# TS Exercices sur les nombres complexes (1)

**1** Calculer en donnant le résultat sous forme algébrique $z_1=(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$ ; $z_2=(1-\mathrm{i})^4$ ;
$z_3=(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})$ ; $z_4=\left(\frac{1}{2}+3\mathrm{i}\right)+(\mathrm{i}-1)$ ; $z_5=\frac{1}{2-\mathrm{i}}$ ; $z_6=\frac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ ; $z_7=\frac{1}{4\mathrm{i}}$.
On présentera les calculs en colonnes.
Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

**2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\mathrm{i}z-3=z+\mathrm{i}\quad(1)$. L'inconnue est $z$.

**3** Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $(\Sigma)$ $\begin{cases}3z+z'=5+2\mathrm{i}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$.

**Indications :**
Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Calculer d'abord le déterminant.
Ne pas poser $z=a+\mathrm{i}b$.

**4** Pour tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ $\left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$, on pose $Z=z^2-z$.
Déterminer la forme algébrique de $Z$ en fonction de $x$ et $y$.
En déduire Re $Z$ et Im $Z$ en fonction de $x$ et de $y$.
Vérifier en utilisant le site dcode.

**5** Pour tout nombre complexe $z\neq1$, on pose $Z=\frac{z}{z-1}$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$, $x$ et $y$ étant deux réels tels que $(x\,;y)\neq(1\,;0)$.
Déterminer l'écriture algébrique de $Z$ en fonction de $x$ et $y$. On organisera les calculs de manière méthodique.
Exprimer Re $Z$ et Im $Z$ en fonction de $x$ et de $y$ (ne pas développer les dénominateurs).

**6** Soit $\lambda$ un réel.
On pose $z=(\lambda+\mathrm{i})\left[\lambda+5-\mathrm{i}(\lambda-7)\right]$.
Déterminer $\lambda$ tel que $z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

**7** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+\mathrm{i}\bar{z}=5-4\mathrm{i}$.
Vérifier avec le site dcode.

**8** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathrm{i}z+2)\left(\bar{z}-5\mathrm{i}\right)=0$.
**Indication :** On s'abstiendra de poser $z=a+\mathrm{i}b$ avec $a$ et $b$ réels.

**9** Pour tout réel $\alpha$, on pose $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ et $z_2=(1-2\cos\alpha)+\mathrm{i}\sin(2\alpha)$.
1°) Déterminer les réels $\alpha$ tels que $z_1$ soit un réel.
2°) Déterminer les réels $\alpha$ tels que $z_2$ soit un imaginaire pur.

**10** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right)^2-6\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right)+13=0$.

**11** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^2-3=0$.

**12** Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $(\Sigma)$ $\begin{cases}z+z'=2\\ zz'=17\end{cases}$.
On raisonnera par équivalences.

**13** 1°) Factoriser le polynôme $P(Z)=Z^4-1$ à l'aide de quatre facteurs du premier degré et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.

2°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1\quad(\mathrm{E})$.

**14** On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0\quad(\mathrm{E})$.
1°) Vérifier que 0 n'est pas solution de $(\mathrm{E})$.
2°) Soit $z$ un nombre complexe non nul. On pose $Z=z+\frac{1}{z}$.
a) Calculer $Z^2$ en fonction de $z$ (expression sous forme développée réduite).
b) Démontrer que $z$ solution de $(\mathrm{E})\Leftrightarrow Z^2-5Z+4=0\quad(\mathrm{F})$.
3°) Résoudre l'équation $(\mathrm{F})$. On n'écrira pas l'ensemble des solutions de $(\mathrm{F})$ (car cette équation n'est qu'une équation auxiliaire pour résoudre l'équation $(\mathrm{E})$).
4°) En déduire les solutions de $(\mathrm{E})$.

**Le lundi 14 novembre 2022**

Équations réciproques
Polynômes

**Définition générale**

On considère une équation polynomiale de degré $n$, $n$ étant un entier naturel, de la forme $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0\quad(\mathrm{E})$ où $z$ désigne l'inconnue (nombre complexe) et où $a_0$, $a_1$, … $a_n$ sont désignent les coefficients (nombres complexes) avec $a_n\neq0$.
On dit que $(\mathrm{E})$ est une équation réciproque lorsque pour tout entier naturel $k\in[\![0\,;n]\!]$ on a $a_{n-k}=a_k$.

Le premier membre peut s'écrire $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{k=n}a_kz^k$. On parle de polynôme réciproque.

**15** On considère le polynôme complexe $P(z)=z^3-(2+3\mathrm{i})z^2+3(1+2\mathrm{i})z-9\mathrm{i}$.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ $(\mathrm{E})$.

1°) a) Soit $x$ un réel quelconque.
Calculer $P(\mathrm{i}x)$ en fonction de $x$ ; donner le résultat sous forme algébrique.

b) Déterminer $x$ tel que $P(\mathrm{i}x)=0$.

En déduire que le polynôme $P(z)$ admet une racine imaginaire pure.

2°) En utilisant la racine déterminée précédemment, déterminer une factorisation de $P(z)$.

3°) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\mathrm{E})$.

Vérifier en utilisant le site dcode.

**16** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z}^2+2\mathrm{i}z-1=0$ $(\mathrm{E})$.

**Indication :** Poser $z=x+\mathrm{i}y$ où $x$ et $y$ sont deux réels et démontrer que $(\mathrm{E})$ est équivalente à un système de deux équations à deux inconnues.
Vérifier en utilisant le site dcode (ou un logiciel de calcul formel tel que XCas).

---

Dans les exercices **17** à **19**, on se place dans le plan complexe $P$ muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

| |
|---|
| Faire un graphique dans chaque cas, en prenant le centimètre pour unité graphique. |

**17** On considère les points $\mathrm{A}(-1-3\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(2-\mathrm{i})$, $\mathrm{C}(3+3\mathrm{i})$ et $\mathrm{D}(\mathrm{i})$.
Déterminer la nature du quadrilatère ABCD en travaillant avec les affixes.

**18** On considère les points $\mathrm{A}(3+2\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(5+4\mathrm{i})$, $\mathrm{C}(6+5\mathrm{i})$.
Démontrer que A, B, C sont alignés en travaillant avec les affixes.

**19** On considère les points $\mathrm{A}(-1+4\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(5-3\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(9+\mathrm{i})$.
Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

**20** Pour tout nombre complexe $z$ on pose $Z=z\times\overline{z}+(2+\mathrm{i})z+(2+3\mathrm{i})\overline{z}+1$.

1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.
Déterminer l'écriture algébrique de $Z$ ; en déduire $\operatorname{Re} Z$ et $\operatorname{Im} Z$ en fonction de $x$ et de $y$.

Dans les questions 2°) et 3°), on se place dans le plan complexe $P$ muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

2°) Déterminer l'ensemble $E$ des points M de $P$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit réel.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter (rédaction sous la forme d'une chaîne d'équivalences)
On rajoutera le nombre de lignes nécessaires et l'on fera attention à bien écrire les symboles d'équivalence les uns sous les autres.

Soit M un point quelconque de $P$ d'affixe $z$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} Z=0 \\ &\Leftrightarrow \ldots. \end{aligned}$$

3°) Déterminer l'ensemble $F$ des points M de $P$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit imaginaire pur.
Représenter $F$ sur un graphique en prenant 2 cm ou 2 « gros » carreaux pour unité graphique.

**21** Le plan complexe $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe $z$ on associe le point $\mathrm{M}'$ d'affixe $z'=2z^2-3\mathrm{i}z$.

1°) a) Sur un graphique, placer les points A, B, C, D, E d'affixes respectives $2\mathrm{i}$, $1$, $1+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $-1$.

<u>On prendra 2 cm (ou 2 « gros carreaux ») pour unité graphique</u>.

b) Déterminer les affixes des points $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$, $\mathrm{C}'$, $\mathrm{D}'$ et $\mathrm{E}'$, puis placer ces points sur le graphique précédent.

*Rappel de notation :*
- On note $z_\mathrm{A}$, $z_\mathrm{B}$, $z_\mathrm{C}$, $z_\mathrm{D}$, $z_\mathrm{E}$ les affixes respectives de A, B, C, D, E.
- On note $z_{\mathrm{A}'}$, $z_{\mathrm{B}'}$, $z_{\mathrm{C}'}$, $z_{\mathrm{D}'}$, $z_{\mathrm{E}'}$ les affixes respectives de $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$, $\mathrm{C}'$, $\mathrm{D}'$, $\mathrm{E}'$.

2°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$, avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.
a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
b) Déterminer et tracer l'ensemble $F$ des points M de $P$ tels que $\mathrm{M}'$ appartienne à l'axe des abscisses.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter.
Soit M un point quelconque de $P$ d'affixe $z$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in F &\Leftrightarrow \mathrm{M}'\in(\mathrm{O}x) \\ &\Leftrightarrow z'\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z'=0 \\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

c) Quelles vérifications peut-on faire par rapport aux points A, B, C, D, E ?

**22** Le plan complexe $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe i et on pose $P^* = P \setminus \{A\}$ (« plan $P$ privé du singleton $\{A\}$ » ou plus court « plan $P$ privé du point A »).
On note $f$ l'application de $P^*$ dans $P$ qui, à tout point M de $P^*$, d'affixe $z \neq i$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \dfrac{iz}{z - i}$.

(L'affixe de l'image $M'$ du point M par $f$ est donc donnée par $z_{M'} = \dfrac{iz_M}{z_M - i}$ ; attention alors à la place du prime !).
1°) Déterminer les points invariants par $f$ (c'est-à-dire confondus avec leur image).
On rédigera ainsi la recherche : « M est invariant par $f$ si et seulement si $M' = M$ » sous la forme d'une chaîne d'équivalences et l'on conclura ainsi : « Les points invariants par $f$ sont les points …. et ….. ».

2°) Soit B le point d'affixe 2.
a) Déterminer l'affixe du point B′ image de B par $f$ (il s'agit donc de calculer $z_{B'}$ ; ⚠ dans la notation à la place du prime).
b) Déterminer l'affixe du point C, antécédent de B par $f$. Que remarque-t-on ?

3°) Étant donné un nombre complexe $z$ distinct de i, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.
a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
b) Déterminer l'ensemble $E$ des points M du plan d'affixe $z$, distincts de A, pour lesquels $z'$ est réel.

Soit M un point quelconque de $P$ d'affixe $z \neq i$.
On pose $z = x + iy$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0 \\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Faire un graphique. <u>On prendra 4 cm (ou 4 « gros carreaux ») pour unité graphique</u>.
Placer le point A et représenter l'ensemble $E$.

**23** À tout nombre complexe $z \neq 4$, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{iz - 4}{z - 4}$.
1°) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, avec $x$, $y$, $X$, $Y$ réels.
Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.
2°) Le plan complexe $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 4.
Déterminer l'ensemble $E$ des points M du plan complexe, distincts de A et d'affixe $z$, tels que $Z$ soit réel.
Faire un graphique. <u>On prendra 2 cm (ou 2 « gros carreaux ») pour unité graphique</u>.
Placer le point A et représenter l'ensemble $E$.

**24** On considère la fonction $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 - (2 + i)z + i$.
Écrire une fonction Python d'en-tête `def image(z):` qui prend pour argument un nombre complexe $z$ et qui renvoie son image par $f$.
Taper puis tester le programme sur calculatrice ou sur ordinateur.

**25** On considère la fonction $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z - 4\bar{z}$.
Écrire une fonction Python d'en-tête `def image(z):` qui prend pour argument un nombre complexe $z$ et qui renvoie son image par $f$.
Taper puis tester le programme sur calculatrice ou sur ordinateur.

# Corrigé

$\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples de réels.
$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
Le 2 en exposant se réfère au fait qu'un couple est formé de deux éléments.
Un couple est noté avec des parenthèses. Il y a un ordre.

## $\boxed{1}$ Calculs dans $\mathbb{C}$

$z_1 = 8 - \mathrm{i}$ ; $z_2 = -4$ ; $z_3 = 29$, $z_4 = -\dfrac{1}{2} + 4\mathrm{i}$ ; $z_5 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ ; $z_6 = 2 + \mathrm{i}$ ; $z_7 = -\dfrac{\mathrm{i}}{4}$

**Conseil :** Vérifier les calculs avec la calculatrice ou avec un logiciel de calcul formel.

**Détail des calculs :**

$$z_1 = (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 6 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 8 - \mathrm{i}$$

On applique la double distributivité.

On n'écrit pas $\mathrm{Re}\, z_1 = 8$ ; $\mathrm{Im}\, z_1 = -1$ car ce n'est pas demandé.
L'énoncé demande juste de calculer et de donner le résultat sous forme algébrique ce que nous avons fait.

$$z_2 = (1-\mathrm{i})^4 = \left[(1-\mathrm{i})^2\right]^2 = (1 - 2\mathrm{i} - 1)^2 = (-2\mathrm{i})^2 = -4$$

On pourrait aussi utiliser l'identité remarquable $(a-b)^4$ et le triangle de Pascal.

$$z_3 = (5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i}) = 5^2 - (2\mathrm{i})^2 = 25 + 4 = 29$$

$$z_4 = \left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right) + (\mathrm{i} - 1) = -\frac{1}{2} + 4\mathrm{i}$$ (« on fait tomber les parenthèses »)

$$z_5 = \frac{1}{2-\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{2+\mathrm{i}}{2^2 - \mathrm{i}^2} = \frac{2+\mathrm{i}}{2^2+1} = \frac{2+\mathrm{i}}{5}$$

On applique l'identité : $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Le résultat $z_5 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$ est considéré comme forme algébrique (il n'est pas nécessaire de repasser à $z_5 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$)

$z_5 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$ : on n'est pas obligé de « séparer ».

$$z_6 = \frac{(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1 + 2\mathrm{i} + 3}{2} = \frac{4+2\mathrm{i}}{2} = 2 + \mathrm{i}$$

$$z_7 = \frac{1}{4\mathrm{i}} = \frac{1 \times \mathrm{i}}{4\mathrm{i} \times \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{-4} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par i.

## $\boxed{2}$ Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$

On rédige par équivalences.

$(1) \Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$

On trouve $S = \left\{-\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}\mathrm{i}\right\}$.

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\mathrm{i}z - 3 = z + \mathrm{i}$ $(1)$.**

On résout comme une équation normale avec les réels.
On rassemble les $z$ dans le membre de gauche et les nombres dans le membre de droite.

$(1) \Leftrightarrow 2\mathrm{i}z - z = \mathrm{i} + 3$

$\Leftrightarrow (2\mathrm{i} - 1)z = \mathrm{i} + 3$ (on a factorisé le membre de gauche par $z$)

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{i}+3}{2\mathrm{i}-1}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(\mathrm{i}+3)(2\mathrm{i}+1)}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}$ (attention : $2\mathrm{i}+1$ n'est pas le conjugué de $2\mathrm{i}-1$ ! Le conjugué de $2\mathrm{i}-1$ est $-2\mathrm{i}-1$)

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 6\mathrm{i} + 3}{4\mathrm{i}^2 - 1}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+7\mathrm{i}}{-5}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{1+7\mathrm{i}}{5}$

[ $\Leftrightarrow z = \dfrac{-1-7\mathrm{i}}{5}$ ligne pas forcément utile]

[ $\Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}\mathrm{i}$ écriture pas forcément utile]

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(1)$.

$$S=\left\{\frac{-1-7\mathrm{i}}{5}\right\}$$

On pourrait laisser le résultat sous la forme d'un seul quotient.

Comme l'ensemble $S$ est constitué d'un seul élément, on dit que $S$ est un singleton.

## $\boxed{3}$ Résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{C}^2$

On raisonne encore par équivalences pour la résolution du système.

On résout le système dans $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}^2$ désigne l'ensemble des couples de nombres complexes).
On trouve : $S=\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{i}}{4}\,;\,\frac{1}{2}+\frac{5\mathrm{i}}{4}\right)\right\}$ (attention à la notation : parenthèses pour le couple et accolades pour l'ensemble).

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système $(\Sigma)$ $\begin{cases}3z+z'=5+2\mathrm{i}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$.**

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations d'inconnue $(z\,;\,z')\in\mathbb{C}^2$.
On calcule son déterminant.

**Rappel sur les systèmes linéaires de deux équations à coefficients réels dont l'inconnue est un couple :**

Il s'agit d'un système de la forme $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ où $a$, $b$, $a'$, $b'$ sont des réels et où l'inconnue est le couple $(x\,;\,y)$).

Définition et notation :

Le déterminant est le nombre $D=ab'-a'b$.

On le note $D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$.

Propriété :

Lorsque le déterminant est non nul, le système admet un unique couple solution.

Le résultat est encore valable pour les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues à coefficients complexes.

Calculons le déterminant $D$ du système $(\Sigma)$.

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\times(-1)-1\times1=-4$$

$D\neq0$ donc le système admet un unique couple solution.

Pour déterminer ce couple, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases}3z+z'=5+2\mathrm{i}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\times1\\ \times1\end{vmatrix}\qquad\qquad\begin{vmatrix}\times1\\ \times(-3)\end{vmatrix}$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

pour annuler les $z'$    pour annuler les $z$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}4z=6+\mathrm{i}\\ 4z'=2+5\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\mathrm{i}}{4}\\ z'=\dfrac{2+5\mathrm{i}}{4}\end{cases}$$

Le couple solution du système est $\left(\frac{6+\mathrm{i}}{4}\,;\,\frac{2+5\mathrm{i}}{4}\right)$.

L'ensemble des solutions du système est $S=\left\{\left(\frac{6+\mathrm{i}}{4}\,;\,\frac{2+5\mathrm{i}}{4}\right)\right\}$.

On effectue une vérification rapide.

Autre méthode :

On résout le système par combinaisons.

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}4z=6+\mathrm{i}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$$ (on ajoute la première et la deuxième ligne)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\mathrm{i}}{4}\\ z-z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\mathrm{i}}{4}\\ z'=z-1+\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{6+\mathrm{i}}{4}\\ z'=\dfrac{6+\mathrm{i}}{4}-1+\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{4} \\ z' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}\mathrm{i} \end{cases}$$

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\Sigma)$.

$$S = \left\{ \left( \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{4} ; \frac{1}{2} + \frac{5\mathrm{i}}{4} \right) \right\}$$

On lit cette dernière égalité d'ensembles : « $S$ est l'ensemble constitué du couple $\left( \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{4} ; \frac{1}{2} + \frac{5\mathrm{i}}{4} \right)$ ».

On notera la présence d'accolades pour noter l'ensemble et de parenthèses pour noter le couple (il y a un ordre : d'abord $z$ puis $z'$).

Comme l'ensemble $S$ est constitué d'un seul élément, on dit que $S$ est un singleton.

## $\boxed{4}$ Calcul littéral dans $\mathbb{C}$

$\mathrm{Re}\, Z = x^2 - y^2 - x$ ; $\mathrm{Im}\, Z = 2xy - y$

**Solution détaillée :**

$Z = z^2 - z$

$z = x + \mathrm{i}y \quad (x ; y) \in \mathbb{R}^2$

**Déterminons la forme algébrique de *Z*.**

$$\begin{aligned} Z &= z^2 - z \\ &= (x + \mathrm{i}y)^2 - (x + \mathrm{i}y) \end{aligned}$$

(on est obligé d'utiliser des parenthèses comme on le fait couramment en algèbre)

$$\begin{aligned} &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - x - \mathrm{i}y \\ &= x^2 - y^2 - x + \mathrm{i}(2xy - y) \end{aligned}$$

Comme $x$ et $y$ sont des réels, $x^2 - y^2 - x$ et $2xy - y$ sont des réels.
Donc on a bien déterminé l'écriture algébrique de $Z$.

**Déduisons-en Re *Z* et Im *Z* en fonction de *x* et de *y*.**

D'après le résultat obtenu, on a :

$\mathrm{Re}\, Z = x^2 - y^2 - x$ (partie sans i)

$\mathrm{Im}\, Z = 2xy - y$

Il serait intéressant de vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

**Rappel :**

$z = \boxed{a} + \mathrm{i}\boxed{b}$

Re $z$ Im $z$

$z = \underbrace{a}_{\mathrm{Re}\, z} + \mathrm{i}\underbrace{b}_{\mathrm{Im}\, z}$

$Z = x^2 \; + 2x\mathrm{i}y \; - y^2 \; - x \; - \mathrm{i}y$

Les bulles de couleur ça aide pas mal.

Sur l'original, j'avais fait en turquoise pour le réelles et en vert pomme pour les i.

## $\boxed{5}$ Calcul littéral dans $\mathbb{C}$

Il faut mener les calculs intelligemment ; $\mathrm{Re}\, Z = \dfrac{x^2 + y^2 - x}{(x-1)^2 + y^2}$ ; $\mathrm{Im}\, Z = -\dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}$.

**Solution détaillée :**

$Z = \dfrac{z}{z-1} \quad (z \neq 1)$

$z = x + \mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ étant deux réels tels que $(x ; y) \neq (1 ; 0)$).

On peut aussi écrire $(x ; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1 ; 0)\}$.

**Exprimons Re *Z* et Im *Z* en fonction de *x* et de *y*.**

La méthode consiste à chercher la forme algébrique de $Z$.

On commence par remplacer tous les $z$ par $x + \mathrm{i}y$.

On va chercher à écrire $Z$ sous forme algébrique.

Attention à l'organisation du calcul (calcul littéral complexe).
On commence par « regrouper les i » au dénominateur.

$$Z=\frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y-1}$$
$$=\frac{x+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \quad *$$
$$=\frac{(x+\mathrm{i}y)\left[(x-1)-\mathrm{i}y\right]}{\left[(x-1)+\mathrm{i}y\right]\left[(x-1)-\mathrm{i}y\right]}$$ ** (car le conjugué de $(x-1)+\mathrm{i}y$ est $(x-1)-\mathrm{i}y$ )

$$=\frac{x(x-1)-\mathrm{i}xy+\mathrm{i}y(x-1)-\mathrm{i}^2y^2}{(x-1)^2+y^2}$$ (développement intelligent « en haut » ; identité remarquable $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+b^2$ « en bas »)

$$=\frac{x(x-1)+y^2+\mathrm{i}\left(-xy+y(x-1)\right)}{(x-1)^2+y^2} \quad ***$$
$$=\frac{x^2+y^2-x-\mathrm{i}y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$ (on sépare en 2)

Comme $x$ et $y$ sont des réels, $\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et $-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$ sont des réels.

On en déduit que $\operatorname{Re} Z=\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$ et que $\operatorname{Im} Z=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$.

* On fait en sorte que numérateur et dénominateur soient sous forme algébrique ce qui impose de regrouper le $x$ et le – 1 au dénominateur qu'on met dans une même parenthèse (étape obligatoire). On a bien le droit de mettre $x-1$ dans une même parenthèse.

**$\boxed{5}$ Le 13-9-2016**

Question de Mayllis Lasri

$$Z=\frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y-1}$$
$$Z=\frac{x+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}$$

Question : Comment est-on passé de ce dénominateur au suivant ?
Réponse : On regroupe le $x$ et le – 1.

** On complique momentanément l'expression mais cela est nécessaire pour trouver le résultat.

*** Dès cette étape, avec la technique de développement intelligent, on peut dire que :
$\operatorname{Re} Z=\frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im} Z=\frac{-xy+y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$.

Pour le développement du produit du numérateur, on effectue les gestes associés à la double distributivité.

On arrange ensuite le numérateur.

Il n'y a pas de raison objective à ne pas développer les dénominateurs pour l'instant.

Utiliser la règle pour tirer les traits de fractions.

$\boxed{6}$

$z=(\lambda+\mathrm{i})\left[\lambda+5-\mathrm{i}(\lambda-7)\right] \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

**Déterminons $\lambda$ tel que $z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.**

Attention à ne pas développer l'expression de manière anarchique. Il faut développer intelligemment le produit (développement à 4 termes qui permet de faire apparaître tout de suite les parties réelles et les parties imaginaires).

$$z=(\lambda+\mathrm{i})\left[\lambda+5-\mathrm{i}(\lambda-7)\right]$$
$$=(\lambda+\mathrm{i})\left[(\lambda+5)-\mathrm{i}(\lambda-7)\right]$$
$$=\lambda(\lambda+5)-\mathrm{i}^2(\lambda-7)+\mathrm{i}(\lambda+5)-\mathrm{i}\lambda(\lambda-7)$$ (détailler ce passage ; attention à l'organisation du calcul)
$$=\lambda^2+6\lambda-7+\mathrm{i}\left(-\lambda^2+8\lambda+5\right)$$

Pour le passage entre la 2e et la 3e ligne de calcul, on effectue les gestes associés au développement.

Comme $\lambda$ est un réel, $\lambda^2+6\lambda-7$ et $-\lambda^2+8\lambda+5$ sont des réels.

Donc : $\operatorname{Re} z=\lambda^2+6\lambda-7$ et $\operatorname{Im} z=-\lambda^2+8\lambda+5$.

Version courte :

$z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2+6\lambda-7=0$

$\Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=-7$ (résolution de l'équation du second degré par racine évidente ou calcul de discriminant réduit ou même calculatrice)

Pour que $z$ soit imaginaire pur, il faut et il suffit que $\lambda$ soit égal à 1 ou à – 7.

Version longue :

$z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2+6\lambda-7=0$

Considérons le polynôme $x^2+6x-7$.

Ce polynôme admet deux racines dans $\mathbb{R}$ : 1 (racine évidente) et – 7 (obtenue par produit).

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -7$

Pour que $z$ soit imaginaire pur, il faut et il suffit que $\lambda$ soit égal à 1 ou à – 7.

*Remarque :* On n'écrit pas $S = \{1\,;-7\}$ car l'énoncé ne demande pas de résoudre une équation.

On peut faire au brouillon une vérification mais ce n'est pas du tout utile car on a raisonné par équivalences (pour $\lambda = 1$, $z = 12i$ et pour $\lambda = -7$, $z = -100i$).

## $\boxed{7}$ Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$

On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels.

$S = \left\{\dfrac{14 - 13i}{3}\right\}$

**Solution détaillée :**

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad (1)$.

Dans cette équation, on observe la présence de $z$ et de $\bar{z}$ (conjugué de $z$).
Il n'y a pas de relation entre $z$ et $\bar{z}$ (en particulier, $\bar{z}$ n'est pas égal à $-z$).

On est obligé de « passer en $x$ et $y$ » (ou plutôt en $x + iy$).
Trouver $z$ équivaut à trouver $x$ et $y$.
À la fin, nous donnerons les solutions sous la forme $x + iy$ en remplaçant $x$ et $y$ par les valeurs trouvées.
Il faut bien avoir conscience que ce l'on cherche c'est $z$ et non $\bar{z}$.

On pose $z = x + iy \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On a alors : $\bar{z} = x - iy$ (par définition le conjugué d'un nombre complexe est toujours donné par cette formule).

*Remarque importante :*

On pose $z = x + iy \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

On ne pose pas $\bar{z} = x - iy$ car $\bar{z}$ est défini dans le cours.

L'inconnue de l'équation est $z$.
On cherche donc $z$ et pas $\bar{z}$.
Donc on « fait » $z$ et pas $\bar{z}$.

$(1) \Leftrightarrow 2(x + iy) + i(x - iy) = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow 2x + 2iy + ix - i^2 y = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow 2x + 2iy + ix + y = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow 2x + y + i(x + 2y) = 5 - 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 & (1') \\ x + 2y = -4 & (2') \end{cases}$ (On traduit sous forme de système ; en effet, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales*)

On n'écrit rien comme rédaction. On peut juste éventuellement ajouter à droite entre parenthèses « par identification des parties réelles et imaginaires »).

On identifie les parties réelles et imaginaires du 1er et du 2e membre de l'équation.
Il peut être pratique au brouillon d'entourer les termes.

Pour que cette identification soit possible, il faut écrire le 1er et le second membre sous forme algébrique.

Le système a pour déterminant 3 donc il admet un unique couple solution.

L'accolade veut dire « et ».

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x + 2(5 - 2x) = -4 \end{cases}$ (on résout le système linéaire par la méthode que l'on veut, ici par substitution)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ -3x = -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2 \times \dfrac{14}{3} \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{13}{3} \\ x = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{14}{3} - \dfrac{13}{3}i$ [ligne facultative / attention, on cherche $z$ et non $\bar{z}$]

$\Leftrightarrow z = \dfrac{14 - 13i}{3}$ [cette ligne doit impérativement être écrite]

Pour la résolution du système $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1') \\ x + 2y = -4 & (2') \end{cases}$, on peut utiliser la méthode des combinaisons.

On peut utiliser la méthode des multiplicateurs ou la méthode matricielle ou même appliquer directement les formules de Cramer.

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=-4 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 2 \\ \times(-1) \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times(-1) \\ \times 2 \end{matrix}$$

On multiplie d'abord $(1')$ par 2 et $(2')$ par – 1 puis on additionne membre à membre les deux équations.
On multiplie ensuite $(1')$ par 1 et $(2')$ par – 2 puis on additionne membre à membre les deux équations.

$$\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=14 \\ 3y=-13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ y=-\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $(1)$ est $S=\left\{\dfrac{14-13\text{i}}{3}\right\}$.

La résolution du système peut s'effectuer avec la calculatrice ce qui évite toutes les étapes de calcul.

* **Rappel de la règle utilisée :**

$a$, $b$, $a'$, $b'$ sont des nombres réels.

$$a+\text{i}b=a'+\text{i}b' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

**Remarques :**

• On peut observer que $\overline{z}=\dfrac{14+13\text{i}}{3}$ mais ce n'est pas ce que l'on demande ; on cherche $z$ et non $\overline{z}$.

• S'il n'y avait pas eu le $\overline{z}$ dans l'équation, on n'aurait pas eu besoin de poser $\overline{z}=x+\text{i}y$.

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour ce type d'exercices est évidemment très intéressante.

**Résumé de la démarche de cet exercice :**

équation à inconnue complexe

$\downarrow$

système à 2 inconnues réelles

$\downarrow$

solution complexe de l'équation

Durant la résolution, on oublie que $x=\text{Re}\,z$ et que $y=\text{Im}\,z$.
Pour la dernière ligne, on se souvient que $x=\text{Re}\,z$ et que $y=\text{Im}\,z$.

## $\boxed{8}$ Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$

$S=\{2\text{i}\,;-5\text{i}\}$

**Solution détaillée :**

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\text{i}z+2)(\overline{z}-5\text{i})=0 \quad (1)$.

Il s'agit d'une équation « produit nul ».

La règle du produit nul dans $\mathbb{C}$ est la même que dans $\mathbb{R}$ :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \text{i}z+2=0 \text{ ou } \overline{z}-5\text{i}=0 \\
&\Leftrightarrow z=-\frac{2}{\text{i}} \text{ ou } \overline{z}=5\text{i} \\
&\Leftrightarrow z=-\frac{2\times\text{i}}{\text{i}\times\text{i}} \text{ ou } z=-5\text{i} \\
&\Leftrightarrow z=-\frac{2\text{i}}{-1} \text{ ou } z=-5\text{i} \\
&\Leftrightarrow z=2\text{i} \text{ ou } z=-5\text{i}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\{2\text{i}\,;-5\text{i}\}$.

On ne laisse pas la solution sous la forme $-\dfrac{2}{\text{i}}$.
On transforme l'écriture de manière à obtenir la forme algébrique (sans i au dénominateur).
On obtient : $-\dfrac{2}{\text{i}}=2\text{i}$.

On retiendra que lorsque l'on a une équation avec des $\overline{z}$, dans certains cas, il est utile de poser $z=x+\text{i}y$ ; dans d'autres, au contraire, mieux veut ne pas poser $z=x+\text{i}y$.
Quand on a une équation avec des $\overline{z}$, il n'est pas forcément nécessaire de poser $z=x+\text{i}y$.

$\boxed{9}$

Dans cet exercice, on rédige par « chaîne d'équivalences ».

1°) $z_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Avant de commencer, on peut écrire $\operatorname{Re} z_1 = \cos\alpha$ et $\operatorname{Im} z_1 = \sin\alpha$.

**Déterminons $\alpha$ tel que $z_1 \in \mathbb{R}$.**

$$\begin{aligned} z_1 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

*Remarques :*

• On peut également rédiger ainsi le début (petite variante) :

$z_1$ réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im} z_1 = 0$

• On n'écrit pas $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Il est intéressant d'expliquer pourquoi dans ce cas les deux familles de solutions données par la règle ci-dessous peuvent être rassemblées en une seule famille de solutions.

$$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = (2k'+1)\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

La première famille donne tous les multiples pairs de π.
La deuxième famille donne tous les multiples impairs de π.
La réunion de ces deux familles donne donc tous les multiples de π.

2°) $z_2 = (1 - 2\cos\alpha) + \mathrm{i}\sin 2\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Avant de commencer, on peut écrire $\operatorname{Re} z_2 = 1 - 2\cos\alpha$ et $\operatorname{Im} z_2 = \sin 2\alpha$.

**Déterminons $\alpha$ tel que $z_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.**

$$\begin{aligned} z_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\cos\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**Rappel sur les équations trigonométriques :**

$\cos a = \cos b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = -b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$
$\sin a = \sin b$ si et seulement si $a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $a = \pi - b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

Pour les équations $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$, $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, il n'y a qu'une famille de solutions (utiliser un cercle trigonométrique).

$\boxed{10}$ **Méthode :** changement d'inconnue $Z = \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}$ ; $S = \left\{-\dfrac{7}{4} - \dfrac{5\mathrm{i}}{4} ; -\dfrac{13}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\right\}$

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right)^2 - 6\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}\right) + 13 = 0$ (1).**

On résout dans $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ ($-2$ est valeur interdite).

On pose $Z = \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2}$ (changement d'inconnue).

L'équation $(1)$ s'écrit : $Z^2 - 6Z + 13 = 0$ $(1')$.

Considérons le polynôme $Z^2 - 6Z + 13$ avec $Z \in \mathbb{C}$.

Il s'agit d'un polynôme du second degré à coefficients réels.

$\Delta' = 9 - 1 \times 13 = -4$

On a $\Delta' < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées : $Z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$ et $Z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2} = 3 - 2\mathrm{i}$ ou $\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2} = 3 + 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z - 3\mathrm{i} = (3-2\mathrm{i})(z+2)$ ou $z - 3\mathrm{i} = (3+2\mathrm{i})(z+2)$

$\Leftrightarrow z - 3\mathrm{i} = (3-2\mathrm{i})z + 6 - 4\mathrm{i}$ (on développe astucieusement) ou $z - 3\mathrm{i} = (3+2\mathrm{i})z + 6 + 4\mathrm{i}$ *

$\Leftrightarrow z - (3-2\mathrm{i})z = 6 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i}$ ou $z - (3+2\mathrm{i})z = 6 + 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow [1 - (3-2\mathrm{i})]z = 6 - \mathrm{i}$ ou $[1 - (3+2\mathrm{i})]z = 6 + 7\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow (-2+2\mathrm{i})z = 6 - \mathrm{i}$ ou $(-2-2\mathrm{i})z = 6 + 7\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{6-\mathrm{i}}{-2+2\mathrm{i}}$ ou $z = \dfrac{6+7\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(6-\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})}{(-2+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})}$ ou $z = \dfrac{(6+7\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}{(-2-2\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{7}{4} - \dfrac{5\mathrm{i}}{4}$ ou $z = -\dfrac{13}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}$

Ces deux valeurs sont acceptables car elles sont toutes les deux différentes de $-2$.

* On a développé le second membre ainsi : $(3-2\mathrm{i})(z+2) = (3-2\mathrm{i}) \times z + (3-2\mathrm{i}) \times 2$ en se référant à la règle de distributivité $k(a+b) = ka + kb$. En effet, en développant ainsi, cela simplifie pour la suite des calculs.

L'ensemble des solutions de l'équation $(1)$ est $\boldsymbol{S = \left\{-\dfrac{7}{4} - \dfrac{5\mathrm{i}}{4} ; -\dfrac{13}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\right\}}$.

$\boxed{11}$ $S = \left\{1 ; -1 ; \mathrm{i}\sqrt{3} ; -\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$ (1).**

Il s'agit d'une équation bicarrée (c'est une équation polynomiale du quatrième degré qui ne comporte pas de terme du premier et du troisième degré).

On pose $Z = z^2$ (changement d'inconnue).

L'équation $(1)$ s'écrit : $Z^2 + 2Z - 3 = 0$ $(1')$.

On obtient ainsi une équation du second degré.

Cette dernière équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ : $Z_1 = 1$ (racine évidente) et $Z_2 = -3$ (obtenue par produit).
Autre rédaction :
On observe que $Z_1 = 1$ est une racine évidente.
L'autre racine est $Z_2 = -3$ (obtenue par la formule du produit des racines d'un polynôme du second degré).

**N.B. :** On peut aussi calculer le discriminant $\Delta = 16$, ou mieux le discriminant réduit $\Delta' = 4$.

Donc $(1') \Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = -3$

Or $Z = z^2$.

D'où $(1) \Leftrightarrow z^2 = 1$ ou $z^2 = -3$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation $(1)$ est $\boldsymbol{S = \left\{1 ; -1 ; \mathrm{i}\sqrt{3} ; -\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}}$.

$\boxed{12}$ $S = \{(1+4\mathrm{i} ; 1-4\mathrm{i}) ; (1-4\mathrm{i} ; 1+4\mathrm{i})\}$

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système $(\Sigma)$ $\begin{cases} z + z' = 2 & (1) \\ zz' = 17 & (2) \end{cases}$.**

Ce système n'est pas un système linéaire (un système linéaire est un système de la forme $\begin{cases} az + bz' = c \\ a'z + b'z' = c' \end{cases}$) : la 1ère équation est une somme mais la 2e équation est un produit.

Autrement dit, l'équation $z + z' = 2$ est bien une équation linéaire mais l'équation $zz' = 17$ n'est pas linéaire.

Donc la seule méthode de résolution est la méthode de substitution.

Le système est « **symétrique** » en $z$ et $z'$ (c'est-à-dire que si le couple $(z, z')$ est solution du système, alors le couple $(z', z)$ est aussi solution du système).

1ère méthode :

C'est la meilleure méthode car la plus courte.

Résoudre le système (Σ) revient à déterminer deux nombres complexes connaissant leur somme (2) et leur produit (17).

$z$ et $z'$ sont les solutions de l'équation $Z^2-2Z+17=0$ (« équation résolvante »).

On résout cette équation et on trouve les couples solutions du système.
Considérons le polynôme $z^2-2z+17$.

Recensement des coefficients :

$a=1$ ; $b=-2$ ; $c=17$

Calcul du discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta'&=b'^2-ac\\&=-16\end{aligned}$$

On a : $\Delta'<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a} \qquad z_2=\frac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

$$z_1=1+4\mathrm{i} \qquad z_2=1-4\mathrm{i}$$

**Complément sur somme et produit des racines : recherche de deux nombres complexes connaissant la somme et le produit**

### 1°) Étude de la condition nécessaire

$a$ et $b$ sont deux complexes.

$a$ et $b$ sont solutions de l'équation $(z-a)(z-b)=0$

$z^2-az-bz+ab=0$ (on développe)

$z^2-\underbrace{(a+b)}_{S}z+\underbrace{ab}_{P}=0$ (on réduit)

**Conclusion :**

$a$ et $b$ sont solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$ d'inconnue $z$ avec $S=a+b$ et $P=ab$.

### 2°) Étude de la condition suffisante

Si deux nombres sont solutions de l'équation $z^2-Sz+P=0$,
alors leur somme est égale à $-\frac{-S}{1}=S$ (le 1 au dénominateur correspond au coefficient de $z^2$) et leur produit est égal à $\frac{P}{1}=P$.

On peut résoudre le système en utilisant un LCF.

2e méthode :

Cette méthode est plus longue. On résout directement le système.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z'=2-z\\zz'=17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z'=2-z\\z(2-z)=17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z'=2-z & (1')\\z^2-2z+17=0 & (2')\end{cases}$$

Considérons le polynôme $z^2-2z+17$.

Recensement des coefficients :

$a=1$ ; $b=-2$ ; $c=17$

Calcul du discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta'&=b'^2-ac\\&=-16\end{aligned}$$

(**Remarque :** on peut très bien utiliser le discriminant réduit $\Delta'$ ; c'est même plus simple).

On a : $\Delta'<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a} \qquad z_2=\frac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

$$z_1=1+4\mathrm{i} \qquad z_2=1-4\mathrm{i}$$

**1er cas :** $z=1+4\mathrm{i}$
L'équation (1') donne alors $z'=1-4\mathrm{i}$.

**2e cas :** $z=1-4\mathrm{i}$
L'équation (1') donne alors $z'=1+4\mathrm{i}$.

**Conclusion :**

On peut rédiger de deux manières :

**1ère manière :** L'ensemble des solutions du système (Σ) est $S=\{(1+4\mathrm{i}\,;1-4\mathrm{i})\,;(1-4\mathrm{i}\,;1+4\mathrm{i})\}$.

**2e manière :** Les solutions du système (Σ) sont les couples $(1+4\mathrm{i}\,;1-4\mathrm{i})$ et $(1-4\mathrm{i}\,;1+4\mathrm{i})$.

On retrouve le caractère symétrique du système dans l'ensemble des solutions.

**Mauvaise méthode :** Poser $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels ; les calculs sont inextricables et n'aboutissent pas.

$\boxed{13}$ 1°) $P(Z) = (Z+1)(Z-1)(Z+\mathrm{i})(Z-\mathrm{i})$ ; 2°) $S = \left\{0 ; -2 ; -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} ; -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$

**Solution détaillée :**

1°) $P(Z) = Z^4 - 1$

**Factorisons $P(Z)$ en produit de facteurs du premier degré.**

• L'énoncé aurait très bien pu dire « Factoriser au maximum le polynôme $P(Z)$ ».

• Un facteur du premier degré est un facteur de la forme $\alpha Z + \beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des complexes.

On effectue une double factorisation.
On procède en deux étapes.

$$\begin{aligned} P(Z) &= \left(Z^2\right)^2 - 1^2 \\ &= \left(Z^2 - 1\right)\left(Z^2 + 1\right) \quad \text{(factorisation de } P(Z) \text{ en facteurs du second degré)} \\ &= \left(Z^2 - 1^2\right)\left(Z^2 - \mathrm{i}^2\right) \\ &= (Z-1)(Z+1)(Z-\mathrm{i})(Z+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

L'utilisation d'un LCF peut s'avérer extrêmement utile pour ce type de question.
Il faudra néanmoins préciser préalablement au logiciel que l'on désire obtenir une factorisation dans $\mathbb{C}$ (avec XCas, il faut aller dans Config et cocher la case complexe).
Le logiciel donnera alors toujours la factorisation maximale du polynôme (en produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}$ ; en produit de facteurs du premier ou du second degré dans $\mathbb{R}$).

**Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$ (1).**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (Z+1)(Z-1)(Z-\mathrm{i})(Z+\mathrm{i}) = 0 \\ &\Leftrightarrow Z = 1 \text{ ou } Z = -1 \text{ ou } Z = \mathrm{i} \text{ ou } Z = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $(1)$ sont 1, – 1, i et – i.

On vérifie ce résultat avec l'application de résolution des équations polynomiales de la calculatrice.

2°) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ (E).**

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{2z+1}{z-1}\right) = 0 \qquad \text{(image de } \frac{2z+1}{z-1} \text{ par } P\text{, sachant que, par définition, } P(Z) = Z^4 - 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = 1 \ (1) \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = -1 \ (2) \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = \mathrm{i} \ (3) \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = -\mathrm{i} \ (4)$$

On résout séparément chacune des équations (1), (2), (3) ou (4).
La valeur interdite de chacune de ces équations est 1.
On se ramène par produit en croix à des équations du premier degré.

On résout dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ chacune des équations.
On effectue chaque fois un produit en croix pour commencer.

| (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|
| $(1) \Leftrightarrow 2z+1 = z-1$<br>$\Leftrightarrow z = -2$ | $(2) \Leftrightarrow 2z+1 = -z+1$<br>$\Leftrightarrow z = 0$ | $(3) \Leftrightarrow 2z+1 = \mathrm{i}z - \mathrm{i}$<br>$\Leftrightarrow (2-\mathrm{i})z = -1-\mathrm{i}$<br>$\Leftrightarrow z = \frac{-1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$<br>$\Leftrightarrow z = \frac{(-1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$<br>$\Leftrightarrow z = \frac{-1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$<br>$\Leftrightarrow z = \frac{-1-3\mathrm{i}}{5}$<br>[$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$] | $(4) \Leftrightarrow z = \frac{-1+3\mathrm{i}}{5}$<br>[$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$] |

bonnes écritures

Chacun de ces nombres est différent de 1 donc on peut les garder comme solutions.

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E})$.

$$S = \left\{0 ; -2 ; \frac{-1-3\mathrm{i}}{5} ; \frac{-1+3\mathrm{i}}{5}\right\} \quad \left[\text{ou } S = \left\{0 ; -2 ; -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} ; -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right\}\right]$$

*Variante :*

On utilise le changement d'inconnue $Z = \frac{2z+1}{z-1}$.

## $\boxed{14}$ Résolution d'une équation réciproque ou équation symétrique dans $\mathbb{C}$

**Solution détaillée :**

$z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$ (E)

Il s'agit d'une **équation réciproque ou équation symétrique** du quatrième degré (de la forme $az^4+bz^3+cz^2+bz+a=0$) ; dans ce cas, on utilise toujours le changement d'inconnue $Z=z+\frac{1}{z}$ (ce changement d'inconnue sera toujours donné cette année).

1°) **Vérifions que 0 n'est pas solution de (E).**

*Méthode :*

Pour savoir si 0 est solution de l'équation (E), on remplace $z$ par 0 dans le premier membre de l'équation (on effectue un calcul et on n'écrit pas (E) $\Leftrightarrow$ … ).

$0^4-5\times0^3+6\times0^2-5\times0+1=1$ donc 0 n'est pas solution de (E).

2°) $\boldsymbol{Z=z+\frac{1}{z}}$

a) **Calculons $\boldsymbol{Z^2}$ en fonction de $\boldsymbol{z}$.**

$$\begin{aligned}Z^2&=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\\&=z^2+\left(\frac{1}{z}\right)^2+2\times z\times\frac{1}{z}\qquad\text{(identité remarquable)}\\&=z^2+\frac{1}{z^2}+2\times\cancel{z}\times\frac{1}{\cancel{z}}\\&=z^2+\frac{1}{z^2}+2\end{aligned}$$

**b) Démontrons que $\boldsymbol{z}$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Z^2-5Z+4=0}$ (F).**

Il s'agit de démontrer une équivalence.

On va procéder par chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned}z\text{ est solution de (E)}&\Leftrightarrow z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0\\&\Leftrightarrow z^2-5z+6-\frac{5}{z}+\frac{1}{z^2}=0\qquad\text{(on divise les deux membres par } z^2 \text{ sachant que } z\neq0\text{)}\\&\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}-5z-\frac{5}{z}+6=0\\&\Leftrightarrow\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-5\left(z+\frac{1}{z}\right)+6=0\\&\Leftrightarrow\left(Z^2-2\right)-5Z+6=0\qquad\text{(on utilise } Z^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2 \text{ d'où } z^2+\frac{1}{z^2}=Z^2-2\text{)}\\&\Leftrightarrow Z^2-5Z+4=0\quad\text{(F)}\end{aligned}$$

3°) **Résolvons (F).**

(F) est une équation du second degré à coefficients réels.
(F) admet deux racines dans $\mathbb{C}$ : 1 (racine évidente) et 4 (obtenue par produit).

On n'écrit pas l'ensemble des solutions de $(\text{F})$ car $(\text{F})$ n'est qu'une équation auxiliaire pour résoudre l'équation $(\text{E})$.

**Rappel : somme et produit des racines d'une équation du second degré à coefficients réels**

On note $z_1$ et $z_2$ les racines complexes d'une équation de la forme $az^2+bz+c=0$ où $a$, $b$, $c$ sont trois réels, $a$ étant non nul.
On a : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

4°) **Déduisons-en les solutions de (E).**

$$(\text{E})\Leftrightarrow\begin{cases}z+\frac{1}{z}=1\\\text{ou}\\z+\frac{1}{z}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z^2-z+1=0\quad(1)\\\text{ou}\\z^2-4z+1=0\quad(2)\end{cases}\qquad\text{(mise au même dénominateur ; produit en croix)}$$

On résout séparément les équations (1) et (2).

Le discriminant de (1) est égal à – 3.
Donc (1) admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$.

Le discriminant réduit de (2) est égal à 3.
Donc (2) admet deux racines réelles distinctes : $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Soit $S$ l'ensemble des solutions de (E).

$$\boldsymbol{S=\left\{\frac{1}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,2+\sqrt{3}\,;\,2-\sqrt{3}\right\}}\quad\text{ou}\quad\boldsymbol{S=\left\{\frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,2+\sqrt{3}\,;\,2-\sqrt{3}\right\}}$$

On observe que l'équation (E) (équation polynomiale de degré 4) admet 4 racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

De manière, on peut noter le théorème suivant qui n'est pas au programme de Terminale :

Une équation polynomiale de degré $n$ ($n \geqslant 1$) à coefficient complexes admet n racines distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$.

On peut aussi formuler ce résultat sous la forme :

Un polynôme de degré $n$ ($n \geqslant 1$) à coefficient complexes admet $n$ racines distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$.

La démonstration de ce théorème est difficile.

**15**

1°) a) On calcule $P(\mathrm{i}x) = \underbrace{2x^2 - 6x}_{\text{partie réelle}} + \mathrm{i}\underbrace{\left(-x^3 + 3x^2 + 3x - 9\right)}_{\text{partie imaginaire}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3°) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont : $3\mathrm{i}$ ; $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ ; $1-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

**Solution détaillée :**

$$P(z) = z^3 - (2+3\mathrm{i})z^2 + 3(1+2\mathrm{i})z - 9\mathrm{i}$$

$P(z)$ est un polynôme de la forme $az^3 + bz^2 + cz + d$ avec $a = 1$, $b = -(2+3\mathrm{i})$, $c = 3(1+2\mathrm{i})$, $d = -9\mathrm{i}$.
Il s'agit d'un polynôme du troisième degré à coefficients complexes.
La variable est $z \in \mathbb{C}$.

1°) Calculons $P(\mathrm{i}x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{i}x) &= (\mathrm{i}x)^3 - (2+3\mathrm{i})(\mathrm{i}x)^2 + 3(1+2\mathrm{i})(\mathrm{i}x) - 9\mathrm{i} \\
&= \mathrm{i}^3x^3 - (2+3\mathrm{i})\mathrm{i}^2x^2 + 3(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}x - 9\mathrm{i} \\
&= \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i}x^3 - (2+3\mathrm{i})(-1)x^2 + 3(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}x - 9\mathrm{i} \\
&= -\mathrm{i}x^3 + 2x^2 + 3\mathrm{i}x^2 + 3\mathrm{i}x + 6\mathrm{i}^2x - 9\mathrm{i} \\
&= 2x^2 - 6x - \mathrm{i}x^3 + 3\mathrm{i}x^2 + 3\mathrm{i}x - 9\mathrm{i} \\
&= 2x^2 - 6x + \mathrm{i}\left(-x^3 + 3x^2 + 3x - 9\right)
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Re}\left[P(\mathrm{i}x)\right] = 2x^2 - 6x$ et $\mathrm{Im}\left[P(\mathrm{i}x)\right] = -x^3 + 3x^2 + 3x - 9$.

b) **Cherchons les réels $x$ tels que $P(\mathrm{i}x) = 0$** (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + \mathrm{i}\left(-x^3 + 3x^2 + 3x - 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x = 0 & (1') \\ -x^3 + 3x^2 + 3x - 9 = 0 & (1'') \end{cases}$$

En effet un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

$$\begin{aligned}
(1') &\Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3
\end{aligned}$$

[On vérifie aisément que 0 n'est pas solution de $(1'')$ mais que 3 est solution de $(1'')$]

On remplace les valeurs trouvées dans $(1'')$ et on vérifie que seule la valeur 3 est solution de $(1'')$.

On écrit (rédaction-type) :

3 est solution de $(1'')$ mais 0 n'est pas solution de $(1'')$.

On en déduit que 3 est le seul réel solution à la fois $(1')$ et $(1'')$.

Donc $(1) \Leftrightarrow x = 3$

**Conclusion :** 3i est racine imaginaire pure du polynôme $P(z)$ puisque $P(3\mathrm{i}) = 0$.

On peut raisonner par **condition nécessaire** et **condition suffisante**.
(N.B. : Il est possible de résoudre l'équation (2) en utilisant la factorisation :
$-x^3 + 3x^2 + 3x - 9 = -x^2(x-3) + 3(x-3) = (x-3)(3-x^2)$).

2°) **Déterminons une factorisation de $P(z)$.**

D'après le 1°) b), $P(3\mathrm{i}) = 0$. Autrement dit, 3i est racine du polynôme $P(z)$.

On en déduit que $P(z)$ est factorisable par $z - 3\mathrm{i}$ (théorème fondamental rappelé ci-après) c'est-à-dire que $P(z) = (z-3\mathrm{i}) \times Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme du second degré à coefficients complexes.

**Rappel de définition :**

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes.
On dit qu'un nombre complexe $\alpha$ est une racine (ou un zéro) de $P(z)$ pour exprimer que $P(\alpha) = 0$.

**Rappel du théorème de factorisation (vu en 1ère mais à la limite du programme) : résultat fondamental sur les polynômes**

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes.
Si $\alpha$ est racine de $P(z)$, alors le polynôme est factorisable par $z - \alpha$.

Ce théorème est valable pour un polynôme de degré quelconque.
Ce théorème se généralise à plusieurs racines.

Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-3\mathrm{i}) \times Q(z)$.

Or $\deg P(z)=3$ (le degré de $P$ est égal à 3) et $\deg(z-3\mathrm{i})=1$ donc $\deg Q(z)=2$.

Il y a **5 méthodes** pour déterminer $Q(z)$ :

**• Méthode par calcul de tête :**

On cherche les coefficients de $Q(z)$ de tête (calcul mental).

Il s'agit de *a*, *b*, *c* présentés dans la méthode des coefficients indéterminés.

**• Méthode astucieuse :**

On effectue des factorisations partielles pour pouvoir mettre en facteur $Q(z)$.

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=z\left(z^2-2z+3\right)-3\mathrm{i}\left(z^2-2z+3\right)$$
$$=(z-3\mathrm{i})\left(z^2-2z+3\right)$$

**• Méthode des coefficients indéterminés :**

On pose $Q(z)=az^2+bz+c$ où *a*, *b*, *c* sont des complexes avec $a\neq 0$.

Déterminons *a*, *b*, *c*.

On développe $(z-3\mathrm{i})\times Q(z)$ et on identifie avec les coefficients de $P(z)$.

$$\begin{aligned}(z-3\mathrm{i})\times Q(z)&=(z-3\mathrm{i})\times\left(az^2+bz+c\right)\\&=az^3+bz^2+cz-3\mathrm{i}az^2-3\mathrm{i}bz-3\mathrm{i}c\\&=az^3+(b-3\mathrm{i}a)z^2+(c-3\mathrm{i}b)z-3\mathrm{i}c\end{aligned}$$

Pour développer très rapidement on procède ainsi :
- pour obtenir $z^3$, il faut multiplier *z* par $z^2$ ;
- pour obtenir $z^2$, il faut multiplier *z* par *z* ou multiplier un nombre par $z^2$ ;
- pour obtenir *z*, il faut multiplier *z* par un nombre ;
- pour obtenir un nombre, il faut multiplier deux nombres.

On se réfère à l'expression initiale de $P(z)$ donnée par $P(z)=z^3-(2+3\mathrm{i})z^2+3(1+2\mathrm{i})z-9\mathrm{i}$.
On identifie les coefficients du polynôme $(z-3\mathrm{i})\times Q(z)$ avec ceux du polynôme $P(z)$ (on se réfère à l'expression initiale de $P(z)$).

Donc par identification des coefficients des monômes de même degré, on obtient le système :

Une meilleur rédaction consiste à dire : « Pour que $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z-3\mathrm{i})\times Q(z)$, il suffit de choisir *a*, *b*, *c* tels que : …
On doit ensuite faire une étape de vérification.

$$(\Sigma)\begin{cases}a=1 & (1)\\ b-3\mathrm{i}a=-2-3\mathrm{i} & (2)\\ c-3\mathrm{i}b=3+6\mathrm{i} & (3)\\ -3\mathrm{i}c=-9\mathrm{i} & (4)\end{cases}.$$

Il serait préférable de noter les équations $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$.

On obtient un système linéaire de quatre équations à trois inconnues.

L'équation (1) est déjà résolue.

L'équation (4) est « prérésolue ».

On dit qu'il s'agit d'un système pléthorique en équations par rapport au nombre d'inconnues ou « surabondant » en équations par rapport au nombre d'inconnues.
$(4)\Leftrightarrow c=3$
Compte tenu de $(1)$, l'équation $(2)$ donne alors $b=3\mathrm{i}-2-3\mathrm{i}$ soit $b=-2$.

L'équation $(3)$ est alors vérifiée.

On « prend » ensuite la deuxième équation en remplaçant *a* par 1 : $b\cancel{-3\mathrm{i}\times 1}=-2\cancel{-3\mathrm{i}\times 1}$.
Les – 3i se simplifient de part et d'autre de l'égalité ; il reste alors $b=-2$.

La troisième équation est alors vérifiée.

On obtient ainsi : $\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=3\end{cases}$.

On obtient la factorisation polynomiale suivante : $P(z)=(z-3\mathrm{i})\times\left(z^2-2z+3\right)$.

• On observe que les coefficients *a*, *b*, *c* sont des réels. On ne pouvait pas le prévoir avant d'avoir effectué les calculs.
• On peut faire une vérification en développant $(z-3\mathrm{i})\times\left(z^2-2z+3\right)$.

**• Division euclidienne de polynômes :** On fait la division euclidienne de $P(z)$ par $z-3\mathrm{i}$

$$\begin{array}{r|l}
z^3-(2+3\mathrm{i})z^2+3(1+2\mathrm{i})z-9\mathrm{i} & z-3\mathrm{i}\\ \cline{2-2}
-\left(z^3-3\mathrm{i}z^2\right) & z^2-2z+3\\ \hline
-2z^2+3(1+2\mathrm{i})z-9\mathrm{i} & \\
-\left(-2z^2+6\mathrm{i}z\right) & \\ \hline
3z-9\mathrm{i} & \\
-(3z-9\mathrm{i}) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Le reste est nul.

$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z-3\text{i})\times\left(z^2-2z+3\right)$

La méthode de division polynomiale n'est pas au programme.

• **Schéma de Horner (algorithme)**

$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=z^3-(2+3\text{i})z^2+3(1+2\text{i})z-9\text{i}$

On doit déterminer trois nombres complexes *a*, *b*, *c* tels que $P(z)=(z-3\text{i})\times\left(az^2+bz+c\right)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $-(2+3\text{i})$ | $3(1+2\text{i})$ | $-9\text{i}$ |
| $1$ $\times 3\text{i}$ | $3\text{i}$ $=$ $\downarrow$ $-2$ $\times 3\text{i}$ | $-6\text{i}$ $=$ $\downarrow$ $3$ $\times 3\text{i}$ | $9\text{i}$ $=$ $\downarrow$ $\boxed{0}$ $P(3\text{i})$ |

Sur la $1^{\text{ère}}$ ligne, on met les coefficients de $P(z)$.

On redescend le $1^{\text{er}}$ coefficient sur la $2^{\text{e}}$ ligne.

Les flèches verticales correspondent à des additions.
Les nombres sur la deuxième ligne sont dans cet ordre les nombres *a*, *b*, *c* cherchés.

On en déduit que $P(3\text{i})=0$ et que $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z-3\text{i})\left(z^2-2z+3\right)$.

On peut mentionner une dernière méthode : la **méthode des valeurs tests**.

3°) **Déduisons-en les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.**

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\Leftrightarrow (z-3\text{i})\left(z^2-2z+3\right)=0\\ &\Leftrightarrow z-3\text{i}=0 \text{ ou } z^2-2z+3=0\\ &\Leftrightarrow z=3\text{i} \text{ ou } z^2-2z+3=0\end{aligned}$$

Considérons le polynôme $z^2-2z+3$.

$a=1,\ b=-2,\ b'=-1,\ c=3$
Son discriminant réduit est égal à $\Delta'=-2$.*

On a $\Delta'<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b'-\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$ $\qquad$ $z_2=\dfrac{-b'+\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1=1-\text{i}\sqrt{2}$ $\qquad$ $z_2=1+\text{i}\sqrt{2}$

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\text{E})$.

$S=\left\{3\text{i}\,;1+\text{i}\sqrt{2}\,;1-\text{i}\sqrt{2}\right\}$

(Les solutions ne sont pas ordonnées, car il n'y a pas d'ordre dans l'ensemble des nombres complexes et puis un ensemble de solutions avec accolades ne nécessite pas d'ordonner les solutions).

Les calculatrices actuelles ne permettent pas de résoudre l'équation $(\text{E})$ car les coefficients sont complexes.

On notera que l'on a déterminé les racines du polynôme $P(z)$ dans $\mathbb{C}$.

* Considérons le polynôme $z^2-2z+3$.
Son discriminant est égal à $\Delta=4-4\times3=-8$.

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2-\text{i}\sqrt{8}}{2}=1-\text{i}\sqrt{2}$$

$$z_2=\frac{-b+\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+\text{i}\sqrt{8}}{2}=1+\text{i}\sqrt{2}$$

**Retour sur la structure de l'exercice :**

$P(z)$ est un polynôme du $3^{\text{e}}$ degré.
L'équation $P(z)=0$ notée (E) est donc une équation du $3^{\text{e}}$ degré.

On ne sait pas résoudre une équation du $3^{\text{e}}$ degré quand on ne connaît pas une solution particulière.

**Démarche de l'exercice**

**Recherche d'une racine du polynôme**
(recherche guidée par l'énoncé ; ici l'énoncé va nous faire trouver une racine imaginaire pure ; c'est évidemment propre à ce polynôme particulier ; tous les polynômes du $3^{\text{e}}$ degré n'admettent pas une racine imaginaire pure)

↓

**Factorisation du polynôme du $3^{\text{e}}$ degré à l'aide de cette racine**
(technique au choix, non précisée dans l'énoncé)

↓

**Résolution de l'équation**

**Ces trois étapes correspondent aux questions 1°), 2°), 3°). Les questions sont enchaînées.**

**Notes d'élèves :**

« L'énoncé "sait" que le polynôme admet une racine imaginaire pure et nous invite donc à la chercher.
Elle est en effet plus facile à trouver ».

« On a besoin d'au moins une solution particulière pour factoriser notre polynôme du 3e degré, solution que l'on nous donne.
Une fois que l'on a notre première solution particulière, on peut trouver les autres, factoriser, et donner l'ensemble des solutions de (E). »

**16**

Poser $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a$ et $b$ réels.
On trouve : $S = \{-\mathrm{i}\,;\,2+\mathrm{i}\,;\,-2+\mathrm{i}\}$.

**Solution détaillée :**

**Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z}^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = 0$ (E).**

Attention ce n'est pas une équation du second degré à cause de la présence du conjugué.

L'équation que l'on demande de résoudre dans cet exercice n'est pas une équation polynomiale donc elle n'a pas de degré (présence de $z$ et de $\bar{z}$).

Résoudre l'équation $(\mathrm{E})$ c'est déterminer tous les nombres complexes $z$ telles que l'égalité soit vraie.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels.
On a alors : $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

« On pose … . On a alors … » est une rédaction-type à apprendre par cœur.

(On peut dire que $z$ est une expression en fonction de $x$ et de $y$, ce qui peut un peu « embrouiller ».)
Donc, finalement, résoudre $(\mathrm{E})$ dans $\mathbb{C}$ revient à trouver les valeurs de $a$ et de $b$ (qui sont des réels) que telles que l'égalité soit vraie.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (x - \mathrm{i}y)^2 + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x\mathrm{i}y - y^2 + 2\mathrm{i}x - 2y - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - y^2 - 2y - 1} + 2\mathrm{i}\boxed{(x - xy)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0 & (1) \\ x - xy = 0 & (2) \end{cases}$$ [par identification des partie réelle et imaginaire]

On obtient un système de deux équations à deux inconnues qui n'est pas linéaire.
On ne peut pas résoudre l'équation $(1)$.
En revanche, on peut aisément résoudre l'équation $(2)$.

On « prend » l'équation $(2)$. On trouve soit $y$ soit $x$. On remplace dans l'équation $(1)$.

$$(2) \Leftrightarrow x(1 - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - y = 0$$ (règle d'un produit de facteurs, c'est bien un « ou »)
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1$$

**1er cas :** $x = 0$

Dans ce cas, l'équation $(1)$ donne $-y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (1')$.

$$(1') \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y + 1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -1$$

Il y a donc une unique solution pour l'équation $(\mathrm{E})$ pour $x = 0$ : $0 + \mathrm{i} \times (-1) = -\mathrm{i}$.

**2e cas :** $y = 1$

Dans ce cas, l'équation $(1)$ donne $x^2 - 4 = 0 \quad (1'')$.

$$(1'') \Leftrightarrow x^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

On a ainsi déterminé deux valeurs de $x$ donc on obtient deux solutions de $(\mathrm{E})$ (équation de départ) pour $y = 1$.
$2 + \mathrm{i} \times 1 = 2 + \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i} \times 1 = -2 + \mathrm{i}$.

L'inconnue de l'équation est $z$.
On cherche donc $z$ et pas $\bar{z}$.
Donc on « fait » $z$ et pas $\bar{z}$.

**Conclusion :**

L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathrm{E})$ est $S = \{-\mathrm{i}\,;\,2+\mathrm{i}\,;\,-2+\mathrm{i}\}$.
ou
Les solutions de $(\mathrm{E})$ sont $-\mathrm{i}$, $2 + \mathrm{i}$, $-2 + \mathrm{i}$.

On vérifie avec XCas : « solve (conj (z) ^^2+2i*z-1=0,z) ».

---

L'objectif des exercices **17**, **18**, **19** est d'utiliser les nombres complexes en géométrie.
Par conséquent, on va faire les calculs en utilisant les **affixes** des points et des vecteurs sans jamais revenir aux coordonnées cartésiennes.

**17** Faire une figure dans le plan complexe en plaçant les points A, B, C, D.
On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DC}}$. On constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Rappel de méthode : pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme à l'aide des vecteurs, il suffit de démontrer que l'on a deux vecteurs égaux (on n'utilise pas la colinéarité).

**Solution détaillée :**

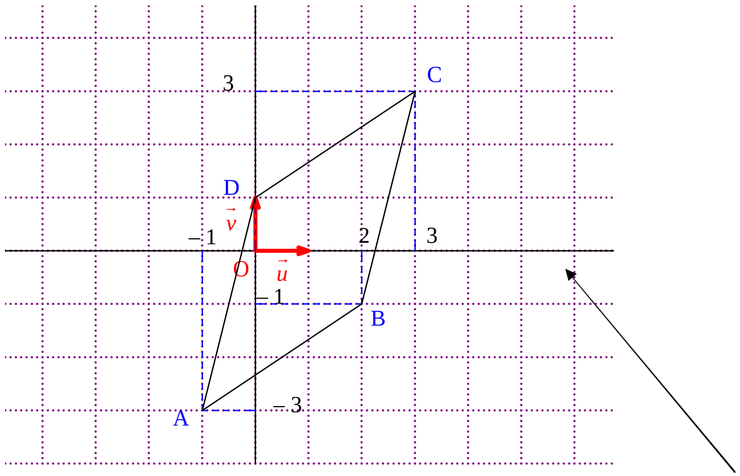
$A(-1-3i)$ $B(2-i)$ $C(3+3i)$ $D(i)$

**Déterminons la nature du quadrilatère ABCD.**

On commence par faire un graphique.
On commence par tracer le repère. On marque bien les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Pour placer les points, on repense en coordonnées cartésiennes sans les écrire (ainsi, pour A, on pense A(1 ; – 3), coordonnées cartésiennes qu'on lit « 1 point virgule – 3 » ; idem pour les autres points).
On ne fait pas figurer les affixes des points sur le graphique.

On fait un graphique pour avoir l'idée et ensuite on le démontre.
On prend 1 centimètre ou 1 « gros carreau » pour unité graphique.
On trace les lignes pointillées permettant de visualiser les coordonnées des points sur le graphique.
On écrit toutes les affixes des points sur une même ligne au-dessus du graphique.




axe des réels

On peut conjecturer sur la figure que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
On va le démontrer en utilisant uniquement les affixes des points (et non les coordonnées cartésiennes, car c'est plus court).
Pour cela, on va utiliser une égalité de deux vecteurs : on va démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DC}}$.

On démarre sèchement les calculs sans aucune phrase d'introduction.

• $z_{\overrightarrow{AB}}$ (on lit « z indice AB ») est une notation officielle qui signifie « affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ».
Il n'y a pas besoin de préciser ce que c'est.

• On travaille avec les affixes (sans repasser aux coordonnées).

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= (2-i)-(-1-3i) \\ &= 3+2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D \\ &= (3+3i)-i \\ &= 3+2i \end{aligned}$$

On constate que $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ (égalité de nombres complexes) donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (égalité vectorielle).
Par suite, ABCD est un parallélogramme.

Il est très important de ne pas s'arrêter à l'égalité $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$. Il faut absolument écrire l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

**Bilan de la méthode :**

Pour démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme, il suffit de démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

**Autres méthodes possibles :**

• On pourrait démontrer avec une égalité vectorielle comprenant une somme : par exemple, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
*Commentaire :* C'est possible mais c'est plus long donc on tâche d'éviter cette méthode.

• On pourrait démontrer que les diagonales se coupent en leur milieu.
*Commentaire :* C'est possible mais un peu plus long que la méthode de l'égalité de vecteurs.

• On pourrait démontrer que (AB) // (CD) et que (AD) // (BC) (on revient à la définition du parallélogramme).
Pour cela, on utilise la colinéarité de vecteurs.
*Commentaire :* C'est possible mais vraiment long.

• On pourrait démontrer que $AB = CD$ et que $AD = BC$.
*Commentaire :* C'est possible mais il faut repasser aux coordonnées cartésiennes pour pouvoir calculer les longueurs car il n'y a pas de formule dans le cours pour calculer une distance à l'aide des affixes. De plus, il faut préciser que le quadrilatère ABCD est non croisé.

• On pourrait démontrer que $AB = CD$ et que (AB) // (AD).
*Commentaire :* C'est possible mais il faudrait dire de plus que ABCD est non croisé.

Pour les calculs de vecteurs, pourquoi ne pas faire comme avec les points « normaux » (méthode de $2^e$) ?

**Détail de la méthode par les milieux des diagonales :**

On note U le milieu de [AC] et V le milieu de [BD].

On a : $z_U = \dfrac{z_A + z_C}{2}$

$= \dfrac{-1-3i+3+3i}{2}$

$=1$

On a : $z_V = \dfrac{z_B + z_D}{2}$

$= \dfrac{2-i+i}{2}$

$=1$

On a donc $z_U = z_V$. Par suite, les points U et V sont confondus.
On en déduit que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux.
On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

**Détail de la méthode utilisant les longueurs des côtés :**

Comme on n'a pas encore vu le lien entre les distances et les affixes de points (ce sera fait dans le chapitre sur le module d'un nombre complexe), on est obligé de passer par les coordonnées cartésiennes.
On donne les coordonnées cartésiennes des points A, B, C, D dans le repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

A(– 1 ; – 3) ; B(2 ; – 1) ; C(3 ; 3) ; D(0 ; 1)

On calcule les longueurs des quatre côtés en utilisant la formule de calcul de la distance de deux points dans un repère orthonormé du plan.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$ | $BC = \sqrt{\left(3-2\right)^2 + \left(3+1\right)^2}$ | $CD = \sqrt{3^2 + \left(3-1\right)^2}$ | $DA = \sqrt{1^2 + \left(1+3\right)^2}$ |
| $= \sqrt{9+4}$ | $= \sqrt{1+16}$ | $= \sqrt{9+4}$ | $= \sqrt{1+16}$ |
| $= \sqrt{13}$ | $= \sqrt{17}$ | $= \sqrt{13}$ | $= \sqrt{17}$ |

On constate que $AB = CD$ et que $AD = BC$.
De plus, le quadrilatère ABCD est non croisé (pas facile à justifier ; on se contente de le dire en observant la figure) donc ABCD est un parallélogramme.

Encore une fois, cette méthode présente l'inconvénient de devoir repasser en coordonnées cartésiennes.
Quand on travaille dans le plan complexe, on évite en général de repasser en coordonnées cartésiennes.

**Détail de la méthode utilisant l'égalité des longueurs et le parallélisme de deux côtés :**

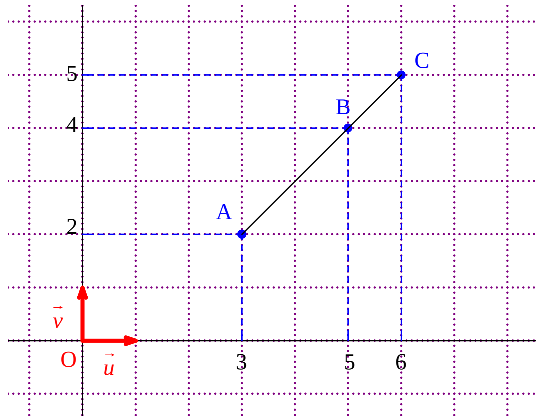
On calcule AB et CD (cf. méthode précédente).
On démontre que (AB) // (CD) (ce qui prouve que ABCD est un trapèze).
On dit que l'on observe sur la que ABCD est non croisé.

Donc ABCD est un parallélogramme.
Détail de la méthode sur les longueurs des côtés.
Le raisonnement n'est pas faux mais c'est plus long et on est obligé de repasser par les coordonnées cartésiennes.

**18**

Faire un graphique dans le plan complexe en plaçant les points A, B, C.

Prendre un centimètre ou un « gros carreau » pour unité graphique.




$A(3+2i)$ $B(5+4i)$ $C(6+5i)$

**Démontrons que A, B, C sont alignés.**

On prend deux vecteurs ayant la même origine (ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).
On évite de prendre deux vecteurs qui n'ont pas la même origine (par exemple, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'est pas un bon choix).

On ne peut pas « faire » de déterminant avec les affixes.

On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{AC}}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$= (5+4i)-(3+2i)$

$= 2+2i$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$

$= (6+5i)-(3+2i)$

$= 3+3i$

On constate que $z_{\overrightarrow{AC}} = \dfrac{3}{2} z_{\overrightarrow{AB}}$.

Par conséquent, on a $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (on revient aux vecteurs).

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Par suite A, B, C sont alignés.

**Bilan de la méthode :**

Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w'}(z')$ sont colinéaires, on cherche un réel $\lambda$ tel que $z' = \lambda z$.

**Remarque :**

À partir de l'égalité $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, on pourrait dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens mais ce n'est pas intéressant à dire.
Il est inutile de préciser que le coefficient de colinéarité est strictement positif et donc que $C \in [AB]$.

Comme $\frac{3}{2} > 1$, on pourrait même dire que les points A, B, C sont alignés dans cet ordre mais on n'a pas à le dire car ce n'est pas demandé.

$\boxed{19}$

On rédige ainsi sous forme d'une chaîne d'équivalences :
« ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \ldots$ »

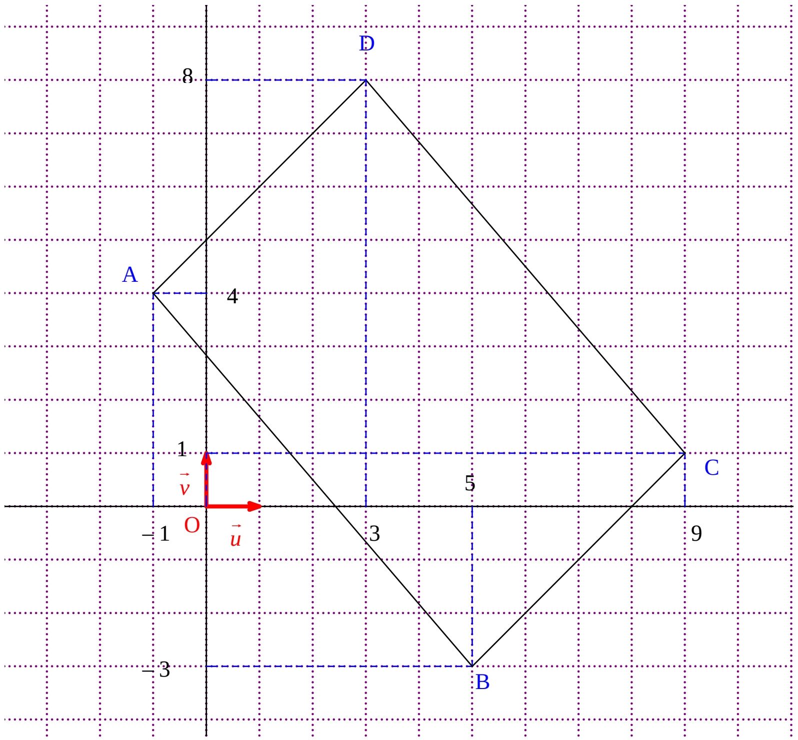
On trouve : $D(3+8i)$.

**Solution détaillée :**

$A(-1+4i)$ $\quad$ $B(5-3i)$ $\quad$ $C(9+i)$

On fait une figure ; celle-ci permettra de contrôler graphiquement le résultat obtenu par le calcul.

On prend pour unité de longueur 1 centimètre ou 1 « gros carreau ».




**Déterminons l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.**

On utilise les vecteurs.

On peut écrire l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (mieux pour les calculs) ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \\
&\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \\
&\Leftrightarrow (5-3i)-(-1+4i) = (9+i) - z_D \\
&\Leftrightarrow 6-7i = 9+i-z_D \\
&\Leftrightarrow z_D = 9+i-6+7i \\
&\Leftrightarrow z_D = 3+8i
\end{aligned}$$

**Remarque de méthode pour cet exercice :**

On ne revient pas à $x_D$ et $y_D$ pour trouver l'affixe de D.
On pourrait poser $z_D = x_D + iy_D$ et garder $x_D$ et $y_D$ dans les calculs mais ça complique.
On garde seulement $z_D$.

## $\boxed{20}$ Calcul littéral dans $\mathbb{C}$ ; recherche d'ensembles de points

1°) Re $Z = x^2+y^2+4x+2y+1$ ; Im $Z = 4x$.

2°) L'ensemble $E$ est l'axe $(\text{O}y)$.

3°) **Rappel :**

| | |
|---|---|
| Une équation du cercle $\mathcal{C}$ \| de centre $\Omega(a\,;b)$, de rayon $R>0$ s'écrit $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. | |
| équation cartésienne sous forme | canonique / normale |

Dans un repère orthonormé, un cercle admet une équation cartésienne de la forme :
$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois réels.

Réciproquement, dans un repère orthonormé, un ensemble d'équation $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois réels est soit un cercle, soit un singleton (constitué d'un point), soit l'ensemble vide.

L'ensemble $F$ est le cercle de centre $\Omega(-2\,;-1)$ et de rayon 2.

**Solution détaillée :**

$Z = z\bar{z}+(2+\text{i})z+(2+3\text{i})\bar{z}+1 \quad (z\in\mathbb{C})$

1°)

Le début dans l'encadré est à écrire avant les calculs.

| |
|---|
| On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$. |
| On a alors $\bar{z}=x-\text{i}y$ (par définition du conjugué d'un nombre complexe). |

**Déterminons Re *Z* et Im *Z* en fonction de *x* et *y*.**

Calculons $Z$ sous forme algébrique.
Il s'agit d'écrire $Z$ sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}Z &= z\bar{z}+(2+\text{i})z+(2+3\text{i})\bar{z}+1\\ &=(x+\text{i}y)(x-\text{i}y)+(2+\text{i})(x+\text{i}y)+(2+3\text{i})(x-\text{i}y)+1\\ &=x^2+y^2+2x-y+2x+3y+1+\text{i}(2y+x-2y+3x)\\ &=\underbrace{x^2+y^2+4x+2y+1}_{\text{Re}\,Z}+\text{i}\underbrace{4x}_{\text{Im}\,Z}\end{aligned}$$

(on sépare tout ce qui est avec des i et tout ce qui est sans i)

On a donc : Re $Z=x^2+y^2+4x+2y+1$ et Im $Z=4x$.

(Du coup, la partie réelle est super grande !).

Exemple de calcul qu'il ne faut pas faire :

$$\begin{aligned}Z &= z\bar{z}+(2+\text{i})z+(2+3\text{i})\bar{z}+1\\ &=z\bar{z}+2z+\text{i}z+2\bar{z}+3\text{i}\bar{z}+1\\ &=z\bar{z}+2z+2\bar{z}+1+\text{i}z+3\text{i}\bar{z}\\ &=x^2+y^2+2(x+\text{i}y)+2(x-\text{i}y)+1+\text{i}(x+\text{i}y)+3\text{i}(x-\text{i}y)\\ &=x^2+y^2+2x+2\text{i}y+2x-2\text{i}y+1+\text{i}x-y+3\text{i}x+3y\\ &=x^2+y^2+4x+2y+1+4\text{i}x\end{aligned}$$

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel est tout à fait bien indiquée pour ce type d'exercice.

2°) **Déterminons l'ensemble $E=\{\text{M}(z)\in P\ /\ Z\in\mathbb{R}\}$.**

Soit M un point quelconque du plan $P$ d'affixe $z$.
On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

Soit M un point quelconque du plan $P$ d'affixe $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\text{M}\in E &\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \text{Im}\,Z=0\\ &\Leftrightarrow 4x=0\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \text{Re}\,z=0\\ &\Leftrightarrow z\in\text{i}\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \text{M}\in(\text{O}y)\end{aligned}$$

souvent on n'écrit pas ces trois dernières lignes

On peut conclure de deux manières :

- L'ensemble $E$ est l'axe (O$y$) (c'est tout l'axe des imaginaires purs).
- L'ensemble $E$ est l'axe des imaginaires purs.
- $E=(\text{O}y)$ (égalité d'ensembles)

La notation (O$y$) désigne une droite.

Attention, on ne dit pas que l'ensemble $E$ décrit (O$y$).

3°) **Déterminons l'ensemble $F=\{\text{M}(z)\in P\ /\ Z\in\text{i}\mathbb{R}\}$.**

Soit M un point quelconque du plan $P$ d'affixe $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow Z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Re} Z = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \quad \text{(on reconnaît une équation du type de celle d'un cercle)} \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 1 = 0 \quad * \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4
\end{aligned}
$$

* On met sous forme canonique les deux petits trinômes incomplets en $x$ et en $y$ :

| | |
|---|---|
| $x^2 + 4x = (x^2 + 4x + 4) - 4$ <br> $= (x+2)^2 - 4$ | $y^2 + 2y = (y^2 + 2y + 1) - 1$ <br> $= (y+1)^2 - 1$ |

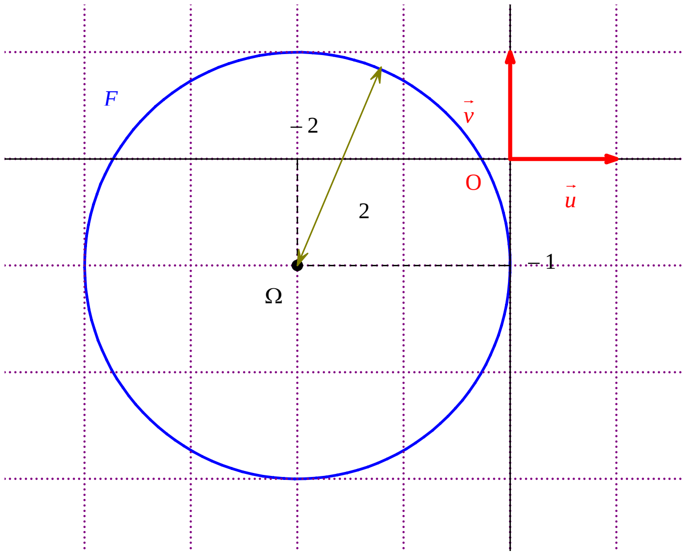
On peut conclure de deux manières :

• L'ensemble $F$ est le cercle de centre $\Omega(-2\,;-1)$ [ou $\Omega(-2-\mathrm{i})$] et de rayon 2.

• $F = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$ : cercle de centre $\Omega(-2\,;-1)$ et de rayon 2.

égalité d'ensembles

On fait une figure dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm ou 2 « gros » carreaux pour unité graphique.
On trace bien évidemment le cercle au compas, et non à main levée.




On remarque que le cercle $F$ est tangent à l'axe des ordonnées (car la distance du point O à l'axe (O$y$) est égale à 2 donc au rayon du cercle).
On pourrait aussi représenter l'ensemble $E$.

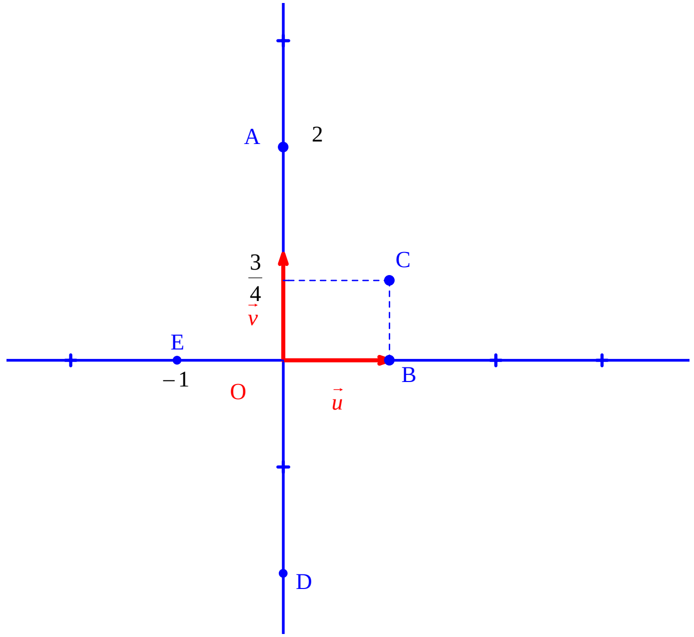
$\boxed{21}$

À tout point M d'affixe $z$, on associe le point M′ d'affixe $z' = 2z^2 - 3\mathrm{i}z$.

1°)

a) A(2i)  B(1)  $\mathrm{C}\left(1+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)$  D(– 2i)  E(– 1)

graphique : unités 2 cm (ou 2 « gros carreaux »)




b) **Déterminons les affixes des points A', B', C', D' et E'.**

Les affixes de A', B', C', D' se calculent à partir de celles de A, B, C, D, E.

• $z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}$

$$
\begin{aligned}
z_{\mathrm{A'}} &= 2(z_{\mathrm{A}})^2 - 3\mathrm{i}z_{\mathrm{A}} \\
&= 2 \times (2\mathrm{i})^2 - 3\mathrm{i} \times (2\mathrm{i}) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

• $z_{\mathrm{B}} = 1$

$$
\begin{aligned}
z_{\mathrm{B'}} &= 2 \times 1^2 - 3\mathrm{i} \times 1 \\
&= 2 - 3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

• $z_{\mathrm{C}} = 1 + \frac{3}{4}\mathrm{i}$

$$
\begin{aligned}
z_{C'} &= 2\times\left(1+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)^2 - 3\mathrm{i}\times\left(1+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)\\
&= 2\times\left(1-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right) - 3\mathrm{i} - \frac{9}{4}\mathrm{i}^2\\
&= 2\times\left(\frac{7}{16}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right) - 3\mathrm{i} + \frac{9}{4}\\
&= \frac{7}{8} \cancel{+3\mathrm{i}} \cancel{-3\mathrm{i}} + \frac{9}{4}\\
&= \frac{25}{8}
\end{aligned}
$$

• $z_{D} = -2\mathrm{i}$

$$
\begin{aligned}
z_{D'} &= 2\times(-2\mathrm{i})^2 - 3\mathrm{i}\times(-2\mathrm{i})\\
&= 2\times(-4) - 6\\
&= -14
\end{aligned}
$$

• $z_{E} = -1$

$$
\begin{aligned}
z_{E'} &= 2\times(-1)^2 - 3\mathrm{i}\times(-1)\\
&= 2+3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

On place les points $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (difficile à placer) et $E'$ sur le graphique précédent.

$$
\begin{aligned}
A &\mapsto A'\\
B &\mapsto B'\\
C &\mapsto C'\\
D &\mapsto D'\\
E &\mapsto E'
\end{aligned}
$$

Il n'est pas possible de définir une fonction complexe sur calculatrice.

On peut utiliser un programme très simple sur calculatrice pour calculer les affixes de $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$.

Sur calculatrice TI :

```
: Prompt Z
: 2Z^2–3iZ → T
: Disp T
```

(on utilise le *i* des complexes de la calculatrice)

2°)

$z = x + \mathrm{i}y \quad (x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$

$z' = x' + \mathrm{i}y' \quad (x'\,;\,y')\in\mathbb{R}^2$

a) **Exprimons $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.**

$$
\begin{aligned}
z' &= 2z^2 - 3\mathrm{i}z\\
&= 2(x+\mathrm{i}y)^2 - 3\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\\
&= 2\left(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy\right) - 3\mathrm{i}x + 3y\\
&= 2x^2-2y^2+3y+\mathrm{i}(4xy-3x)
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\begin{cases} x' = 2x^2-2y^2+3y\\ y' = 4xy-3x\end{cases}$.

b) **Déterminons l'ensemble $F = \{M \in P \,/\, M' \in (Ox)\}$.**

Soit M un point quelconque du plan $P$ d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
M \in F &\Leftrightarrow M' \in (Ox)\\
&\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z') = 0\\
&\Leftrightarrow 4xy - 3x = 0\\
&\Leftrightarrow x(4y-3) = 0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\\ \text{ou}\\ 4y-3=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\\ \text{ou}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$F$ est la réunion des droites d'équation $x = 0$ et $y = \frac{3}{4}$.

$F = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 : x = 0$ (axe des réels) et $D_2 : y = \frac{3}{4}$.

On sait que dans le plan muni d'un repère :

• une équation de la forme $x = k$ caractérise une droite parallèle à l'axe des ordonnées ;

• une équation de la forme $y = k$ caractérise une droite parallèle à l'axe des abscisses.

c) Quelles vérifications peut-on faire ?

$A \in F$ $C \in F$ $D \in F$

On pouvait le savoir d'après le calcul des affixes de $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ et $E'$ (on regarde les résultats qui sont réels).
Il y a deux justifications possibles :
1[ère] justification : par rapport à la conclusion

$A \in F$ car $x_A = 0$
$C \in F$ car $x_C = 0$
$D \in F$ car $y_D = \dfrac{3}{4}$

2[e] justification : par rapport à la définition de $F$

$A \in F$ car $A'(-2)$ donc $A' \in (Ox)$
$C \in F$ car $C'\left(\dfrac{25}{8}\right)$ donc $C' \in (Ox)$
$D \in F$ car $D'(-14)$ donc $D' \in (Ox)$

En revanche, on a : $B \notin F$ et $E \notin F$ (« B et E ne sont pas *dedans* »).

$\boxed{22}$ Dans cet exercice, on travaille dans deux cadres : cadre algébrique-cadre géométrique

Exercice déroutant à cause de la formulation déroutante (car les élèves ne sont pas habitués).
Exercice très important.

1°) O et D avec D d'affixe 2i.
2°) a) $z_{B'} = \dfrac{-2+4i}{5}$ (attention dans la notation à la place du prime) ; b) $z_C = \dfrac{-2+4i}{5}$.

3°) a) $x' = -\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}$ ; $y' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$
Pour cette question, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel permettant de travailler avec des nombres complexes (tels que XCas) peut être intéressante.
b) On peut utiliser la règle pour $A$ et $B$ réels : $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

Utiliser également l'équivalence : $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a\,;b) = (0\,;0)$.
Donc, par négation, on a : $a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow (a\,;b) \neq (0\,;0)$
(L'équivalence ($P \Leftrightarrow Q$) est équivalente à (non $P \Leftrightarrow$ non $Q$))

$E = \mathcal{C} \setminus \{A\}$ avec $\mathcal{C}$ : cercle de centre $\Omega\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
**N.B. :** Le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des abscisses donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

**Solution détaillée :**

Cet exercice pose quelques difficultés au niveau de la compréhension de l'énoncé.

$z_A = i$

$P^* = P \setminus \{A\}$ ($P^*$ désigne le plan privé du point A)

$$\begin{aligned} f :\quad & P^* \longrightarrow P \\ & M(z) \longmapsto M'(z') \text{ avec } z' = \frac{iz}{z-i} \end{aligned}$$

On lit : « $f$ est l'application de $P^*$ dans $P$ qui à tout point M d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = \dfrac{iz}{z-i}$ ».

Attention aux deux types de flèches :

Flèche « à valeur dans » sans talon
Flèche « a pour image » avec talon

Le point A n'a pas d'image par $f$ (pourquoi ?).

1°) **Déterminons les points invariants par *f*.**

On dit qu'un point est invariant pour exprimer qu'il est confondu avec son image.

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M$

La notion de point invariant a déjà été vue lors de l'étude des transformations du plan.

Symétrie centrale : le seul point invariant est le centre.

Symétrie axiale : les points invariants sont tous les points appartenant à l'axe.

Du point de vue du vocabulaire, on notera que l'on dit « M est invariant **par** $f$ » et non « M est invariant **de** $f$ ».

Meilleure rédaction :

Soit M un point quelconque d'affixe $z$.
Soit $M'$ son image par $f$.
On note $z'$ son affixe.
M invariant par $f \Leftrightarrow M' = M$
$\Leftrightarrow z' = z$ (1)
On résout l'équation (1) dans …

M est invariant par $f$ $\Leftrightarrow$ $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{M}'=\mathrm{M}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}=z_{\mathrm{M}'}$ (deux points sont confondus si et seulement si leurs affixes sont égales)

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}=\dfrac{\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{M}}-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}\left(z_{\mathrm{M}}-\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow$ ${z_{\mathrm{M}}}^2-\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}=\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}$

$\Leftrightarrow$ ${z_{\mathrm{M}}}^2-2\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}=0$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}\left(z_{\mathrm{M}}-2\mathrm{i}\right)=0$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}=0$ ou $z_{\mathrm{M}}-2\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{M}}=0$ ou $z_{\mathrm{M}}=2\mathrm{i}$

Les points invariants par $f$ sont les points O d'affixe 0 et D d'affixe 2i.

**Rappel :**

Le point O désigne l'origine du repère puisque l'énoncé dit que le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

Il n'y a donc pas besoin de « créer » (ou plutôt de définir) ce point.

2°) $\mathrm{B}(2)$

a) **Déterminons l'affixe du point $\mathrm{B}'=f(\mathrm{B})$.**

$$\begin{aligned}z_{\mathrm{B}'}&=\frac{\mathrm{i}z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{B}}-\mathrm{i}}\\&=\frac{2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\\&=\frac{2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\\&=\frac{4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}\\&=\frac{4\mathrm{i}-2}{5}\end{aligned}$$

(on peut utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul)

B′ a pour affixe $\dfrac{4\mathrm{i}-2}{5}$.

On peut utiliser un programme très simple sur calculatrice pour calculer les affixes de A', B', C', D', E'.

Sur calculatrice TI :

```
: Prompt Z
: iZ/(Z-i) → T
: Disp T
```

(on utilise le *i* des complexes de la calculatrice ; la barre oblique correspond au signe de division)

b) **Déterminons l'affixe de l'antécédent C de B par *f*.**

C est l'antécédent de B par $f$ $\Leftrightarrow$ $f(\mathrm{C})=\mathrm{B}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{i}z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{C}}-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow$ $2=\dfrac{\mathrm{i}z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{C}}-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow$ $2\left(z_{\mathrm{C}}-\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}z_{\mathrm{C}}$

$\Leftrightarrow$ $2z_{\mathrm{C}}-2\mathrm{i}=\mathrm{i}z_{\mathrm{C}}$

$\Leftrightarrow$ $2z_{\mathrm{C}}-\mathrm{i}z_{\mathrm{C}}=2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{C}}(2-\mathrm{i})=2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{C}}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{C}}=\dfrac{2\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$ (on retrouve le même calcul que dans la question a))

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{C}}=\dfrac{4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}$

$\Leftrightarrow$ $z_{\mathrm{C}}=\dfrac{4\mathrm{i}-2}{5}$ (on peut « séparer » éventuellement, voir note ci-dessous)

C a pour affixe $\dfrac{4\mathrm{i}-2}{5}$.

On peut remarquer que C est confondu avec B′ car $z_{\mathrm{C}}=z_{\mathrm{B}'}$.

On peut conserver l'affixe de C sous la forme $\dfrac{4\mathrm{i}-2}{5}$.

On n'est pas obligé de la donner sous la forme $-\dfrac{2}{5}+\dfrac{4\mathrm{i}}{5}$.

**Le 19-9-2015**

Le résultat que l'on vient d'établir est général.

$z'=\dfrac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$

Dans notre cas, cette relation équivaut à $z=\dfrac{\mathrm{i}z'}{z'-\mathrm{i}}$.

3°) $z$ distinct de i, on pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ avec $x, y, x', y'$ réels.

a) **Exprimons $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.**

On doit déterminer l'écriture algébrique de $z'$.
Pour cela, on se réfère à l'organisation du calcul d'une expression de ce type (calcul littéral complexe).
Il peut être intéressant de vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
On utiliser la règle pour faire les barres de fraction.

$$z'=\frac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}x-y}{x+\mathrm{i}(y-1)} \qquad (1)$$

$$=\frac{(\mathrm{i}x-y)\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right]}{\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right]} \qquad (2)$$

$$=\frac{\mathrm{i}x^2+x(y-1)-xy+\mathrm{i}y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \qquad (3)$$

$$=\frac{\mathrm{i}\left[x^2+y(y-1)\right]+x(y-1)-xy}{x^2+(y-1)^2} \qquad (4)$$

$$=\frac{\mathrm{i}\left(x^2+y^2-y\right)+\cancel{xy}-x-\cancel{xy}}{x^2+(y-1)^2} \qquad (5)$$

$$=\frac{\mathrm{i}\left(x^2+y^2-y\right)-x}{x^2+(y-1)^2}$$

D'où $x'=-\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}$ et $y'=\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$.

**Commentaires sur la démarche de calcul :**

(1) On met le numérateur sous forme algébrique en utilisant des parenthèses.

Pourquoi peut-on se permettre de rajouter des parenthèses ?
Dans une somme, on peut regrouper un ou plusieurs termes dans une parenthèse.
Il s'agit de parenthèses d'isolement et non de priorité de calcul.
Je ne savais pas que les parenthèses d'isolement existaient.
On ne rajoute pas de priorité en ajoutant une parenthèse.

(2) On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

(3) On développe intelligemment le numérateur.
Le dénominateur est écrit comme somme de deux carrés que l'on conservera sous cette forme jusqu'à la fin.
C'est un réel (strictement positif).

Pour développer intelligemment le numérateur, on se calque sur le développement que l'on ferait en calcul d'une expression telle que $(3+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$.
On évite de tout développer car il y a trop de risque de faire des erreurs. On va développer en utilisant des parenthèses.

On se réfère à la règle de double distributivité comme on l'a vu en 4$^{\mathrm{e}}$.

$$(\mathrm{i}x-y)\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right]$$

Les flèches bleues sont celles qui correspondent aux cas où le produit de deux facteurs va donner un imaginaire pur.
Les flèches rouges sont celles qui correspondent aux cas où le produit de deux facteurs va donner un réel.

(4) On regroupe les réels et les imaginaires purs au numérateur.

(5) On simplifie le numérateur.

Dans ce type de calcul, il n'y a pas lieu de développer le dénominateur.

b) **Déterminons l'ensemble $E=\left\{\mathrm{M}(z)\in P \,/\, z'\in\mathbb{R}\right\}$.**

Il faut bien comprendre ce que l'on cherche : on cherche l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que $z'$ soit réels.

On cherche un ensemble de points.

On rédige par chaîne d'équivalences.

Soit M un point quelconque de $P$ d'affixe $z\neq\mathrm{i}$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\text{M} \in E &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0 \\
&\Leftrightarrow y' = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \\ (x\,;\,y) \neq (0\,;1) \end{cases}
\end{aligned}$$

(on a mis sous forme canonique le polynôme $y^2 - y$)

$x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ est une équation du cercle de centre Ω(0 ; $\dfrac{1}{2}$) et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

La conclusion peut se formuler de deux façons :

***E* est le cercle de centre Ω de coordonnées (0 ; $\dfrac{1}{2}$) et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point A (d'affixe i).**

ou

$E = \mathcal{C} \setminus \{\text{A}\}$ avec $\mathcal{C}$ : cercle de centre Ω de coordonnées (0 ; $\dfrac{1}{2}$) et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

Pour le graphique, on trace bien évidemment le cercle au compas, et non à main levée.

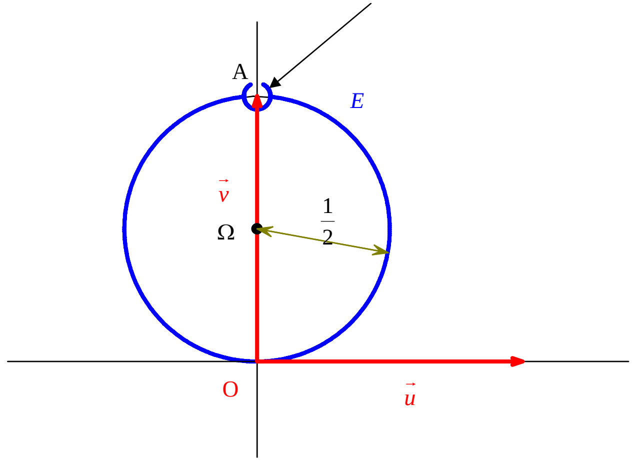
**Remarque :**

La forme $\operatorname{Im} z = \dfrac{x^2 + y \times (y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$ que l'on peut obtenir au cours du calcul est intéressante pour déterminer l'ensemble *F*.

En effet, cette égalité s'écrit aussi $\operatorname{Im} z = \dfrac{x \times x + y \times (y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$.

On peut ainsi trouver que *F* est le cercle de diamètre [OA] privé du point A.

On montre ainsi que le point A n'est pas dans l'ensemble *E*.




**N.B. :** On constate graphiquement que le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des abscisses en O ; on le démontre aisément car la distance OΩ est égale à $\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire au rayon du cercle.

Théoriquement, on devrait démontrer que le point A appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

On se contente de le « voir » graphiquement ; la démonstration est évidente : $\Omega\text{A} = \dfrac{1}{2}$.

On doit donc dire que l'ensemble est le cercle privé de ce point.

$\boxed{23}$ **Solution détaillée :**

$Z = \dfrac{\text{i}z - 4}{z - 4} \quad (z \neq 4)$

A(4)

1°)

$z = x + \text{i}y \qquad (x, y \text{ réels})$

$Z = X + \text{i}Y \qquad (X, Y \text{ réels})$

**Exprimons *X* et *Y* en fonction de *x* et *y*.**

$$Z=\frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)-4}{(x+\mathrm{i}y)-4}$$ (on développe $z$ avec $x+\mathrm{i}y$ ou plutôt on remplace $z$ par $x+\mathrm{i}y$)

$$=\frac{\mathrm{i}x-y-4}{(x-4)+\mathrm{i}y}$$

$$=\frac{[\mathrm{i}x-(y+4)]\times[(x-4)-\mathrm{i}y]}{[(x-4)+\mathrm{i}y]\times[(x-4)-\mathrm{i}y]}$$ (on va multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur)

$$=\frac{xy-(x-4)(y+4)+\mathrm{i}[x(x-4)+y(y+4)]}{(x-4)^2+y^2}$$

$$=\frac{-4x+4y+16+\mathrm{i}(x^2+y^2-4x+4y)}{(x-4)^2+y^2}$$

On identifie les partie réelle et imaginaire.

Donc $\boldsymbol{X=\mathrm{Re}\,Z=\dfrac{-4x+4y+16}{(x-4)^2+y^2}}$ ; $\boldsymbol{Y=\mathrm{Im}\,Z=\dfrac{x^2+y^2-4x+4y}{(x-4)^2+y^2}}$

2°) **Déterminons l'ensemble $E=\{\mathrm{M}(z)\in P\ /\ Z\in\mathbb{R}\}$.**

Soit M un point quelconque de $P$ distinct de A, d'affixe $z\neq 4$.
On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,Z=0\\
&\Leftrightarrow Y=0\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-4x+4y}{(x-4)^2+y^2}=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-4x+4y=0\\(x-4)^2+y^2\neq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2-8=0\\(x\,;y)\neq(4\,;0)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=8\\\mathrm{M}\neq\mathrm{A}\end{cases}
\end{aligned}$$

La conclusion peut se formuler de deux façons :

***E* est le cercle de centre Ω de coordonnées (2 ; – 2) et de rayon $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ privé du point A.**

ou

$E=\mathcal{C}\setminus\{\mathrm{A}\}$ avec $\mathcal{C}$ : cercle de centre Ω de coordonnées $(2\,;-2)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Donc il faut priver $\mathcal{C}$ du point A.

**Tracé de $\mathcal{C}$ :**

On place le point Ω(2 ; – 2).

On constate que O $\in\mathcal{C}$ en utilisant l'équation $x^2+y^2-4x+4y=0$ (car les coordonnées de O vérifient son équation cartésienne : $0^2+0^2-4\times0+4\times0=0$).

Meilleure rédaction :

Juste après la dernière équivalence, on écrit :

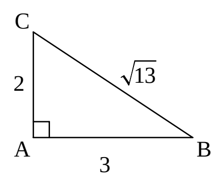
$(x-2)^2+(y+2)^2=8$ est une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω(2 ; – 2) et de rayon $2\sqrt{2}$.

A $\in\mathcal{C}$ car ses coordonnées vérifient $(x_{\mathrm{A}}-2)^2+(y_{\mathrm{A}}+2)^2=8$.

Conclusion : $E=\mathcal{C}\setminus\{\mathrm{A}\}$

**Rappel : construction de la racine carrée d'un entier à la règle et au compas en utilisant le théorème de Pythagore.**

**Exemple 1 :** construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ à la règle et au compas (sans instrument de mesure).




**Exemple 2 :** construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ à la règle et au compas.

On a deux possibilités :

1ère possibilité : $5=1^2+2^2$.
2e possibilité : $5=3^2-2^2$.

**Autre méthode : l'escargot de Pythagore** qui permet de construire des segments de longueurs $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…
Méthode longue et fastidieuse lorsqu'il s'agit l'entier sous le radical est grand.

Enfin, il y a la **méthode de Descartes** qui permet de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{a}$ connaissant un segment de longueur $a$.
Cette méthode utilise les relations métriques dans un triangle.

**Application :**

Ici, pour construire à la règle et au compas, on peut observer que $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ et $8=4+4$.
On construit donc un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 2.