightarrow{GA}+2m\overrightarrow{GB}-m\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1)

1°) **Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.**

(1) donne successivement :

$(1-m)\overrightarrow{GA}+2m\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)-m\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{GA}+2m\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AG}=2m\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=m\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$ (2)

2°) **Déduisons-en l'ensemble des points G lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$.**

Comme B n'est pas le milieu de $[AC]$, on a : $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

Donc d'après l'égalité (2), l'ensemble des points G lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Rappel de propriété :

Soit A un point fixé de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur fixé non nul de l'espace.
L'ensemble des points $M\in\mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (ou de repère $\left(A,\vec{u}\right)$).

Si on le désire, on peut poser $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

On peut aller plus loin :

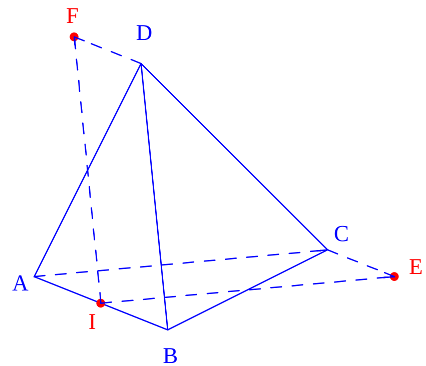
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}&=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\text{ avec I milieu de [AC]}\\&=2\overrightarrow{IB}\end{aligned}$$

Donc d'après l'égalité (2), l'ensemble des points G lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$ est la droite passant par A parallèle à (IB).

On peut réaliser une figure.

$\boxed{10}$

ABCD : tétraèdre
I : milieu de [AB]
E : point tel que CAIE soit un parallélogramme
F : point tel que DBIF soit un parallélogramme



On doit marquer le codage du point I.

Les points E et F sont situés hors du solide.

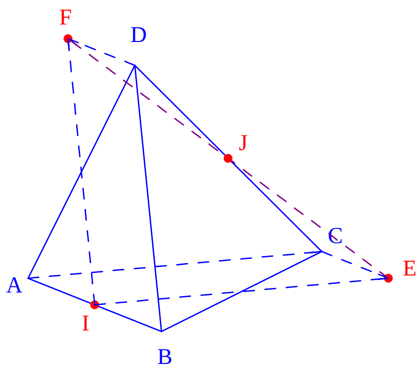
Démontrons que les droites (EF) et (CD) sont sécantes en un point J. Précisons la position de J.

Avertissement : la figure ne permet pas forcément de « voir » le résultat ; il ne faut pas hésiter à en faire une deuxième.

CAIE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{IA}$.

DBIF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BI}$.

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IA}$.
Par suite, $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DF}$.
On en déduit que le quadrilatère ECFD est un parallélogramme.
Donc ses diagonales se coupent en leur milieu.
(EF) et (CD) sont donc sécantes au point J milieu de [CD].



11 sera corrigé en classe en version parallélépipède

On démontre que (IJ) // (EG) en utilisant les vecteurs.

Il faut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires (propriété du cours : « Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre »).

On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (propriété du cours avec les milieux)

Or $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ (propriété du parallélépipède).

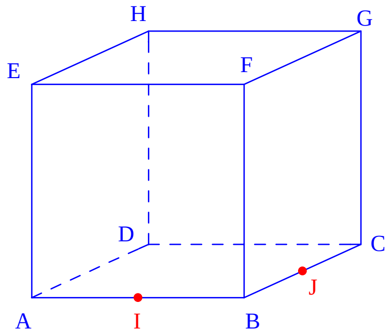
Donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

Suite ….

Ancienne version dans un cube :

Soit ABCDEFGH un cube. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Démontrer que les points I, J, G, E sont coplanaires.

ABCDEFGH : cube
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]



Démontrons que les points I, J, G, E sont coplanaires.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC].
Donc d'après le théorème des milieux, on a : (IJ) // (AC).

Or (AC) // (GE).
Donc (IJ) // (GE).

On sait que si deux droites sont parallèles, alors elles sont coplanaires.
Donc les droites (IJ) et (GE) sont coplanaires ; par suite, les points I, J, G, E sont coplanaires.

Cet exercice n'a pas de trop de rapport avec les vecteurs dans l'espace si ce n'est la notion de vecteurs coplanaires.

Les exercices **12**, **13**, **14** ne se prêtent pas à la réalisation de figures.

12 **Solution détaillée :**

ABCD : tétraèdre
$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (1)
$\overrightarrow{JC}-2\overrightarrow{JD}=\vec{0}$ (2)

1°)

• Exprimons $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

(1) donne successivement :
$\overrightarrow{IA}-2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)
$-\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$

• Exprimons $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

(2) donne successivement :

$\overrightarrow{\mathrm{JC}}-2\left(\overrightarrow{\mathrm{JC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

$-\overrightarrow{\mathrm{JC}}-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{CJ}}=2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

2°) **Réductions de sommes vectorielles**

• Démontrons que $\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

$\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{IA}}}-2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cancel{-2\overrightarrow{\mathrm{IB}}}$ (relation de Chasles)

$=-\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ (car $\overrightarrow{\mathrm{IA}}-2\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\vec{0}$ d'après (1))

• Démontrons que $\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MC}}-2\overrightarrow{\mathrm{MD}}=-\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$.

$\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MC}}-2\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\overrightarrow{\mathrm{MJ}}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{JC}}}-2\overrightarrow{\mathrm{MJ}}\cancel{-2\overrightarrow{\mathrm{JD}}}$ (relation de Chasles)

$=-\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$ (car $\overrightarrow{\mathrm{JC}}-2\overrightarrow{\mathrm{JD}}=\vec{0}$ d'après (2))

3°) **Déterminons l'ensemble $F=\left\{\mathrm{M}\in\mathcal{E}\ /\ \left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{MC}}-2\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right\|\right\}$.**

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in F &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{MC}}-2\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right\|\\
&\Leftrightarrow \left\|-\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right\|=\left\|-\overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right\|\\
&\Leftrightarrow |-1|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right\|=|-1|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right\| \quad \text{(ligne inutile } \left\|-\vec{u}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\text{)}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{MI}=\mathrm{MJ}
\end{aligned}$$

$\mathrm{I}\in(\mathrm{AB})$ et $\mathrm{J}\in(\mathrm{CD})$

Comme ABCD est un tétraèdre, les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires donc $(\mathrm{AB})\cap(\mathrm{CD})=\varnothing$; par suite, les points I et J ne sont pas confondus.

On en déduit que l'ensemble F est le plan médiateur du segment [IJ].

(Il est important d'avoir dit préalablement que les points I et J ne sont pas confondus pour pouvoir affirmer que l'ensemble cherché est le plan médiateur du segment [IJ].)

$\boxed{13}$

ABCD : tétraèdre

$k\neq -1$

$\overrightarrow{\mathrm{IA}}+k\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\vec{0}$ (1)

$\overrightarrow{\mathrm{JC}}+k\overrightarrow{\mathrm{JD}}=\vec{0}$ (2)

1°)

• Exprimons $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(1) donne successivement :

$\overrightarrow{\mathrm{IA}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

$(1+k)\overrightarrow{\mathrm{IA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($k\neq -1$ par hypothèse donc $k+1\neq 0$)

• Exprimons $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

(2) donne successivement :

$\overrightarrow{\mathrm{JC}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{JC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

$(1+k)\overrightarrow{\mathrm{JC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{CJ}}=\dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ($k\neq -1$ par hypothèse donc $k+1\neq 0$)

2°)

• Démontrons que $\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+k\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(1+k)\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

$\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+k\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{IA}}}+k\overrightarrow{\mathrm{MI}}+k\cancel{\overrightarrow{\mathrm{IB}}}$ (relation de Chasles)

$=(1+k)\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ (car $\overrightarrow{\mathrm{IA}}+k\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\vec{0}$ d'après (1))

• Démontrons que $\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MC}}+k\overrightarrow{\mathrm{MD}}=(1+k)\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$.

$\forall \mathrm{M}\in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{\mathrm{MC}}+k\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\overrightarrow{\mathrm{MJ}}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{JC}}}+k\overrightarrow{\mathrm{MJ}}+k\cancel{\overrightarrow{\mathrm{JD}}}$ (relation de Chasles)

$=(1+k)\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$ (car $\overrightarrow{\mathrm{JC}}+k\overrightarrow{\mathrm{JD}}=\vec{0}$ d'après (2))

3°) **Déterminons l'ensemble $F=\left\{M\in E \,/\, \left\|\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}\right\|\right\}$.**

Soit M un point quelconque de E.

$$\begin{aligned}
M\in F &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}\right\| \\
&\Leftrightarrow \left\|(k+1)\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|(k+1)\overrightarrow{MJ}\right\| \\
&\Leftrightarrow |k+1|\times\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=|k+1|\times\left\|\overrightarrow{MJ}\right\| \\
&\Leftrightarrow MI=MJ \quad (\text{car } k\neq -1 \text{ par hypothèse, donc } k+1\neq 0 \text{ et par suite, } |k+1|\neq 0)
\end{aligned}$$

$I\in(AB)$ et $J\in(CD)$

Or (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires donc I et J ne sont pas confondus (on peut écrire $I\neq J$).

~~Comme ABCD est un tétraèdre, les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires ; par suite, les points I et J ne sont pas confondus.~~

On en déduit que l'ensemble F est le plan médiateur du segment [IJ].

(Il est important d'avoir dit préalablement que les points I et J ne sont pas confondus pour pouvoir affirmer que l'ensemble cherché est le plan médiateur du segment [IJ].)

Cet exercice est une généralisation de l'exercice précédent.
En effet, on retrouve l'énoncé de l'exercice précédent en prenant $k=-2$.

14

Solution détaillée :

$A\neq B$

Déterminons l'ensemble F des points M de E tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB$.

1ère étape : réduction de la somme vectorielle

On note I le milieu de [AB].

$\forall M\in E \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ (propriété du cours)

2e étape : recherche de l'ensemble

$$\begin{aligned}
M\in F &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB \\
&\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=AB \\
&\Leftrightarrow |2|\times\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=AB \\
&\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2}
\end{aligned}$$

3e étape : conclusion (identification de l'ensemble)

L'ensemble F est la sphère de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

N.B. : On peut aussi dire que F est la sphère de diamètre [AB].

Complément :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.
Déterminer l'ensemble G des points M de E tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\leqslant AB$.

$$M\in G \Leftrightarrow MI\leqslant \frac{AB}{2}$$

L'ensemble G est la boule fermée de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$.

15

1°) On va démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
Pour cela, on va démontrer que $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK} \quad (\text{relation de Chasles}) \text{ ou } \overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AC} \\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad (\text{on utilise I milieu de } [AB] \text{ et K milieu de } [AC]) \\
&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) \\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (1)
\end{aligned}$$

On démontre de même que $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2).

(1) et (2) permettent de dire que $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$.
On en déduit que IKJL est un parallélogramme.

Autre version :

On utilise la version vectorielle de la droite des milieux dans un triangle.

Soit A, B, C trois points quelconques. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$ On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On la démontre avec la relation de Chasles.

Pour la figure, on prend les points A, B, C non alignés ce qui fait qu'ils forment un triangle.

Cette égalité permet d'en déduire deux propriétés importantes dans un triangle :

La droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Justification : L'égalité $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ entraîne $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

Justification : L'égalité $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ entraîne $IJ = \frac{1}{2}BC$.

Rappel sur le parallélogramme de Varignon dans le plan :

Les milieux d'un quadrilatère du plan définissent un parallélogramme.

Les côtés du parallélogramme sont parallèles aux diagonales et ont pour longueurs la moitié des longueurs des diagonales.
Le périmètre du parallélogramme est égal à la somme des longueurs des diagonales.
Lorsque le quadrilatère est convexe non croisé, l'aire du parallélogramme est égale à la moitié de l'aire du quadrilatère.

2°) On démontre que MLNK est un parallélogramme.

D'après le 1°), IKJL est un parallélogramme donc les segments $[IJ]$ et $[KL]$ se coupent en leur milieu.

D'après ce qu'on vient de voir, MLNK est un parallélogramme donc les segments $[MN]$ et $[KL]$ se coupent en leur milieu.

En rassemblant les deux résultats, on obtient que les segments $[IJ]$, $[KL]$, $[MN]$ se coupent en leurs milieux.

3°) On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ car I est le milieu de $[AB]$.
On a $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$ car J est le milieu de $[CD]$.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$$

$$= 2\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\right)$$

$$= 2 \times \vec{0} \quad \text{(car } \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} \text{ car O est le milieu de } [IJ])$$

$$= \vec{0}$$

Vocabulaire :

Dans un tétraèdre ABCD, les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées sont appelées des bimédianes.

On pourra retenir le résultat fondamental qu'on vient d'établir :

Dans un tétraèdre quelconque ABCD, les bimédianes sont concourantes en un point qui est le milieu des segments correspondant à ces bimédianes.

Le point de concours O est appelé centre de gravité du tétraèdre ABCD ou isobarycentre des points A, B, C, D.
Il est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

On peut noter l'analogie avec le centre de gravité d'un triangle quelconque dans le plan.
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

16

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

Proposer une expression simplifiée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = 2\overrightarrow{MI}$

$\forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{MJ}$

1°) On suppose dans cette question que les points B et C ne sont pas confondus.
Déterminer l'ensemble F_1 des points M de $\mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

On rédigera sous la forme d'une « chaîne d'équivalences ».

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$M \in F_1 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}$ colinéaire à $2\overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}$ colinéaire à $\overrightarrow{MJ}$
$\Leftrightarrow$ (M, I, J alignés)

Comme $B \neq C$, $I \neq J$ donc F_1 est la droite (IJ).

On peut faire une figure.

Il n'est pas utile d'introduire un coefficient de colinéarité.

On pourrait même écrire l'égalité $F_1 = (IJ)$.

2°) Déterminer l'ensemble F_2 des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$M \in F_2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

F_2 est la droite passant par I parallèle à (AC).