TS spé — Exercices sur le chapitre 0

Ensembles de nombres :
Exercices : 4, 5, 6, 16, 20, 22, 23, 25, 26, 31, 36 ensuite : exercices 14, 11 et 12 (triplets pythagoriciens)

Le mardi 12 septembre 2023
On peut séparer en :
nature des nombres
entiers naturels et relatifs

il faut mettre le 5

base de numération : ordre à revoir exercices donnés le jeudi 8 septembre 2022 pour le lundi 13 septembre 2022
Exercices : 18 15 33 17 3 (identité $a^n - b^n$ à utiliser) 10 (tour de magie)

ensembles :
Exercices : 1 , 2 , 32 (Déterminer) , 40 et 4

Logique et raisonnement :
exercices 28 (compléter une équivalence) 35 (compléter une équivalence)
7 (raisonnement par équivalences), 8 (raisonnement par équivalences)
9 (raisonnement par équivalences) 13 (couples d'entiers dont la somme est égale au produit, raisonnement par équivalences) 27 (écrire une contraposée) 24 (raisonnement par contraposée)
19 démonstration de l'irrationalité d'un nombre défini par un log (raisonnement par l'absurde)
34 somme des *n* premiers entiers naturels impairs (conjecture et démonstration)
37 (condition nécessaire et vérification) 2°) Facultatif car assez compliqué (1/a+1/b+1/c=2)
38 théorème des quatre carrés de Lagrange
42 (fonctions paires, impaires)

factorielle d'un entier

combinaisons linéaires :
exercices 29 et 30

feuille cours Pa. Pzn le 25 septembre 2022

25(six)

25=2 6+5= 17 en numération décimale.

25huit désigne le nombre
25huit 2 8+5= 21 en numération décimale.

328neuf

328neuf=3x9^2+ 2x9+8= 269 en numération décimale.

10011deux

1 2 0 2 0 2 1 2 1 16 2 1 19 en numération décimale.

1302base cinq
1 5 3 5 0 5 2 202 (en base 10).

Le nombre qui s'écrit1302 en base 5 s'écrit 202 en base 10.
1101 (en base 2)

1101 base dix

1 2 1 2 0 2 1 13 en base 10

Le 11 octobre 2022

Déterminer la période de $\frac{22}{7}$.

3.14285714286

$\boxed{1}$ 1°) Écrire en extension l'ensemble E des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a+b=4$.

On peut écrire $E=\left\{(a, b)\in\mathbb{N}^2 \ / \ a+b=4\right\}$.

2°) Écrire en extension l'ensemble F des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $ab=10$.

On peut écrire $F=\left\{(a, b)\in\mathbb{N}^2 \ / \ ab=10\right\}$.

$\boxed{2}$ Déterminer le minimum et le maximum de $a+b$ et de ab lorsque a et b décrivent l'ensemble $E=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

$\boxed{3}$ Déterminer l'écriture en base dix de 10^n-1 où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Déterminer l'écriture décimale de $x=1-10^{-n}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$\boxed{4}$ 1°) Déterminer cinq valeurs de l'entier naturel n telles que $3n+4$ soit un carré parfait.

On appelle carré parfait le carré d'un entier.
Les carrés parfaits sont : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 … (0 est un carré parfait).

2°) Déterminer cinq valeurs de l'entier naturel n telles que $3n+4$ soit un cube parfait.

$\boxed{5}$ Déterminer trois couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $115x-7y=2 \quad (1)$.

Observer ce que donne la résolution de cette équation avec dcode (rubrique équations). On rentre l'équation (1).

$\boxed{6}$ Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans un bar.
Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

$\boxed{7}$ Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $xy=5$.

Vérifier en utilisant le site « dcode » (partie résolution des équations).

$\boxed{8}$ Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $(x-2)(y+1)=10$.

Vérifier en utilisant le site « dcode » (partie résolution des équations).

$\boxed{9}$ Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x^2-y^2=7$.

Vérifier en utilisant le site « dcode » (partie résolution des équations).

$\boxed{10}$ Un tour de magie

Le magicien invite une personne dans l'assemblée à choisir un nombre secret compris entre 1 et 63 et à désigner, parmi ces 6 cartes celles contenant le nombre choisi.
Le magicien trouve alors en quelques secondes le nombre secret. Comment procède-t-il ?

Indication : Penser à la numération en base deux.

A			
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

B			
2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

C			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

D			
8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

E			
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

F			
32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

$\boxed{11}$ Triplets pythagoriciens (1)

On dit qu'un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls est un *triplet pythagoricien* lorsque $a^2+b^2=c^2$.

Le nom provient de la propriété suivante :

Soit ABC un triangle.
On pose $\text{BC}=a$, $\text{CA}=b$, $\text{CA}=c$.
D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2+b^2=c^2$.

On notera qu'un triplet pythagoricien est $\boxed{\text{formé d'entiers naturels non nuls}}$.

1°) Vérifier que le triplet $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.

Donner deux autres exemples de triplets pythagoriciens.

Le triplet $(3, 4, 5)$ est le triplet pythagoricien le plus célèbre.
Il est à l'origine de la corde à treize nœuds utilisée depuis l'antiquité pour construire des angles droits.

2°) Démontrer que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien alors

- (b, a, c) est aussi un triplet pythagoricien ;
- pour tout entier naturel non nul k, le triplet (ka, kb, kc) est aussi pythagoricien.

3°) Déterminer, en utilisant le site dcode, les triplets pythagoriciens dont la somme est 1000.

4°) Vérifier que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls tels que $m > n$, le triplet $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ est un triplet pythagoricien.
Par exemple, pour $m = 2$ et $n = 1$, on retrouve le triplet $(3, 4, 5)$.

Utiliser ce résultat pour donner d'autres triplets pythagoriciens.

On peut démontrer que les triplets pythagoriciens sont les triplets de la forme $\left(k\left(m^2 - n^2\right), 2kmn, k\left(m^2 + n^2\right)\right)$ où k, m, n sont des entiers naturels tels que $m > n$.
On observe qu'il y a donc une infinité de triplets pythagoriciens.

12 **Triplets pythagoriciens (2)**

Écrire une fonction Python d'argument n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et qui renvoie en sortie les triplets pythagoriciens formés d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n.
On pourra éventuellement utiliser une liste.
À l'aide de cette fonction, donner tous les triplets pythagoriciens formés d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 11.

13 Le but des deux premières questions de l'exercice est de déterminer les couples d'entiers relatifs dont la somme est égale au produit.
1°) Utiliser le site dcode pour résoudre le problème.
2°) Retrouver le résultat de manière algébrique.
3°) Déterminer tous les triplets d'entiers naturels dont la somme est égale au produit.

14 Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que
$9x^2 + y^2 = 2020 \quad (\mathrm{E})$ en utilisant plusieurs méthodes indépendantes les unes des autres.
1ère méthode : Répondre en utilisant le site dcode (rubrique « résolution d'équations »).
2e méthode : Démontrer que si (x, y) est un couple d'entiers naturels vérifiant (E), alors x appartient à un intervalle d'entiers de la forme $[\![0 ; a]\!]$ où a est un entier naturel que l'on précisera.
Achever en utilisant une fonction bien choisie et la calculatrice.
3e méthode : Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $9x^2 + y^2 = 2020$ sur *Geogebra*. Ou sur la calculatrice Numworks mise à jour (rubrique « coniques »).
Il s'agit d'une ellipse de centre O.
On peut lire les valeurs des demi-grand axe et demi-petit axe.
On cherche les points de $\mathcal{C}$ à coordonnées entières.
4e méthode : Réaliser un programme Python après avoir encadré x et y.

15 Déterminer l'écriture en base deux, en base trois et en base quatre du nombre qui s'écrit 17 en base dix.
Vérifier à l'aide d'un convertisseur en ligne (par exemple celui du site dcode).

16 On pose $x = 2{,}5858\underline{58}\ldots$.
1°) Quelle est la nature de x ?
2°) Déterminer la valeur exacte de x sous forme fractionnaire.

17 **Une propriété amusante utile pour le calcul mental : carré d'un nombre de deux chiffres qui se termine par 5**
Exemple : On calcule le carré de 35.
$35^2 = 1225$
On sépare en deux : 12 | 25.
Les deux derniers chiffres sont immuables : 25 qui correspond au carré de 5.
Les deux premiers chiffres s'obtiennent en calculant $3 \times (3+1) = 12$.

Le but de l'exercice est de démontrer la règle.
On pose $n = \overline{a5}$ où a est un entier naturel inférieur ou égal à 9.
1°) Écrire la décomposition en base dix de n.
2°) Calculer n^2.
3°) En déduire la règle.
4°) Comment peut-on généraliser la règle à des nombres de plus de deux chiffres se terminant par 5 ?

18 Écrire la décomposition en base deux du nombre $\overline{100}^{(2)}$ et en déduire son écriture en base dix.

19 Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.
Démontrer que log 2 irrationnel.

20 Pour tout réel x, on note $f(x)$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x.
Déterminer les images par f de – 3,2 ; – 5 ; – 2 ; π ; $\dfrac{26}{7}$.

21 On considère deux urnes A et B. On dispose de N boules numérotées de 1 à N avec N entier naturel tel que $\mathrm{N} \geqslant 1$. Au départ (à l'étape 0), les N boules sont dans l'urne A.
À chaque étape, on choisit un nombre entre 1 et N (avec équiprobabilité) et l'on change d'urne la boule portant le numéro tiré. Par exemple, si on a tiré le nombre 4, on change la boule numéro 4 d'urne (si la boule 4 est dans A, on la retire de A et on la met dans B ; si la boule 4 est dans B, on la retire de B et on la met dans A).
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de boules de l'urne A au bout de n étapes.
Déterminer la parité de u_n.

22 Parmi les nombres suivants, lesquels sont entiers ? décimaux non entiers ? rationnels non décimaux ? irrationnels ?

$a = \sqrt{1{,}44}$; $b = 2\pi$; $c = \dfrac{5}{7}$; $d = \dfrac{7}{5}$; $e = \sqrt{2023}$; $f = -\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; $g = \dfrac{\pi}{3}$; $h = \sqrt[3]{10}$

Savoir justfer dans caue cas, sans forcément écrire la justification.
On pourra vérifier avec le site dcode (en faisant attention qu'il donne parfois un résultat faux !).

23 Démontrer que $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ est un nombre décimal.

Quelle est la nature du nombre $\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$?

24 1°) Soit a un réel positif ou nul.
Démontrer que si a est irrationnel, alors $\sqrt{a}$ est irrationnel.
2°) Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = \sqrt{2}$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que tous les termes de la suite (x_n) sont irrationnels.

Définition [partie stable par une fonction] :

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans E.
On dit qu'une partie D de E est stable par f lorsque $\forall x \in D \quad f(x) \in D$.

Formulation équivalente :

On dit qu'une partie D de E est stable par f lorsque $f(D) \subset D$.

Exemples :

① $f : x \mapsto x^2$

L'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f.
L'intervalle $[0\,;+\infty[$ est stable par f.
L'intervalle $]-\infty\,;0]$ n'est pas stable par f.

② $f : x \mapsto \ln x$

L'intervalle $]0\,;+\infty[$ n'est pas stable par f.

Propriété :

f est une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D \quad f(x) \in D$ (on écrit $f(D) \subset D$ et on dit que D est **stable** par f).
Pour tout réel $a \in D$, la suite u définie par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$. De plus, tous les termes de la suite appartiennent à D.

Démonstration :
On procède de proche en proche.
$a \in D$ donc a a une image par f et comme D est stable, cette image appartient à D.
On obtient donc un terme u_1 appartenant à D.

25 Donner un exemple de nombre irrationnel x non nul tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit rationnel.

26 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, H_n est un nombre rationnel.
2°) Parmi les nombres H_n pour $n \leqslant 10$, lesquels sont des entiers ? lesquels sont des décimaux ?

27 On rappelle la propriété P suivante où x désigne un réel non nul donnée dans le cours :

« Si x est un nombre rationnel, alors e^x est un nombre irrationnel ».

La démonstration de cette propriété nécessite des outils qui dépassent le cadre du programme de terminale.
Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ?
Écrire la contraposée de P. Cette contraposée est-elle vraie ?

28 Recopier et compléter pour a et b entiers relatifs l'équivalence : « $ab = -5 \Leftrightarrow \ldots$ ».

29 Écrire le nombre 100 comme combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de :
a) 3 et 7 ;
b) 2 et 3 ;
c) 2 et 11.

30 Soit n un entier relatif quelconque.
Dans chaque cas, écrire une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de n.
1^er^ cas : $a = 3n - 1$ et $b = 2n - 2$
2^e^ cas : $a = n^2 + 1$ et $b = n$
3^e^ cas : $a = n + 1$ et $b = n^2$

31 Déterminer les éléments de l'ensemble $[\![1\,;10]\!]$ dont l'inverse est un nombre décimal.

32 Déterminer l'ensemble E des entiers naturels non nuls dont l'inverse est un nombre décimal.

33 **Multiplication par 11**
Calculer 25×11.
Rappeler la règle qui permet de calculer de tête le produit d'un entier naturel à deux chiffres par 11.
On se propose de démontrer cette règle.
Soit n un entier naturel. On note a son nombre de dizaines et b son chiffre des unités de son écriture en base dix.
Exprimer $11n$ en fonction de a et de b en écrivant 11 sous la forme $10 + 1$ puis achever la démonstration.

34 Recopier et compléter les égalités :
$1 = 1$
$1 + 3 = \ldots$
$1 + 3 + 5 = \ldots$
$1 + 3 + 5 + 7 = \ldots$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \ldots$

Conjecturer une formule pour la somme des n premiers entiers naturels impairs, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Démontrer cette conjecture.

35 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ où a et b sont des réels.

35

Déterminons une CNS pour que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ où a et b sont des réels.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 2ab = 0$

$\Leftrightarrow ab = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

36 Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{6}$ à partir d'un segment de longueur 1.

37

• Déterminer tous les entiers naturels non nuls *a* et *b* tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

• Déterminer tous les entiers naturels non nuls *a*, *b*, *c* tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

38 Un rectangle de format A0 est un rectangle de longueur L et de largeur $\mathfrak{l}$ en mètre vérifiant les conditions :

$\frac{\mathrm{L}}{\mathfrak{l}}=\sqrt{2}$

Son aire est égale à 1 m^2.
Déterminer L et $\mathfrak{l}$. Préciser leur nature.

39 Traduire sous forme mathématique avec des quantificateurs le théorème suivant :

« Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels. »

Ce théorème peut aussi s'exprimer ainsi : « Tout entier naturel peut s'écrire comme somme de quatre carrés parfaits. »
On utilise les quantificateurs ∀ et ∃.
Tout doit tenir sur une seule ligne.
Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638, Français) en 1621, mais c'est Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, né italien, naturalisé français) qui le démontra en 1770. Aujourd'hui il porte le nom de « théorème des 4 carrés de Lagrange ».

Exemples :
$0=0^2+0^2+0^2+0^2$; $1=1^2+0^2+0^2+0^2$; $2=1^2+1^2+0^2+0^2$; $3=1^2+1^2+1^2+0^2$; $4=1^2+1^2+1^2+1^2$ ou $4=2^2+0^2+0^2+0^2$; $5=2^2+1^2+0^2+0^2$ etc.
On observe tout de suite qu'il n'y pas unicité.

40 On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ (E) où *a*, *b*, *c* sont trois nombres rationnels tels que $a\neq 0$)

On suppose que le discriminant Δ de (E) est strictement positif.

Quelle est la nature des racines de (E) ?

41 On considère l'ensemble $E=\{2+3k, k\in\mathbb{Z}\}$.
1°) Recopier et compléter la phrase :
« *E* est l'ensemble des nombres de la forme … ».
2°) Parmi les nombres suivants lesquels appartiennent à *E* ? 0 ; 1 ; – 1 ; 5 ; 2022

42 Déterminer l'ensemble des réels *x* tels que $\cos x=1$.

43 1°) Soit $\mathcal{D}$ une partie de ℝ.

On rappelle la définition suivante :

On dit que $\mathcal{D}$ est centrée en zéro lorsque $\forall x\in\mathcal{D}$, alors $-x\in\mathcal{D}$.

Recopier et compléter l'équivalence :

$\mathcal{D}$ n'est pas centrée en zéro ⇔ … .

2°) Soit $\mathcal{D}$ une partie de ℝ centrée en zéro. Soit *f* une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

On rappelle les définitions suivantes :

On dit qu'une fonction *f* est paire pour exprimer que $\forall x\in\mathcal{D}$ $f(-x)=f(x)$.

On dit qu'une fonction *f* est impaire pour exprimer que $\forall x\in\mathcal{D}$ $f(-x)=-f(x)$.

Recopier et compléter les équivalences suivantes :

f n'est pas paire ⇔ … .

f n'est pas impaire ⇔ … .

44 **Théorème d'Erdös-Suryani**
Tout entier relatif s'écrit comme somme algébrique de carrés parfaits avec des + et des –.

45 **La multiplication parabolique**

Exercices Mélanie Blazere TD 4 logique et raisonnement

Recopier et compléter avec "faut" ou "suffit" :
1. Pour avoir le bac, il ...... avoir une moyenne supérieure à 12.
2. Pour qu'un entier soit pair, il ...... que cet entier soit un multiple de 6.
3. Soit n un entier naturel. Pour que $n<10$, il ...... que $n<13$.
4. Soit *a*, *b* et *c* trois réels tels que $a<c$. Pour que $b<c$, il ..... que $b\leqslant a$.

Soit *a*, *b* et *c* trois réels tels que $a<c$. Pour que $b<c$, il ..... que $b\leqslant a$.

Pour que $b<c$, il suffit que $b\leqslant a$.

Exercice 1.3 CN et CS

Soit *x* un réel.
1°) Donner une condition nécessaire mais non suffisante sur *x* pour que $x^2\geqslant 1$.
2°) Donner une condition suffisante mais non nécessaire sur *x* pour que $x^2\geqslant 1$.

1°) CN mais non CS $x\in\mathbb{R}^*$ (*x* est un réel non nul)

Si $x^2\geqslant 1$, alors $x\neq 0$.

2°) CS mais non CN :

$x \in \mathbb{Z}^*$ (x est un entier relatif non nul)
$x \geqslant 3$

Exercice 1.4 CN, CS et réciproque, négation, contraposée

Traduire les propositions en langage mathématiques. Dire si ces propositions, ainsi que leurs réciproques, sont vraies. Donner leur négation et leur contraposée.
1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

Le samedi 2 octobre 2022

On rappelle les définitions suivantes (à savoir par cœur) :

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est croissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

- On dit que f est décroissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est strictement croissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, $a \leqslant b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

- On dit que f est strictement décroissante sur E pour exprimer que pour tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

On rappelle que la fonction « inverse » est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Est-elle strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

La réponse est non.

On note f la fonction « inverse ».
On travaille par contre-exemple.

On prend par exemple : $a = -1$ et $b = 1$.

On a $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$ donc $f(a) < f(b)$, ce qui prouve que f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En fait la propriété s'appuie sur le fait que : $a = -1$ et $b = 1$.
$\forall (a\,;b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \quad a < 0$ et $b > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Si f est croissante sur E, alors f est croissante sur toute partie F incluse dans E.

On peut dégager la propriété :
Soit A et B deux parties disjointes de $\mathbb{R}$.
On pose $\text{E} = \text{A} \cup \text{B}$.
Si f est croissante sur E, alors f est croissante sur A et B.
Si f est croissante sur A et B, alors f n'est pas forcément croissante sur E.

$\boxed{45}$ TD04_logique MPSI Lycée Daudet 2022-2023
Version
Écrire la négation de la proposition, traduire la proposition en français correct et démontrer la proposition ou sa négation si l'une des deux est démontrable :

« $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \geqslant x$ ».

Corrigé

$\boxed{1}$

1°) Écrivons en extension l'ensemble E des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a + b = 4$.
On peut écrire $E = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \,/\, a + b = 4\}$.

On cherche toutes les manières d'écrire 4 comme somme de deux entiers naturels.

On écrit tous les éléments les uns à la suite des autres, séparés par des virgules ou des points virgules.

$E = \{(0\,;4)\,;(4\,;0)\,;(1\,;3)\,;(3\,;1)\,;(2\,;2)\}$

On écrit le couple $(2\,;2)$ une seule fois.

2°) Écrivons en extension l'ensemble F des couples (a, b) d'entiers naturels tels que $ab = 10$.
On peut écrire $F = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \,/\, ab = 10\}$.

On cherche toutes les manières d'écrire 10 comme produit de deux entiers naturels.

$F = \{(1\,;10)\,;(10\,;1)\,;(2\,;5)\,;(5\,;2)\}$

On notera que les deux éléments du couple doivent être des entiers naturels.
Par exemple, le couple $\left(\frac{1}{2}\,;20\right)$ ne convient pas.

$\boxed{2}$ Déterminer le minimum et le maximum de $a + b$ et de ab lorsque a et b décrivent l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

Lorsque a et b décrivent E,

le minimum de $a+b$ est égal à 2 (obtenu pour $a=b=1$) et le maximum de $a+b$ est égal à 10 (obtenu pour $a=b=5$).

le minimum de ab est égal à 1 (obtenu pour $a=b=1$) et le maximum de ab est égal à 25 (obtenu pour $a=b=5$).

a et b peuvent être égaux.

$\boxed{3}$ Déterminer l'écriture en base dix de 10^n-1 où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On commence par examiner des cas particuliers pour différentes valeurs de n.

Pour $n=1$, on a : $10^1-1=9$.
Pour $n=2$, on a : $10^2-1=99$.
Pour $n=3$, on a : $10^3-1=999$.

Il semble que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $10^n-1=\overline{99...9}$ avec le chiffre 9 répété n fois.

Pour le cas général, on utilise le cas particulier de la formule fondamentale de l'algèbre :

On considère un entier naturel $n\geqslant 2$.
On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^n-1=(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{n-2}+x^{n-1}\right)$.

En remplaçant n par 10 dans cette égalité, on obtient successivement :

$$10^n-1=(10-1)\times\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+1\right)$$

$$10^n-1=9\times\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+1\right)$$

$$10^n-1=9\times10^{n-1}+9\times10^{n-2}+...+9\times1$$

Cette dernière égalité donne la décomposition en base 10 de 10^n-1.

On peut aussi écrire le résultat avec le symbole Σ : $10^n-1=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(9\times10^k\right)$.

$10^{-n}=0,0...01$

Par logique (sans calculatrice)
$x=0,\underbrace{9...9}_{n\text{ fois le chiffre }9}$

Attention, on a bien un nombre fini de 9 et pas un nombre infini.

Rappel : Une écriture comme 1,3299<u>9</u>… n'est pas possible (rationnel).

$\boxed{4}$

1°) Déterminer cinq valeurs de l'entier naturel n telles que $3n+4$ soit un carré parfait.

1[ère] méthode :

On cherche « à la main » en tâtonnant.

2[e] méthode :

On utilise une fonction et la calculatrice (changement de cadre).

On rentre la fonction $f : x\mapsto\sqrt{3x+4}$.

On règle la table de valeurs en commençant à 0 avec un pas de 1.

3[e] méthode :

On utilise un programme Python.

Les cinq premières valeurs de n telles que $3n+4$ soit un carré parfait sont : 0 ; 4 ; 7 ; 15 ; 20.

On trouve ensuite 32.

On ne donne pas de formule générale pour les valeurs de n cherchées. Nous le ferons plus tard.
Nous démontrerons en particulier que l'ensemble des valeurs de n telles que $3n+4$ soit un carré parfait est infini.

Autre méthode :

$3n+4$ est un carré parfait $\Leftrightarrow$ il existe un entier naturel N tel que $3n+4=\text{N}^2$

$3n+4$ est un carré parfait $\Leftrightarrow$ il existe un entier naturel N tel que $n=\dfrac{\text{N}^2-4}{3}$.

On utilise la fonction F: $x\mapsto\dfrac{x^2-4}{3}$.
On fait afficher un tableau de valeurs avec les entiers naturels 0, 1, 2, 3…

On cherche des valeurs dont l'image par F est un entier naturel.

2°) Déterminer cinq valeurs de l'entier naturel n telles que $3n+4$ soit un cube parfait.

Les méthodes sont les mêmes qu'à la question 1°).

Le mieux est d'utiliser une fonction sur la calculatrice.

On rentre la fonction $g : x\mapsto\sqrt[3]{3x+4}$.

Pour la calculatrice Numworks, on peut calculer les racines cubiques de deux manières différentes :

Calculatrice mise à jour : $\sqrt[n]{x}$ Racine n-ième

Sinon, il y a deux autres possibilités :

▶ Boîte à outils : root(x,n) $\rightarrow \sqrt[n]{x}$

exemple : root(2,3) $\rightarrow \sqrt[3]{2}$

▶ Touche $\boxed{x^y}$: On utilise l'exposant fractionnaire $\frac{1}{n}$. On sait en effet que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pour tout réel x strictement positif.

Exemple : $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ (la racine cubique correspond à un exposant $\frac{1}{3}$).

Les cinq premières valeurs de n telles que $3n+4$ soit un cube parfait sont : 20 ; 113 ; 332 ; 731 ; 1364.

Attention dans le tableau de valeurs.
Pour $n = 20$, on obtient 3,999999 et non 4 qui serait la valeur exacte.
On vérifie que $3\times 20+4 = 64$ est un cube parfait.

Autre méthode :

G : $x \mapsto \frac{x^3-4}{3}$

$\boxed{5}$ Déterminer $\boxed{\textbf{trois}}$ couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $115x-7y=2$ (1).

Il s'agit d'une équation diophantienne linéaire à deux inconnues de la forme $ax+by=c$ où a, b, c sont des entiers relatifs donnés et dont l'inconnue est le couple $(x, y)\in\mathbb{Z}^2$.
$ax+by=c$ est une équation linéaire à coefficients entiers relatifs.

Nous apprendrons à résoudre ces équations plus tard durant l'année.

La recherche à la main n'est pas du tout facile.

Le mieux est d'utiliser une fonction.

$(1) \Leftrightarrow y = \frac{115x-2}{7}$

On rentre la fonction $f : x \mapsto \frac{115x-2}{7}$ (fonction affine) dans la calculatrice.

Les couples $(3;49)$, $(10;164)$, $(-4;-66)$ sont trois solutions de (1).
Chacun de ces couples est $\boxed{\textbf{une}}$ solution de l'équation (1).

Il ne faut surtout pas dire que les couples $(3;49)$, $(10;164)$, $(-4;-66)$ sont $\boxed{\text{les}}$ solutions de (1).

On n'a pas déterminé toutes les solutions de (1).

On n'a pas résolu l'équation (1).

Nous apprendrons à résoudre ce type d'équation dans un chapitre spécial. Nous verrons que l'équation admet une infinité de couples solutions.

Avec dcode
On va dans la rubrique équation.
On rentre l'équation : 115x-7y=2.
Les inconnues sont x et y et sont dans Z.

La résolution donne
x=7c1+3 et y=115c1+49 avec c1 entier relatif quelconque.

$\boxed{\textbf{6}}$

Il s'agit d'un problème concret qui se ramène à l'exercice précédent.

Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes.

x et y sont des entiers naturels non nuls qui vérifient l'égalité $\underbrace{8x+5y}=100$ (1).

● On peut quasiment résoudre le problème de tête.

● Sinon, on utilise la méthode de l'exercice précédent.

On écrit tout simplement la relation sous la forme $y = \frac{100-8x}{5}$.

On utilise la fonction affine $f : x \mapsto \frac{100-8x}{5}$.

L'égalité (1) implique $8x \leqslant 100$ donc $x \leqslant 12,5$ soit $x \leqslant 12$.

On utilise un tableau de valeurs pour les valeurs de x de 0 à 12 avec un pas de 1.

On trouve deux couples d'entiers naturels non nuls vérifiant (1) : $(5;12)$ et $(10;4)$.

L'énoncé dit « Dans un groupe composé d'hommes et de femmes ». On exclut donc le cas où il n'y a aucun homme.

Il y a donc deux possibilités.

Le groupe est donc soit constitué de 5 hommes et de 12 femmes soit constitué de 10 hommes et de 4 femmes.

• On peut aussi un logiciel de résolution d'équations en précisant bien que les inconnues sont des entiers naturels.

Contrairement à l'exercice précédent, on a résolu l'équation (1) dans $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$.

On a en effet commencé par borner les solutions.

La difficulté de l'exercice réside dans le fait que l'on veut des entiers relatifs (donc en particulier, on ne veut pas de fractions).

$\boxed{7}$

Déterminons tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que $xy=5$ (1).

Il faut rédiger un minimum avant de donner les couples.

Il y a deux façons d'écrire 5 comme produit de deux entiers relatifs : $5=1\times5$ et $5=(-1)\times(-5)$ (on parle d'écritures multiplicatives de 5 : cf. document de Denis Wekemans).

Les couples cherchés sont donc **(5 ; 1), (1 ; 5), (– 1 ; – 5), (– 5 ; – 1)**.

On peut dire qu'on a résolu (1) dans $\mathbb{Z}^2$; on a déterminé tous les couples solutions de (1).

Autre version avec le vocabulaire du chapitre « Multiples et diviseurs » (chapitre suivant d'arithmétique) :

L'égalité (1) exprime que x et y sont des diviseurs associés* de 5 (diviseurs associés : diviseurs qui « marchent » ensemble).

$\boxed{8}$

Déterminons les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que $(x-2)(y+1)=10$ (1).

On veut trouver tous

Il y a quatre manières d'écrire 10 comme produit de deux entiers relatifs (à l'ordre près des facteurs).

$10=1\times10=2\times5=(-1)\times(-10)=(-2)\times(-5)$.

On adopte une démarche par équivalences.

On est sûr de trouver toutes les solutions.

On n'isole pas y contrairement au précédent.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=1\\y+1=10\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=-1\\y+1=-10\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=2\\y+1=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=-2\\y+1=-5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=10\\y+1=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=-10\\y+1=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=5\\y+1=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=-5\\y+1=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=1\\y=-11\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=0\\y=-6\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=12\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-8\\y=-2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$

Les couples cherchés sont donc
(3 ; 9) ; (1 ; – 11) ; (4 ; 4) ; (0 ; – 6) ; (12 ; 0) ; (– 8 ; – 2) ; (7 ; 1) ; (– 3 ; – 3).

Autre version avec le vocabulaire des multiples et diviseurs :

Il y a 8 $\boxed{\text{couples}}$ de diviseurs associés de 10 : $(1\,;10)$, $(10\,;1)$, $(2\,;5)$, $(5\,;2)$, $(-1\,;-10)$, $(-10\,;-1)$, $(-2\,;-5)$, $(-5\,;-2)$.

$(1) \Leftrightarrow$ $x-2$ et $y+1$ sont des diviseurs associés de 10

On a 8 systèmes car il y a 8 $\boxed{\text{couples}}$ de diviseurs associés de 10.

$\boxed{9}$

Déterminons tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x^2-y^2=7$ (1).
Vérifier en utilisant le site « dcode » (partie résolution des équations).

On cherche à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2-y^2=7$ (E).

Il s'agit d'une équation diophantienne.

L'inconnue est $(x, y)\in\mathbb{N}^2$.

Analyse :

Le premier membre de l'égalité (1) peut s'écrire $(x+y)(x-y)$.

Comme x et y doivent être entiers naturels, $x+y$ est un entier naturel et $x-y$ est un entier relatif.

On va donc chercher comment on peut écrire 7 comme produit de deux entiers relatifs.

Il y a deux manières d'écrire 7 comme produit de deux entiers relatifs (à l'ordre près des facteurs) :
$7=1\times7=(-1)\times(-7)$.

Recherche rédigée :

On procède par équivalences.

$(1) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)=7$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ (on utilise les deux manières d'écrire 7 comme produit de deux entiers relatifs.)

impossible car $(x,\, y)\in\mathbb{N}^2$ donc $x+y\in\mathbb{N}$

On peut ne pas écrire les systèmes $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-7 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ puisque $x+y$ est entier naturel donc positif ou nul.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$ (impossible car $y\in\mathbb{N}$ par hypothèse) ou $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ (résolution immédiate par addition et soustraction membre à membre)

Comme x et y sont des entiers naturels, la seule solution est le couple $(4\,;3)$.

Remarque :
On peut observer que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $x^2-y^2>0$ donc $x^2>y^2$ d'où $x>y$ car x et y sont positifs ou nuls.

On vérifie en utilisant le site « dcode ».

Il est maladroit d'utiliser exprimer y en fonction de x ($y=\sqrt{x^2-7}$) ou x en fonction de y ($x=\sqrt{y^2+7}$). Nous n'obtiendrons que des solutions et ne serions pas certain d'avoir toutes les solutions.

$\boxed{10}$ Un tour de magie

Pour trouver le nombre caché, il suffit en fait d'additionner les nombres situés en haut et à gauche de chaque grille montrée par l'enfant.

La première case de chaque carte comporte une puissance de 2.

Lorsqu'on choisit un nombre, on peut le retrouver en additionnant chacune des puissances de deux qui correspondent à sa décomposition en base deux.

Exemple : On choisit le nombre 51.

51 figure dans les cartes A, B, E, F.

On a $51=1+2+16+32$.

Exemple : On choisit le nombre 43.

43 figure dans les cartes A, B, D, F.

Autre méthode par soustraction :

Il reste les cartes C et E.
On additionne 4 et 16 : $4+16=20$.
On soustrait le résultat à 63 : $63-20=43$.

$\boxed{11}$ Triplets pythagoriciens (1)

Le 11 avril 2020 (repris le 13-4-2020)

Interprétation géométrique :
On se place dans l'espace muni d'un repère et on considère le cône Γ d'équation $x^2+y^2=z^2$.
Les triplets pythagoriciens correspondent aux points de Γ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

1°) On a $3^2+4^2=5^2$ donc $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.
Les triplets $(4, 3, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$ sont aussi des triplets pythagoriciens.

2°)

• Démontrons que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien alors (b, a, c) est aussi un triplet pythagoricien.

Le résultat est évident puisque b, a, c sont des entiers naturels non nuls et, comme $a^2+b^2=c^2$, on a aussi $b^2+a^2=c^2$.

• Démontrons que si (a, b, c) est un triplet pythagoricien alors pour tout entier naturel non nul k, le triplet (ka, kb, kc) est aussi pythagoricien.

On peut noter que $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad (ka, kb, kc)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^3$.

$(ka)^2+(kb)^2=k^2a^2+k^2b^2=k^2\left(a^2+b^2\right)=k^2c^2=(kc)^2$

Ainsi le triplet (ka, kb, kc) est aussi pythagoricien.

3°) Avec le site dcode, on résout dans $\left(\mathbb{N}^*\right)^3$ le système $\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$.

On obtient les triplets $(200, 375, 425)$ et $(375, 200, 425)$.

Voir site dcode : https://www.dcode.fr/triplet-pythagore.

4°) Vérifions que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls tels que $m>n$, le triplet $\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$ est un triplet pythagoricien.

Soit (m, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $m>n$.

On vérifie tout d'abord sans peine que le triplet $\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$ est formé d'entiers naturels non nuls.

On effectue ensuite le calcul de la somme des carrés des deux premiers éléments du triplet.

$$\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$$

$$=m^4+2m^2n^2+n^4$$

$$=\left(m^2+n^2\right)^2$$

On en déduit que le triplet $\left(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\right)$ est un triplet pythagoricien.

On peut utiliser ce résultat pour donner d'autres triplets pythagoriciens.

L'énoncé donne, pour $m=2$ et $n=1$, le triplet $(3, 4, 5)$.

On va prendre $m=4$ et $n=3$.

$m^2-n^2=16-9=7$
$2mn=24$
$m^2+n^2=25$
Ainsi $(7, 24, 25)$ est un triplet pythagoricien.

On pourra lire avec profit le livre de Jean-Paul Delahaye « Pythagore à la plage ».
Un chapitre entier est consacré aux triplets pythagoriciens.
On y découvre l'arbre ternaire de Breggren.

$\boxed{12}$ Triplets pythagoriciens (2)

Rédaction en langage naturel. On utilise trois boucles « Pour » imbriquées les unes dans les autres.

Fonction pythago(*n*)
  Pour *a* allant de 1 à *n* **Faire**
    Pour *b* allant de 1 à *n* **Faire**
      Pour *c* allant de 1 à *n* **Faire**
        Si $a^2+b^2=c^2$
          Renvoyer (a, b, c)
        FinSi
      FinPour
    FinPour
  FinPour
FinFonction

Fonction Python :

```
def pythago(n):
    for a in range(1,n+1):
        for b in range(1,n+1):
            for c in range(1,n+1):
                if a**2+b**2==c**2:
                   print ((a,b,c))
```

On notera :
• l'utilisation du double signe d'égalité = = pour le test ;
• la notation des puissances en Python ;
• l'utilisation de print (et pas return).

Pour $n=11$, on obtient l'affichage suivant :

(3, 4, 5)
(4, 3, 5)
(6, 8, 10)
(8, 6, 10)

Il s'agit de tous les triplets pythagoriciens constitués d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 11.

Attention, si on ne met u'une seule parenthèse après le print, on n'obtient pas un affichage en triplets.

3	4	5
4	3	5
6	8	10
8	6	10

Autre fonction Python en utilisant une liste :

```
def pythago(n):
    L=[(a, b, c) for a in range(1, n+1) for b in range(1, n+1)
                                 for c in range(1, n+1) if a**2 + b**2 == c**2]
    return L
```

Exemple : pour `n = 11, on obtient` [(3, 4, 5), (4, 3, 5), (6, 8, 10), (8, 6, 10)].

13

On cherche à déterminer les couples d'entiers relatifs dont la somme est égale au produit.
On trouve aisément les couples $(0\,;0)$ et $(2\,;2)$.

1°)

On tape $x+y=xy$.

Les inconnues sont x et y.

On choisit $\mathbb{Z}$ comme ensemble de résolution.

Le site dcode dit que les couples $(0\,;0)$ et $(2\,;2)$ sont les seuls couples solutions.

2°) On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x+y=x\times y \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x+y-xy=0$

$\Leftrightarrow x(1-y)+y=0$

$\Leftrightarrow x(1-y)+y-1=-1$ (Astuce : On ajoute – 1 aux deux membres de l'égalité)

$\Leftrightarrow x(1-y)-(1-y)=-1$

$\Leftrightarrow x(1-y)-1\times(1-y)=-1$ (mise en évidence du facteur commun)

$\Leftrightarrow (x-1)(1-y)=-1$ (factorisation)

$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases}$ (car $x-1$ et $y-1$ sont des entiers relatifs et les seules manières d'écrire 1 comme produit d'entiers relatifs sont $1=1\times1=(-1)\times(-1)$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Les couples cherchés sont $(0\,;0)$ et $(2\,;2)$.

Les seules manières d'écrire 1 comme produit de deux entiers relatifs sont $1\times1=1$ et $(-1)\times(-1)=1$.

Méthode erronée : (Héloïse Bourges 14-9-2020)

$(1) \Leftrightarrow xy-y=x$

$\Leftrightarrow y(x-1)=x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{x-1}$

On rentre dans la calculatrice la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

Les couples cherchés sont $(2\,;2)$ et $(0\,;0)$.

3°) On cherche à résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $x+y+z=xyz \quad (1)$.

On constate que les triplets $(0, 0, 0)$ et $(1, 2, 3)$ sont solutions.
Tous les triplets obtenus en permutant 1, 2, 3 sont aussi solutions.

On ne peut pas reprendre la même méthode qu'à la question précédente.

Il est aisé de voir que si l'un des éléments du triplet est nul, alors les deux autres sont aussi nuls.
On va donc supposer que x, y, z sont non nuls.
On peut également supposer que $x \leqslant y \leqslant z$.
On a alors $x+y+z \leqslant 3z$.
Si $x \geqslant 2$, alors $xyz \geqslant 4z$.
On aurait alors $4z \leqslant 3z$ soit $z \leqslant 0$ d'où $z=0$, ce qui est absurde.
On en déduit que $x<2$.
Comme $x>0$.
On en déduit que $x=1$.
On a donc $y+z+1=yz \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow y+z-yz=-1$

$\Leftrightarrow y(1-z)+z=-1$

$\Leftrightarrow y(1-z)+z-1=-2$

$\Leftrightarrow y(1-z)-(1-z)=-2$

$\Leftrightarrow y(1-z)-1\times(1-z)=-2$ (mise en évidence du facteur commun)

$\Leftrightarrow (y-1)(1-z)=-2$ (factorisation)

$\Leftrightarrow (y-1)(z-1)=2$

$\Leftrightarrow\ y-1=1$ et $z-1=2$

$\Leftrightarrow\ y=2$ et $z=3$

$\boxed{14}$ Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $9x^2+y^2=2020 \quad (\text{E})$.

Énoncé original :

$\boxed{14}$ Déterminer tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels tels que $9x^2+y^2=2020$.
Indication : Commencer par borner les solutions éventuelles.

Il s'agit d'une équation diophantienne.

1ère méthode :

À l'aide du site dcode, on peut dire que les solutions de (E) sont les couples (14 ; 16) et (8 ; 38).

2e méthode :

On va d'abord borner les solutions éventuelles de (E).

On va démontrer que (E) admet un nombre fini de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

$(\text{E}) \Rightarrow 9x^2 \leqslant 2020$

$\Rightarrow x^2 \leqslant \dfrac{2020}{9}$

$\Rightarrow x \leqslant \dfrac{\sqrt{2020}}{3}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{\sqrt{2020}}{3}=14{,}98\ldots$.

$(\text{E}) \Rightarrow x \leqslant 14$

On écrit les équivalences pour $(x\,;y)\in\mathbb{N}^2$:

$(\text{E}) \Leftrightarrow y^2=2020-9x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2020-9x^2} \\ 2020-9x^2 \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2020-9x^2} \\ x \leqslant 14 \end{cases}$

On peut alors calculer toutes les valeurs de $\sqrt{2020-9x^2}$ pour x allant de 0 à 14.

On peut aussi utiliser la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2020-9x^2}$ afin d'obtenir un tableau de valeurs pour x compris entre 0 et 14 avec un pas de 1.

On pourrait utiliser la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2020-9x^2}}{3}$.

On obtient les couples (14 ; 16) et (8 ; 38).

3e méthode :

On utilise Geogebra ou la calculatrice Numworks (mise à jour).

Interprétation géométrique :
On se place dans le plan muni d'un repère et on considère la courbe Γ d'équation $9x^2+y^2=2020$.
Les solutions de (E) correspondent aux points de Γ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
La courbe Γ est une ellipse.

4e méthode :

On peut aisément démontrer (E) admet un nombre fini de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

On va d'abord borner les solutions éventuelles de (E).

On va démontrer que (E) admet un nombre fini de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

$(\text{E}) \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 \leqslant 2020 \\ y^2 \leqslant 2020 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant \dfrac{2020}{9} \\ y^2 \leqslant 2020 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{\sqrt{2020}}{3} \\ y \leqslant \sqrt{2020} \end{cases}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{\sqrt{2020}}{3} = 14,98...$ et $\sqrt{2020} = 44,94...$.

$$(\mathrm{E}) \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 14 \\ y \leqslant 44 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x\,;\,y) \in [\![0\,;14]\!] \times [\![0\,;44]\!]$$

Rappel : L'ensemble $[\![n\,;\,p]\!]$ désigne l'ensemble des entiers relatifs compris entre n et p au sens large.
On parle parfois d'intervalle d'entiers.

Il y a 15 éléments dans l'ensemble $[\![0\,;14]\!]$.
Il y a 45 éléments dans l'ensemble $[\![0\,;44]\!]$.
Il y a donc $45 \times 15 = 675$ éléments dans l'ensemble $[\![0\,;14]\!] \times [\![0\,;44]\!]$.
Il y a au maximum $45 \times 15 = 675$ solutions.

2e partie :

Il faut tester 675 couples d'entiers naturels.

- Recherche exhaustive de solutions
- Limitation de la recherche

15

On peut utiliser des divisions euclidiennes successives pour convertir $\overline{17}^{(10)}$ dans plusieurs bases.

- Écrire $\overline{17}^{(10)}$ en base deux (écriture binaire).

1ère méthode :

$$\overline{17}^{(10)} = 16 + 1$$
$$= 2^4 + 1$$
$$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= \overline{10001}^{(2)}$$

2e méthode :

$$\begin{array}{llllll} 17 & 2 & & & & \\ 1 & 8 & 2 & & & \\ & 0 & 4 & 2 & & \\ & & 0 & 2 & 2 & \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}$$

On peut utiliser le convertisseur en binaire de la calculatrice.

- Écrire $\overline{17}^{(10)}$ en base trois.

1ère méthode :

$$\overline{17}^{(10)} = 3^2 + 8$$
$$= 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0$$
$$= \overline{122}^{(3)}$$

2e méthode :

$$\begin{array}{llll} 17 & 3 & & \\ 2 & 5 & 3 & \\ & 2 & 4 & 3 \\ & & 1 & 0 \end{array}$$

- Écrire $\overline{17}^{(10)}$ en base quatre.

1ère méthode :

$$\overline{17}^{(10)} = 4^2 + 1$$
$$= 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 1 \times 4^0$$
$$= \overline{101}^{(4)}$$

2e méthode :

$$\begin{array}{llll} 17 & 4 & & \\ 1 & 4 & 4 & \\ & 0 & 1 & 4 \\ & & 1 & 0 \end{array}$$

Le nombre de « chiffres » de l'écriture dans chaque base peut être prévu à l'avance grâce à la formule du cours.

16

On pose $x = 2,585\underline{58}...$.

Il est évident que x n'est pas un nombre décimal.

1°) Le développement décimal illimité de x est périodique à partir de la première décimale.
D'après une propriété du cours, x est donc un nombre rationnel.

Réponse de Gohier Tom T1 le mardi 14 septembre 2021 :

La nature de x est qu'il est irréel car ses décimales continuent jusqu'à l'infini.

2°) On calcule $100x$ puis $100x - x$.

$100x = 258,58\underline{58}...$

On a donc $100x - x = 256$ soit $99x = 256$ d'où $x = \dfrac{256}{99}$.

Cette dernière fraction est irréductible.

On peut vérifier à l'aide du site dcode.

Pourquoi 100 ? Est-ce que 10 marche ?

On vérifie avec la calculatrice (modèle TI 83 Premium-CE) avec la touche comportant deux flèches marquées par angle au-dessus.

Autre moyen plus compliqué : $\boxed{\text{math}}$ 1 : Frac $\boxed{\text{entrer}}$.

$\boxed{17}$

$n = \overline{a5}$

1°) Dans l'écriture en base dix de n, a est le chiffre des dizaines et 5 est le chiffre des unités donc la décomposition en base dix de n s'écrit $n = 10a + 5$.

2°) On développe grâce à l'identité remarquable donnant le carré d'une somme.

$n^2 = 100a^2 + 100a + 25$

3°) On factorise les deux premiers termes de la somme : $n^2 = 100a(a+1) + 25$.

Cette dernière égalité montre que :

• l'écriture en base dix de n^2 se termine toujours par 25 ;

• le nombre de centaines de n^2 est égal à $a(a+1)$.

On retiendra que le carré d'un nombre qui se termine par 5 se termine toujours par 25.

4°) La règle que nous venons de découvrir ici s'adapte sans difficulté à des nombres comprenant plus de deux chiffres.
Dans ce cas, a représente le nombre de dizaines.

Exemple : Calculons 105^2.
On calcule $10 \times 11 = 110$.
On a donc $105^2 = 11025$.

$\boxed{18}$

$\overline{100}^{(\text{deux})} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$\overline{100}^{(\text{deux})} = \overline{4}^{(\text{dix})} =$

$\boxed{19}$

$x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

Réponse de Hyacinthe élève de T1 le mardi 14 septembre 2021 :

On peut calculer directement et voir qu'il n'y pas un motif qui se répète indéfiniment.

Autres réponses :

On doit répondre par le calcul ou par des phrases ?

La suite des décimales n'est pas du tout périodique, il n'y a pas de motif élémentaire.

Les décimales présentent un caractère hasardeux.
On ne connaît ni la valeur de ln 2 ni la valeur de ln 3 donc on peut en déduire que la fraction est irrationnelle.

Analyse :

• D'après le cours (propriété admise), pour tout nombre rationnel x strictement positif différent de 1, ln x est un nombre irrationnel.

ln 2 et ln 3 sont donc des irrationnels.

On ne peut rien en déduire pour la nature de x.

• La calculatrice donne $x \approx 1,5849625007212$.

Résolution :

Nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde.

On suppose que x est un nombre rationnel.

x peut donc s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls.

On a donc $x = \dfrac{p}{q}$ soit $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$.

Par produit en croix, on obtient : $q \times \ln 3 = p \times \ln 2$.

On utilise ensuite la propriété du logarithme népérien pour les puissances d'un réel strictement positif :
$\ln(x^n) = n \ln x$ pour x réel strictement positif et n entier naturel quelconque.

On peut donc écrire $\ln(3^q) = \ln(2^p)$.

Une autre propriété du logarithme népérien permet d'enlever le logarithme népérien.

On obtient $3^q = 2^p$.

3^q est un nombre impair alors que 2^p est un nombre pair (puisque $p \geqslant 1$) ce qui est impossible.
On en déduit que l'hypothèse « x est un nombre rationnel » est absurde et par conséquent, x est un nombre irrationnel.

$\boxed{20}$

$f(x) =$ plus petit entier relatif supérieur ou égal à x

$f(-3,2) = -3$
$f(-5) = -5$
$f(-2) = -2$
$f(\pi) = 4$
$f\left(\dfrac{26}{7}\right) = 4$

On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \min\{k \in \mathbb{Z} \,/\, k \geqslant x\}$.

La fonction f n'est pas définie par une formule.

Dans le cours, on a vu la fonction partie entière qui est définie de manière analogue :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \,/\, k \leqslant x\}$.

$\boxed{21}$ On considère deux urnes A et B. On dispose de N boules numérotées de 1 à N avec N entier naturel tel que $\mathrm{N} \geqslant 1$. Au départ (à l'étape 0), les N boules sont dans l'urne A.
À chaque étape, on choisit un nombre entre 1 et N (avec équiprobabilité) et l'on change d'urne la boule portant le numéro tiré. Par exemple, si on a tiré le nombre 4, on change la boule numéro 4 d'urne (si la boule 4 est dans A, on la retire de A et on la met dans B ; si la boule 4 est dans B, on la retire de B et on la met dans A).
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de boules de l'urne A au bout de n étapes.
Déterminer la parité de u_n.

$\boxed{22}$

Parmi les nombres suivants, lesquels sont entiers ? décimaux non entiers ? rationnels non décimaux ? irrationnels ?

$a = \sqrt{1,44}$; $b = 2\pi$; $c = \dfrac{5}{7}$; $d = \dfrac{7}{5}$; $e = \sqrt{2021}$; $f = -\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; $g = \dfrac{\pi}{3}$; $h = \sqrt[3]{10}$

On pourra vérifier avec le site dcode (en faisant attention qu'il donne parfois un résultat faux !).

Dans chaque cas, il s'agit de déterminer la nature du nombre proposé en étant le plus précis possible.

- $a = \sqrt{1,44}$

$a = 1,2$ donc a est un décimal non entier.

- $b = 2\pi$

b est un irrationnel.

- $c = \dfrac{5}{7}$

c est rationnel non décimal car c est une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas de la forme $2^\alpha \times 5^\beta$ avec α et β entiers naturels.

- $d = \dfrac{7}{5}$

$d = 1,4$ donc d est un décimal non entier.

- $e = \sqrt{2023}$

e est un irrationnel car 2023 n'est pas un carré parfait (propriété du cours).

- $f = -\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

$f = -\dfrac{3}{4}$ donc d est décimal non entier.

- $g = \dfrac{\pi}{3}$

g est un irrationnel.

- $h = \sqrt[3]{10}$

h est un irrationnel car 10 n'est pas un cube parfait (propriété du cours).

$\boxed{23}$

- Démontrons que $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ est un nombre décimal.

On pose $\mathrm{A} = \left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= 2 + 2 \times \cancel{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2} \\ &= 2 + 2 + \frac{1}{2} \\ &= 4 + \frac{1}{2} \\ &= 4,5\end{aligned}$$

A est donc un nombre décimal.

Variante : On écrit $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ puis on élève au carré (ou, autre façon, $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$).

- Déterminons la nature du nombre $\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$.

On pose $\mathrm{B}=\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$.

$\mathrm{B}=3+2\times\cancel{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}+\frac{1}{3}$

$=3+2+\frac{1}{3}$

$=5+\frac{1}{3}$

$\mathrm{A}=\frac{16}{3}$ (pas utile)

$\mathrm{A}=5{,}33\underline{3}\ldots$

B est rationnel non décimal.

$\boxed{\textbf{24}}$

1°) Démontrons que si a est un irrationnel positif ou nul, alors $\sqrt{a}$ est irrationnel.

On va faire un raisonnement par contraposée.

Attention, on suppose uniquement que $a\in\mathbb{R}_+^*$ (pas $a\in\mathbb{N}$).
On ne peut donc se référer à la règle du cours qui parle de l'irrationalité de la racine carrée d'un entier naturel.

On définit les prédicats suivants pour a positif ou nul :
P : « $a\notin\mathbb{Q}$ » et Q : « $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$ »

On veut démontrer que $P\Rightarrow Q$.

On sait que cela est équivalent à démontrer la contraposée c'est-à-dire (non Q) $\Rightarrow$ (non P).

non P : « $a\in\mathbb{Q}$ » et non Q : « $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ »

On suppose donc que $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$.

On a donc $\sqrt{a}^2\in\mathbb{Q}$ soit $a\in\mathbb{Q}$.

2°) $(x_n)\begin{cases}x_0=\sqrt{2}\\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\end{cases}$

Démontrons que tous les termes de la suite (x_n) sont irrationnels.

On utilise le 1°).

$x_0=\sqrt{2}$ donc $x_0\notin\mathbb{Q}$.

On sait que $x_0=\sqrt{2}$ donc $2+x_0\notin\mathbb{Q}$. D'après le 1°), $\sqrt{2+x_0}\notin\mathbb{Q}$ d'où $x_1\notin\mathbb{Q}$.

On peut recommencer avec x_1, puis avec x_2 etc.

Il s'agit d'un raisonnement de « proche en proche »

Le principe rigoureux consiste à dire que :
- $x_0\notin\mathbb{Q}$;
- Si $x_n\notin\mathbb{Q}$ pour un entier naturel n quelconque, alors $x_{n+1}\notin\mathbb{Q}$.

Selon un principe établi au XVII$^{\text{e}}$, appelé principe de récurrence, on peut alors en déduire la propriété pour l'ensemble de tous les entiers naturels.
La propriété tombe comme des dominos.

On peut utiliser une propriété sur les suites (propriété de stabilité).

$\boxed{\textbf{25}}$

Donnons un exemple de nombre irrationnel x non nul tel que $x+\frac{1}{x}$ soit rationnel.

Solution d'après Olivier Allard le 7-9-2022 :

$x+\frac{1}{x}=r$

$x^2-rx+1=0$

$\Delta=r^2-4$

$x=\frac{r+\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $x=\frac{r-\sqrt{\Delta}}{2}$

Il suffit de choisir un nombre rationnel r tel que Δ soit un réel positif qui ne soit pas le carré d'un nombre rationnel.
On peut prendre $r=3$, $r=4\ldots$

On peut prendre le nombre $x=2+\sqrt{3}$.

$x+\frac{1}{x}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

Pour cette valeur de x, $x+\frac{1}{x}$ est un entier donc un rationnel.

Le nombre p, p+1 etc. ne conviennent pas.

26

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ (la variable k est une variable muette)

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

H_n désigne la somme des inverses de tous les entiers naturels de 1 à n.

1°) Justifions que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, H_n est un nombre rationnel.

Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, $\frac{1}{k}$ est un nombre rationnel.

H_n est une somme de nombres rationnels donc c'est un nombre rationnel.

2°) Parmi les nombres H_n pour $n \leqslant 10$, lesquels sont des entiers ? lesquels sont des décimaux ?

$H_1 = \frac{1}{1} = 1$

$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = H_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$H_4 = H_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$

$H_5 = \frac{137}{60}$

$H_6 = \frac{49}{20} = 2,45$

$H_7 = \frac{363}{140}$

$H_8 = \frac{761}{280}$

$H_9 = \frac{7129}{2520}$

$H_{10} = \frac{7381}{2520}$

H_1 est un entier naturel.

H_2 et H_6 sont des décimaux non entiers.

Commentaires :

Les nombres H_1, H_2, H_3, etc. sont appelés nombres harmoniques.

On peut démontrer que le seul nombre harmonique qui soit entier est H_1.

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Kürschák (1918).

On observe que tout nombre H_n avec $n \geqslant 2$ s'écrit comme quotient d'un entier naturel impair sur un entier naturel pair. Ce résultat peut se démontrer.

Le postulat de Bertrand permet de démontrer que les seuls nombres harmoniques décimaux non entiers sont $H_2 = 1,5$ et $H_6 = 2,45$.

Julian Havil (de), Gamma : Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, 2009 (1ère éd. 2003), 304 p. (ISBN 978-0-691-14133-6, lire en ligne [archive]), p. 24-25.

27

$x \in \mathbb{R}^*$

P : « Si x est un nombre rationnel, alors e^x est un nombre irrationnel ».

définition

A $\Rightarrow$ B

réciproque

B $\Rightarrow$ A

contraposée

(non B) $\Rightarrow$ (non A)

Quelle est la contraposée de la réciproque ?

La phrase P exprime une implication A(x) $\Rightarrow$ B(x) avec A(x) : « $x \in \mathbb{Q}$ » et B(x) : « $e^x \notin \mathbb{Q}$ ».

Cette implication est sous quantification $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

- Écrire la réciproque de P.

« Si e^x est un nombre irrationnel, alors x est un nombre rationnel ».

La réciproque est fausse. Pour le montrer, il suffit de donner un exemple de réel x tel ue e^x soit un nombre irrationnel et x soit un nombre irrationnel.

On peut prendre le nombre $x = \ln\left(\sqrt{2}\right)$ (contre-exemple).

On a $x = \frac{\ln 2}{2}$ (propriété du logarithme népérien). Comme ln 2 est un irrationnel d'après le cours, x est aussi irrationnel.

Or $e^x = \sqrt{2}$ qui est un nombre irrationnel.

Commentaires :

- On peut prendre $\ln\left(\sqrt{n}\right)$ avec n entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'est pas un carré parfait.
- On ne peut pas prendre $x = \sqrt{2}$ comme contre-exemple car on n'a pas les moyens, en Terminale, de savoir que $e^{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

La calculatrice ne permet pas de connaître la nature du nombre $e^{\sqrt{2}}$ même si les décimales affichées sur la calculatrice laissent penser qu'il s'agit d'un nombre irrationnel.

La calculatrice ne peut afficher que 14 chiffres.

• Écrire la contraposée de P.

« Si e^x est un nombre rationnel, alors x est un nombre irrationnel ».

[« Si e^x n'est pas un nombre irrationnel, alors x n'est pas un nombre irrationnel ».]

La contraposée est vraie.

Remarque :
La propriété P ne permet pas de déterminer la nature du nombre e^{π} (constante de Gelfond).
On peut néanmoins démontrer que c'est un nombre irrationnel et même transcendant.

28

$ab = -5 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ et } b = -5)$ ou $(a = -5 \text{ et } b = 1)$ ou $(a = -1 \text{ et } b = 5)$ ou $(a = 5 \text{ et } b = -1)$

29

Exprimer le nombre 100 comme CL à coefficients entiers relatifs.

a) de 3 et 7

$10\times3+10\times7=100$ $\quad$ $17\times3+7\times7=100$ $\quad$ $13\times7+3\times3=100$
Chacune de ces égalités donne une expression de 100 comme CL de 3 et 7 à coefficients entiers (car 10 est un entier naturel par exemple dans la première égalité).

b) de 2 et 3

$20\times3+20\times2=100$ $\quad$ $32\times3+2\times2=100$ $\quad$ $41\times2+6\times3=100$ $\quad$ $2\times50+3\times0=100$

Les coefficients peuvent être nuls.

c) de 11 et 2

$11\times8+2\times6=100$ $\quad$ $0\times11+50\times2=100$ $\quad$ $11\times12-16\times2=100$

Les coefficients peuvent être négatifs.

30

On procède par élimination : élimination du n entre les deux égalités définissant a et b.

1$^{\text{er}}$ cas : $a = 3n-1$ et $b = 2n-2$

$2a-3b = 2(3n-1)-3(2n-2) = 6n-2-6n+6 = 4$

Les deux nombres 2 et – 3 sont des entiers relatifs donc $2a-3b$ est une combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est indépendant de n non nul.

2$^{\text{e}}$ cas : $a = n^2+1$ et $b = n$

$1\times a - nb = n^2+1-n\times n = 1$

Les deux nombres 1 et – n sont des entiers relatifs donc $a-nb$ est une combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est indépendant de n non nul.

3$^{\text{e}}$ cas : $a = n+1$ et $b = n^2$

$(n-1)b-1\times b = (n-1)(n+1)-n^2 = n^2-1-n^2 = -1$

Les deux nombres $n-1$ et – 1 sont des entiers relatifs donc $(n-1)b-b$ est une combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est indépendant de n non nul.

31

On peut tester chaque élément de $[\![1;10]\!]$.

$\dfrac{1}{1}=1$ est un entier naturel donc un nombre décimal.

$\dfrac{1}{2}=0,5$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{4}=0,25$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{5}=0,2$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{6}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{8}=0,125$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{10}=0,1$ est un nombre décimal.

Comme toutes les fractions sont irréductibles, on peut aussi appliquer la règle du cours directement en gardant les nombres x qui s'écrivent sous la forme $2^{\alpha}\times5^{\beta}$ avec α et β entiers naturels (produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5 avec des exposants entiers naturels ; il s'agit en fait d'une décomposition en facteurs premiers).

32

On cherche l'ensemble E des entiers naturels non nuls dont l'inverse est un nombre décimal.

Autrement dit, on cherche $E=\left\{n\in\mathbb{N}^* \,/\, \frac{1}{n}\in\mathbb{D}\right\}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ est une fraction irréductible.

On utilise la propriété admise du cours qui caractérise les fractions irréductibles correspondant à des nombres décimaux.

Propriété admise sans démonstration :

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
On suppose que a et b sont premiers entre eux (la notion sera précisée dans le chapitre suivant ; on peut dire que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible).

$\frac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si b est de la forme $2^{\alpha}\times5^{\beta}$ où α et β sont des entiers naturels.

On en déduit que $E=\left\{2^{\alpha}\times5^{\beta},\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{N}^2\right\}$.

33

Le 21 septembre 2022

① $13\times11=143$

② $152\times11=1672$

1+5 5+2

③ $156\times11=1716$

On peut écrire $n=10a+b$.

On a donc $11n=(10+1)\times(10a+b)=100a+10(a+b)+b$.

34

$1=1$

$1+3=4$

$1+3+5=9$

$1+3+5+7=16$

$1+3+5+7+9=25$

On observe que les résultats sont des carrés parfaits.

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$

Ces résultats permettent de formuler une conjecture pour la somme des n premiers entiers naturels impairs.

Formulation (i)

On peut conjecturer que pour tout entier naturel $n\geqslant1$ la somme des n premiers entiers naturels impairs est égale à n^2.

Formulation (ii)

Pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs est égale à n^2.
On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=n^2$.

Il y a plusieurs démonstrations possibles :
- récurrence ;
- suites

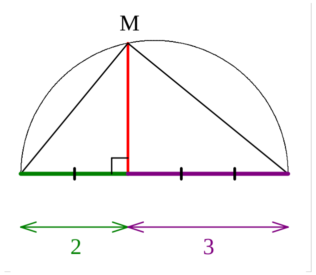
Ce résultat avait été découvert dans l'Antiquité.

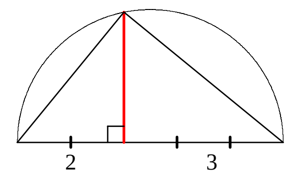
36 Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{6}$ à partir d'un segment de longueur 1.

Il y a plusieurs méthodes.

1ère méthode :

On observe que $\sqrt{6}$ est la moyenne géométrique de 2 et 3.
On utilise la construction d'une moyenne géométrique à l'aide d'un demi-cercle.





2^e^ méthode :

On écrit $6=2+4$.

Il faut d'abord construire un segment de longueur $\sqrt{2}$.

3^e^ méthode :

Spirale de Pythagore

37

• Déterminer tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

On $a=b=2$.

• Déterminer tous les entiers naturels non nuls a, b, c tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

a=b=c=3
a=2 b=3 c=6
a=4 b=4 c=2

Corrigé à mettre

38

L et de largeur ℓ en mètre vérifiant les conditions :
$\frac{\mathrm{L}}{\ell}=\sqrt{2}$
Son aire est égale à 1 m^2.
Déterminer L et ℓ. Préciser leur nature.

Solution :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}}{\ell}=\sqrt{2}\\ \mathrm{L}\times\ell=1\end{cases}$$

Il s'agit d'un système non linéaire.

$\mathrm{L}=\ell\sqrt{2}$

$\ell\times\ell\sqrt{2}=1$

$\ell^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Or l est un réel strictement positif donc $\ell=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

On en déduit que $\mathrm{L}=\frac{1}{\ell}=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$

$\mathrm{L}=\ell\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}}{\ell}=\sqrt{2}\\ \end{cases}$$

L et ℓ sont des nombres irrationnels.

La calculatrice Numworks fournit le résultat $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

Pour L, on obtient alors $\mathrm{L}=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{8}}{2}}=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$.

Ces résultats peuvent être démontrés rigoureusement avec les propriétés des racines n-ièmes.
Dans notre exercice, ils ne présentent pas un grand intérêt.

39

« Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels. »

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4\ /\ n=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Tout doit tenir sur une seule ligne.

40 On considère l'ensemble $E=\{2+3k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
1°) Recopier et compléter la phrase :
« E est l'ensemble des nombres de la forme … ».

E est l'ensemble des nombres de la forme $2+3k$ lorsque $\left|\begin{array}{l}k \text{ décrit } \mathbb{Z}\\ \text{pour } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$.

2°) Parmi les nombres suivants lesquels appartiennent à E ? 0 ; 1 ; – 1 ; 5 ; 2022

On a $-1=2+3\times(-1)$ donc $-1\in E$.

On a $5=2+3\times1$ donc $5\in E$.

41

Déterminons l'ensemble S des réels x tels que $\cos x=1$.

D'après le cercle trigonométrique, on a $S=\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.