TS — Exercices sur les nombres complexes (2)

1 Calculer les modules des nombres complexes suivants $z_1 = -4 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$; $z_3 = -6\mathrm{i}$.

2 Calculer le module des nombres complexes suivants **en utilisant les propriétés des modules**.

$z_1 = \left(\sqrt{6} + \mathrm{i}\right)\left(5 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$; $z_2 = \left(\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$; $z_3 = (1 + 2\mathrm{i})^3$; $z_4 = \frac{53 + \mathrm{i}}{53 - \mathrm{i}}$; $z_5 = \left(\frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^4$.

3 Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(-1 + \mathrm{i})$, $\mathrm{B}(2 + 2\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(4\mathrm{i})$.

Faire un graphique en prenant un centimètre ou un gros carreau pour unité graphique (ne pas oublier les pointillés et les valeurs des coordonnées des points sur les axes).
Calculer AB et AC ; en déduire la nature de ABC.

4 Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_3 = 2\mathrm{i}$.

1°) Démontrer que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle de centre O.
Faire un graphique en prenant deux centimètres (ou deux « gros » carreaux) pour unité de longueur.
2°) Démontrer que le quadrilatère $\mathrm{OM}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est un losange.

5 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, déterminer et tracer

- l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z + 4 - \mathrm{i}| = 2$;
- l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = |z + 3\mathrm{i}|$;
- l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $|\bar{z} - 1 + 2\mathrm{i}| = 5$;
- l'ensemble E_4 des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + \mathrm{i}| \leqslant 3$.

Faire un graphique pour chaque ensemble (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité de longueur).
On introduira clairement les points utilisés.

6 On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z + 2}{z - \mathrm{i}}$.

On note A et B les points d'affixes respectives – 2 et i.

1°) Démontrer que $|z'| = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$.

2°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan tels que $|z'| = 1$.
On prendra deux centimètres ou deux « gros » carreau pour unité de longueur.

Corrigé

1 **Calculs de modules (utilisation de la définition)**

$|z_1|=\sqrt{19}$; $|z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$; $|z_3|=6$

Solution détaillée :

On applique la formule qui définit le module d'un nombre complexe :

Le module d'un nombre complexe $a+ib$ où a et b sont deux réels est le nombre $\sqrt{a^2+b^2}$.

Consigne de soin : tirer les traits de fraction à la règle.

$\mathbf{z_1=-4+i\sqrt{3}}$

$$|z_1|=\sqrt{(-4)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{16+3}$$
$$=\sqrt{19}$$

$\mathbf{z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}i}$

$$|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{16}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$\mathbf{z_3=-6i}$

$$|z_3|=\sqrt{(-6)^2}$$
$$=\sqrt{36}$$
$$=6$$

Pour z_3, on pourrait utiliser la propriété « Le module d'un produit est égal au produit des modules ».

On écrirait alors :

$$|z_3|=|-6|\times|i|$$
$$=6\times1$$

De manière plus générale, on pourrait donner la formule suivante pour un nombre imaginaire pur :

$|ib|=|b|$ (b étant un réel)

2 **Calculs de modules (utilisation des propriétés)**

$|z_1|=14$; $|z_2|=9$; $|z_3|=5\sqrt{5}$; $|z_4|=1$; $|z_5|=4$

Solution détaillée :

On applique les propriétés du module.

- $\mathbf{z_1=\left(\sqrt{6}+i\right)\left(5+i\sqrt{3}\right)}$

On applique la propriété : « Le module d'un produit est égal au produit des modules ».

$$|z_1|=\left|\sqrt{6}+i\right|\times\left|5+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+1^2}\times\sqrt{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{7}\times\sqrt{28}=\sqrt{7}\times2\sqrt{7}=2\times7=14$$

- $\mathbf{z_2=\left(\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right)^2}$

On applique la propriété : « Le module d'un carré est égal au carré du module » (cas particulier du module d'une puissance).

$$|z_2|=\left|\left(\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right)^2\right|=\left|\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right|^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\sqrt{3}^2}\right)^2=\left(\sqrt{9}\right)^2=9$$

- $\mathbf{z_3=(1+2i)^3}$

On applique la propriété du module d'une puissance.

$$|z_3|=\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3=5\sqrt{5}$$

- $\mathbf{z_4=\dfrac{53+i}{53-i}}$

On applique la propriété : « Le module d'un complexe est égal au module de son conjugué ».

$$|z_4|=\left|\frac{53+i}{53-i}\right|=\frac{|53+i|}{|53-i|}=\frac{|53+i|}{|53+i|}=1$$

On a utilisé l'égalité : $|53-i|=|53+i|$ (le module d'un nombre complexe est égal au module de son conjugué).

On peut écrire $|z_4|=\left|\dfrac{53+i}{53-i}\right|=\dfrac{\sqrt{53^2+1^2}}{\sqrt{53^2+1^2}}=1$ mais ce n'est pas vraiment utile.

- $z_5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^4$

On applique les propriétés du module d'une puissance et du module d'un quotient.

$$|z_5| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right|^4 = \left(\frac{|\sqrt{3}+i|}{|1+i|}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{\frac{4}{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$$

$\boxed{3}$

$A(-1+i)$, $B(2+2i)$; $C(4i)$

• Calculons AB et AC.

On utiliser la propriété sur la distance de deux points : « La distance de deux points est égale au module de la différence, peu importe l'ordre ».

On commence par calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2+2i-(-1+i) = 3+i$ (calcul mental possible)

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 4i-(-1+i) = 1+3i$ (calcul mental possible)

On a donc $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.

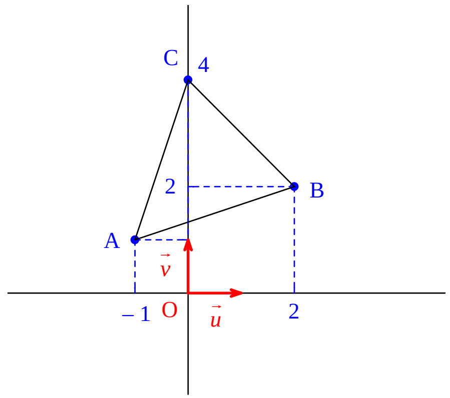
Autre façon de faire :

$AB = |z_B - z_A| = |2+2i-(-1+i)| = |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |4i-(-1+i)| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

• Déduisons-en la nature de ABC.

On constate que $AB = AC = \sqrt{10}$ donc le triangle ABC est isocèle en A.



Commentaire :

On travaille avec les affixes. On ne repasse pas en coordonnées.
Si l'on repassait en coordonnées, ce ne serait pas faux, juste maladroit.

$\boxed{4}$

$M_1\left(z_1 = \sqrt{3}-i\right)$, $M_2\left(z_2 = \sqrt{3}+i\right)$, $M_3\left(z_3 = 2i\right)$

Rappel :
Le nombre $\sqrt{3}$ est un nombre constructible.
On construit un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 2 et l'un des côtés de l'angle droit a pour longueur 1.
On peut aussi utiliser le début de l'escargot de Pythagore ou la construction par moyenne géométrique.

1°) **Démontrons que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle de centre O.**

On calcule donc les distances OM_1, OM_2 et OM_3.

$$\begin{aligned} OM_1 &= |z_1| \\ &= |\sqrt{3}-i| \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OM_2 &= |z_2| \\ &= |\sqrt{3}+i| \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OM_3 &= |z_3| \\ &= |2i| \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a donc $OM_1 = OM_2 = OM_3 = 2$.
Par suite, on en déduit que les points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

Autre méthode :
On utilise une équation du cercle de centre O et de rayon 2 (à éviter).
On peut éventuellement utiliser une équation complexe de ce cercle : $|z| = 2$.

Rappel : Le point O a pour affixe 0.

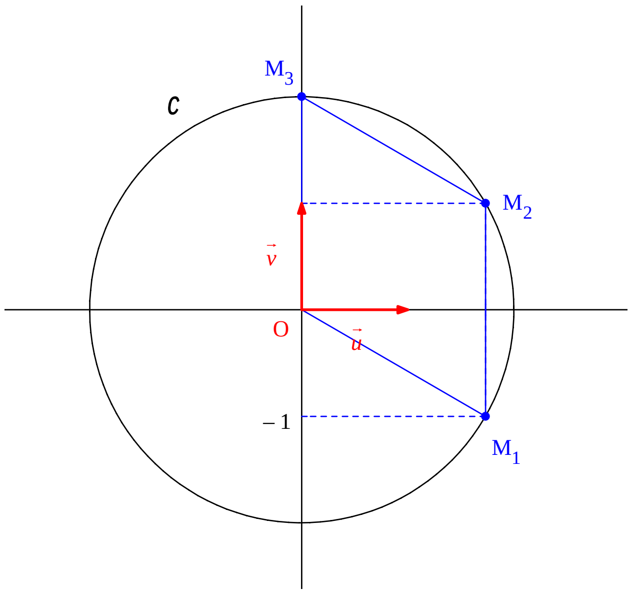
Pour le graphique, on sait que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Comme leurs abscisses sont positives, ils appartiennent tous les deux au demi-cercle situé à droite de l'axe des ordonnées.

M_1 a pour ordonnée – 1, ce qui permet de placer M_1 précisément sur le cercle.

M_2 a pour ordonnée 1, ce qui permet de placer M_2 précisément sur le cercle.

Graphique :



2°) **Démontrons que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.**

Rappels :

• **Définition du losange**

Un losange est un quadrilatère dont les sommets sont deux à deux distincts et dont les côtés ont la même longueur.

• **Propriété caractéristique**

Un losange est un parallélogramme qui possède deux côtés consécutifs de même longueur.

1ère méthode : utilisation de la définition

On calcule les quatre longueurs OM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3O à l'aide des modules.
On constate que ces quatre longueurs sont égales à 2.
On en déduit que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est losange.

Cette méthode est un peu plus longue que la deuxième méthode.
Mieux vaut l'éviter.

2e méthode : utilisation de la propriété caractéristique

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme avec des affixes, on démontre que deux vecteurs sont égaux.

$z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = z_1 - 0 = \sqrt{3} - i$

$z_{\overrightarrow{M_3M_2}} = z_{M_2} - z_{M_3} = z_2 - z_3 = \sqrt{3} + i - 2i = \sqrt{3} - i$

Donc $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{\overrightarrow{M_3M_2}}$ d'où $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$.

Donc le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme.

De plus, d'après la question 1°), on a $OM_1 = OM_3 = 2$.

On en déduit que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Les côtés du losange ont tous pour longueur 2.

N.B. : Il ne s'agit pas d'un carré ; ça saute aux yeux sur le graphique. La démonstration est facile (mais l'énoncé demande juste de démontrer que c'est un losange donc ce n'est pas la peine d'en faire trop).
Les points M_1, M_2, M_3 appartiennent tous au cercle de centre O et de rayon 2 donc il n'est pas possible que $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

On pourrait aussi penser à utiliser la caractérisation suivante d'un losange :

Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu est un losange.

Pour démontrer que les diagonales sont perpendiculaires, on devrait alors utiliser le produit scalaire et le calcul d'un produit scalaire conduirait à « sortir » des complexes (en effet, il n'y a pas de formule de produit scalaire en complexes).

$\boxed{5}$ Recherche d'ensembles de points

• L'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega(-4+i)$ et de rayon 2.

• L'ensemble E_2 est la médiatrice du segment [AB] avec $A(2)$ et $B(-3i)$.

• L'ensemble E_3 est le cercle de centre $\Omega(1+2i)$ et de rayon 5.

• L'ensemble E_4 est le disque fermé de centre avec $\Omega(1-i)$ et de rayon 3.

Solution détaillée :

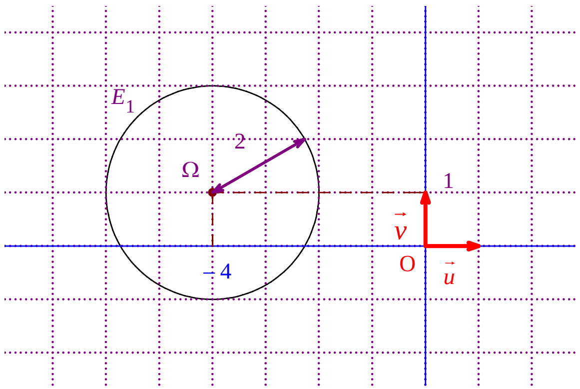
On introduit tous les points utiles à la détermination des ensembles au fur et à mesure – on a tout à fait le droit d'introduire des nouveaux points à condition de les avoir clairement définis.
On définit chaque point par son affixe.

★ **Déterminons l'ensemble $E_1 = \left\{ M(z) \in P \,/\, |z+4-i| = 2 \right\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$
\begin{aligned}
M \in E_1 &\Leftrightarrow |z+4-i| = 2 \\
&\Leftrightarrow |z-(-4+i)| = 2 \\
&\Leftrightarrow |z-z_\Omega| = 2 \text{ avec } \Omega(-4+i) \\
&\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\Omega M}}| = 2 \qquad \text{(ligne facultative)} \\
&\Leftrightarrow \Omega M = 2
\end{aligned}
$$

L'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega(-4+i)$ et de rayon 2.



Version maladroite en posant $z = x + iy$ avec x et y réels faite en appendice.

Une faute grave consisterait à :

- sortir le module de $4-i$;

- le calculer et après le passer de l'autre côté pour trouver le rayon du cercle.

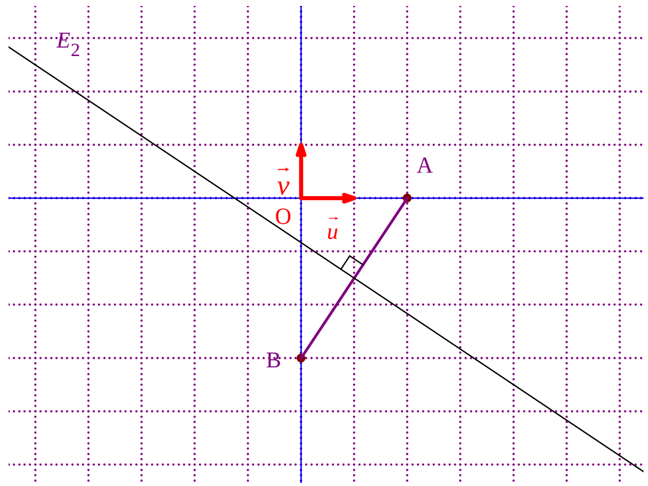
La faute grave réside dans le fait que le module d'une somme n'est pas égal à la somme des modules.

★ **Déterminons l'ensemble $E_2 = \left\{ M(z) \in P \,/\, |z-2| = |z+3i| \right\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$
\begin{aligned}
M \in E_2 &\Leftrightarrow |z-2| = |z+3i| \\
&\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \text{ avec } A(2) \text{ et } B(-3i) \\
&\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{AM}}| = |z_{\overrightarrow{BM}}| \qquad \text{(ligne facultative)} \\
&\Leftrightarrow AM = BM
\end{aligned}
$$

L'ensemble E_2 est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2)$ et $B(-3i)$.



★ **Déterminons l'ensemble $E_3 = \left\{ M(z) \in P \,/\, |\bar{z}-1+2i| = 5 \right\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

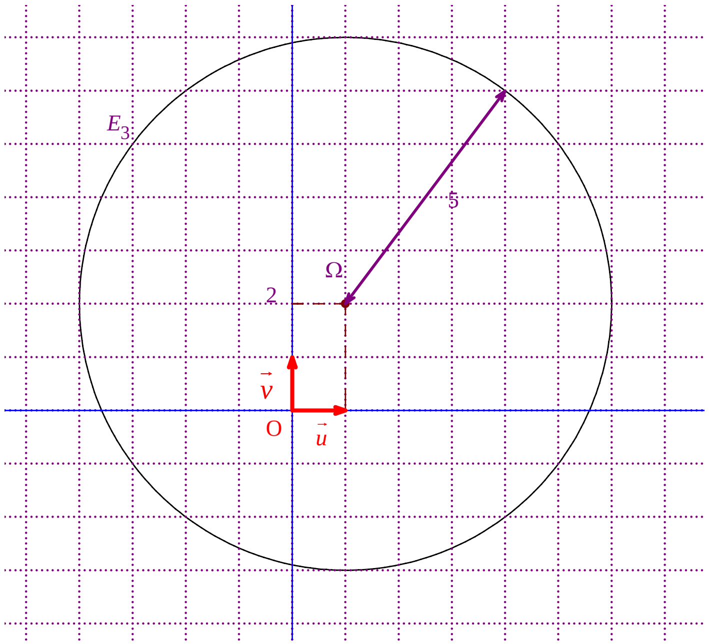
$$
\begin{aligned}
M \in E_3 &\Leftrightarrow |\bar{z}-1+2i| = 5 \qquad \text{utilisation du conjugué} \\
&\Leftrightarrow \left|\overline{z-1-2i}\right| = 5 \ ^*
\end{aligned}
$$

(en effet, $-1+2i = \overline{-1-2i}$ et le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |z-1-2i| = 5 \qquad \text{(le module du conjugué d'un nombre complexe est égal au module de ce nombre)} \\
&\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\Omega' M}}| = 5 \text{ avec } \Omega'(1+2i) \\
&\Leftrightarrow \Omega' M = 5
\end{aligned}
$$

L'ensemble E_3 est le cercle de centre $\Omega'(1+2i)$ et de rayon 5.

* On peut expliciter le passage ainsi : $\overline{z-1-2i} = \bar{z} - \overline{1-2i} = \bar{z} - 1 + 2i$ *(le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués).*



L'idée est de se débarrasser de la barre de conjugaison au-dessus de *z*.

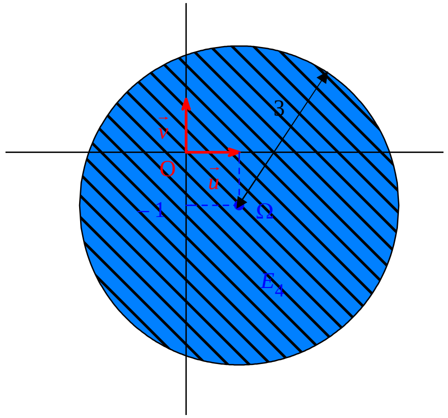
* On a effectué la réécriture : $\left|\,\bar{z}-1+2\mathrm{i}\,\right|=\left|\,\overline{z-1-2\mathrm{i}}\,\right|$ (ce sont des écritures équivalentes).

★ **Déterminons l'ensemble $E_4=\left\{\,\mathrm{M}(z)\in P \,/\, \left|\, z-1+\mathrm{i}\,\right|\leqslant 3\right\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in E_4 &\Leftrightarrow \left|\, z-1+\mathrm{i}\,\right|\leqslant 3\\
&\Leftrightarrow \left|\, z_{\overrightarrow{\Omega''\mathrm{M}}}\,\right|\leqslant 3 \text{ avec } \Omega''\left(1-\mathrm{i}\right)\\
&\Leftrightarrow \Omega''\mathrm{M}\leqslant 3
\end{aligned}$$

L'ensemble E_4 est le disque fermé de centre $\Omega''\left(1-\mathrm{i}\right)$ et de rayon 3.



Rappels de définition :

• L'ensemble des points M du plan tels que $\Omega\mathrm{M}\leqslant R$ est le disque fermé de centre Ω et de rayon R.

• L'ensemble des points M du plan tels que $\Omega\mathrm{M}< R$ est le disque ouvert de centre Ω et de rayon R.

• L'ensemble des points M tels que $\Omega\mathrm{M}\geqslant R$ est le complémentaire dans le plan du disque ouvert de centre Ω et de rayon R.
On peut aussi dire que c'est l'ensemble des points extérieurs au cercle de centre Ω et de rayon R (mais cela reste flou quant à la frontière) ou le plan privé du disque ouvert de centre Ω et de rayon R.

• L'ensemble des points M tels que $\Omega\mathrm{M}> R$ est le complémentaire dans le plan du disque fermé de centre Ω et de rayon R.

Comment faire la distinction entre disque fermé et disque ouvert sur le graphique ?

On va colorer ou non le cercle.
Au niveau des hachures, on arrêtera les hachures avant.

Sur un graphique, on représente un disque ouvert en hachurant l'« intérieur » du cercle mais en faisant en sorte que les hachures ne touchent pas le bord.

Point-méthode :

• On remarquera que l'on est resté avec les affixes.
À aucun moment, on ne repasse en coordonnées.

• On n'utilise pas deux fois le mot « ensemble » dans la conclusion.

• On ne parle pas de M dans la conclusion.

Appendice : autre méthode (que l'on évitera cependant) pour la recherche des ensembles E_1 et E_2

On repasse en coordonnées cartésiennes.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

• **Ensemble E_1 :**

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(z) \in E_1 &\Leftrightarrow |\, z+4-\mathrm{i} \,| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2} = 2 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-1)^2 = 4 \quad \text{(équation de cercle)} \end{aligned}$$

L'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega(-4\,;\,1)$ et de rayon 2.

• **Ensemble E_2 :**

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(z) \in E_2 &\Leftrightarrow |\, x+\mathrm{i}y-2 \,| = |\, x+\mathrm{i}y+3\mathrm{i} \,| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = x^2+(y+3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2+6y+9 \\ &\Leftrightarrow 4x+6y+5=0 \end{aligned}$$

L'ensemble E_2 est la droite d'équation $4x+6y+5=0$.

$\boxed{6}$

$\mathrm{M}(z)$ avec $z \neq \mathrm{i}$

$\mathrm{M}'(z')$ avec $z' = \dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}}$

$\mathrm{A}(-2)$ $\qquad$ $\mathrm{B}(\mathrm{i})$

1°) **Démontrer que $|\, z' \,| = \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$.**

On a : $z' = \dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{z-(-2)}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}$.

On a donc : $|\, z' \,| = \left| \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}} \right| = \dfrac{|\, z-z_{\mathrm{A}} \,|}{|\, z-z_{\mathrm{B}} \,|} = \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$.

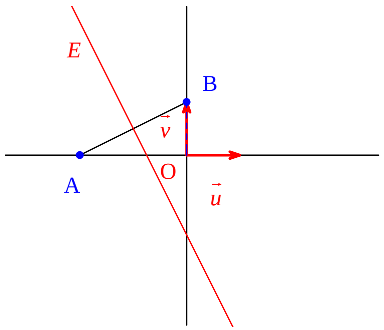
2°) **Déterminons l'ensemble $E = \{\, \mathrm{M}(z) \in P \,/\, |\, z' \,| = 1 \,\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow |\, z' \,| = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \end{aligned}$$

Conclusion : E est la médiatrice du segment [AB].

Graphique : On demande de bien respecter l'échelle indiquée (2 cm ou 2 « gros » carreaux).



Tracé au compas ou à l'équerre.

Classification des exercices par compétences

Compétences	Exercices
Calculer le module d'un nombre complexe en utilisant la définition	$\boxed{1}$
Utiliser les propriétés du module	$\boxed{2}$
Utiliser le module en géométrie (calculs de longueurs, ensembles de points…)	$\boxed{3}$ à $\boxed{5}$