TS

Le produit scalaire dans l'espace

Notations :

On note E l'ensemble des points de l'espace ;
$\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Une unité de longueur est fixée.

I. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls}\\ 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0}\end{cases}$$

La notation $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Il s'agit bien de l'angle géométrique des vecteurs. Il n'y a pas d'angle orienté dans l'espace.

2°) Cas particulier

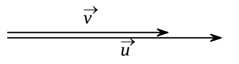
A, B, C sont trois points quelconques de E tels que $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$.

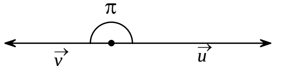
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}$

3°) Produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont \textbf{colinéaires de même sens}}\\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont \textbf{colinéaires de sens contraire}}\end{cases}$$





4°) Signe d'un produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques **non nuls** de $\vec{E}$.

- $\vec{u}\bullet\vec{v}>0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **aigu**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}<0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **obtus**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **droit**

Le produit scalaire en physique est utilisé pour définir le **travail d'une force** constante sur un trajet rectiligne ; on parle de **travail moteur** ou de **travail résistant** suivant son signe.

II. Carré scalaire d'un vecteur

1°) Définition et propriété

$\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

2°) Cas particulier

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2=\mathrm{AB}^2$

III. Vecteurs orthogonaux

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$) pour exprimer que

- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{2}$.
- soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

2°) Propriété

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=0$

3°) Lieux d'orthogonalité de référence dans l'espace

Dans le plan :

- Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$: **droite** perpendiculaire à (AB) passant par C.

- Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$: **cercle** de diamètre [AB].

Dans l'espace :

- Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ où A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$: **plan** orthogonal à (AB) passant par C.

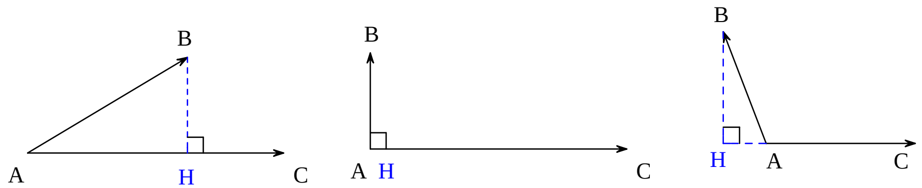
- Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où A et B sont deux points tels que $A \neq B$: **sphère** de diamètre [AB].

IV. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques de E tels que $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$.

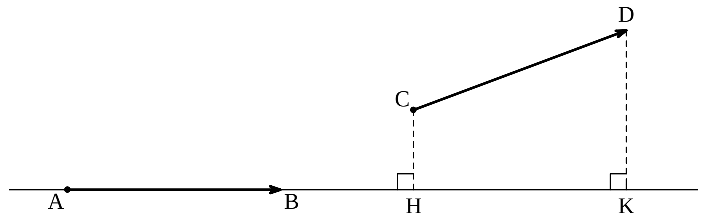


2°) Démonstration

Voir cours de 1ère.

3°) Généralisation (projection « complète »)

A, B, C, D sont quatre points coplanaires de E tels que $A \neq B$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$.



4°) Mises en garde

- **On ne peut pas projeter sur une autre droite que la droite (AB) ou la droite (AC).**

- **On ne peut projeter que l'un des deux vecteurs.**

- **Lorsque l'on calcule un produit scalaire dans l'espace, on ne peut pas faire de projection orthogonale sur un plan.**

V. Propriétés du produit scalaire

1°) Propriétés fondamentales (symétrie et bilinéarité du produit scalaire)

P_1 : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \vec{E}^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. ($P_1$: **symétrie du produit scalaire**)

P_2 : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \vec{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \cdot \left(\lambda \vec{v}\right) = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$ (P_2 et P_3 : **bilinéarité du produit scalaire**)

P_3 : $\forall \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \in \vec{E}^3 \quad \vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2°) Démonstrations

Voir cours de 1ère.

3°) Conséquences sur les développements scalaires doubles

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'\right) \in \vec{E}^4 \quad \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u}' + \vec{v}'\right) = \vec{u} \cdot \vec{u}' + \vec{u} \cdot \vec{v}' + \vec{v} \cdot \vec{u}' + \vec{v} \cdot \vec{v}'$$

$$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \vec{E}^2 \quad \forall \left(\lambda, \lambda'\right) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\lambda \vec{u}\right) \cdot \left(\lambda' \vec{v}\right) = \lambda\lambda' \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$$

4°) Identités remarquables scalaires

$$\forall(\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2 \quad (\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2(\vec{u}\bullet\vec{v})+\vec{v}^2$$
$$\forall(\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2 \quad (\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2(\vec{u}\bullet\vec{v})+\vec{v}^2$$
$$\forall(\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2 \quad (\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

5°) Bilan des méthodes de calcul d'un produit scalaire

Expression trigonométrique avec le cosinus
(cas particuliers
- vecteurs colinéaires + ou – le produit des normes
- vecteurs orthogonaux : 0)

Projeté orthogonal

P.S. de 2 vecteurs

Décomposition de vecteurs

Calcul dans un repère orthonormé
$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

VI. Relations métriques dans un triangle quelconque

1°) Théorème de Pythagore généralisé (formule d'Al Kashi)

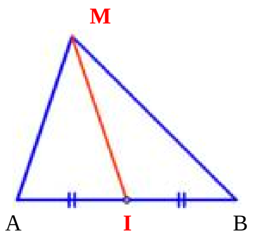
Dans un triangle ABC quelconque, on a : $\mathbf{BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{A}}$.

Idée pour faire la démonstration :
$\mathrm{BC}^2=\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2$

2°) Formule de la médiane

A et B sont deux points quelconques de *E*.
I est le milieu de [AB].

$\forall \mathrm{M}\in E \quad \mathbf{MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}}$



Idée pour faire la démonstration :
$\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2+\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2$

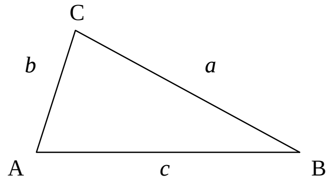
3°) Autres formules dites aussi parfois « formules de la médiane »

$\forall \mathrm{M}\in E \quad \mathrm{MA}^2-\mathrm{MB}^2=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{IM}}$

$\forall \mathrm{M}\in E \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\mathrm{MI}^2-\dfrac{\mathrm{AB}^2}{4}$

4°) Aire d'un triangle – Formule des sinus

ABC est un triangle quelconque.
On pose $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$.
L'aire S du triangle ABC est donnée par : $\mathbf{S=\dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}ca\sin\widehat{B}=\dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}}$.



$$\mathbf{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{abc}{2S}}$$

VII. Lignes et surfaces de niveau

1°) Définition

f est une application de E dans $\mathbb{R}$.
k est un réel.
On appelle **surface de niveau *k*** de *f* l'ensemble $S_k=\{\mathrm{M}\in E\ /\ f(\mathrm{M})=k\}$.

On parle de **ligne de niveau** lorsque *f* est une application du plan dans $\mathbb{R}$.

2°) Exemple

A et B sont deux points quelconques de *E*.
I est le milieu de [AB].

$$f$$
$$E\to\mathbb{R}$$
$$\mathrm{M}\mapsto \mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$$

Déterminer la **surface de niveau k** $(k \in \mathbb{R})$ de f c'est-à-dire l'ensemble $S_k = \{M \in E \,/\, f(M) = k\}$.

Compte tenue de la définition de f, $S_k = \{M \in E \,/\, MA^2 + MB^2 = k\}$.

D'après la formule de la médiane, $\forall M \in E \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

$$\begin{aligned} M \in S_k &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = k \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) \end{aligned}$$

On ne connaît pas le signe de $k - \dfrac{AB^2}{2}$; il faut faire une **discussion**.

1^er^ cas : $\boxed{k > \dfrac{AB^2}{2}}$

$$M \in S_k \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}$$

S_k est la sphère
- de centre I
- de rayon $R = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right)}$.

2^e^ cas : $\boxed{k = \dfrac{AB^2}{2}}$

$$\begin{aligned} M \in S_k &\Leftrightarrow MI = 0 \\ &\Leftrightarrow M = I \end{aligned}$$

$S_k = \{I\}$

3^e^ cas : $\boxed{k < \dfrac{AB^2}{2}}$

$$M \in S_k \Leftrightarrow \underbrace{MI^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right)}_{<0}$$

impossible

$S_k = \varnothing$

VIII. Vecteur normal à un plan

1°) Rappel

Soit D une droite du plan.

On appelle **vecteur normal** à D tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à D c'est-à-dire tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de D.

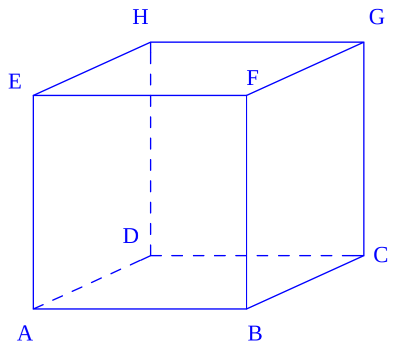
2°) Définition [vecteur normal à un plan]

Soit P un plan de l'espace.

On appelle **vecteur normal** à P tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à P.

3°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.



Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

4°) Propriété

Soit P un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires de P.
$\vec{u}$ est un vecteur normal à P si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

La condition « $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ » est équivalente à $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

On peut dégager une méthode pratique pour démontrer qu'un vecteur est un vecteur normal à un plan défini par trois points non alignés.

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Pour démontrer que $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), on démontre que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0$.

5°) Mise en garde

La notion de vecteur normal dans l'espace n'est valable que pour un plan.
On ne parle pas de vecteur normal pour une droite de l'espace.

6°) Théorème

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
Le plan *P* passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

7°) Propriétés de parallélisme, d'incidence et d'orthogonalité à l'aide de vecteurs normaux

Soit *P* et *Q* deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$P \,//\, Q \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Soit *P* et *Q* deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

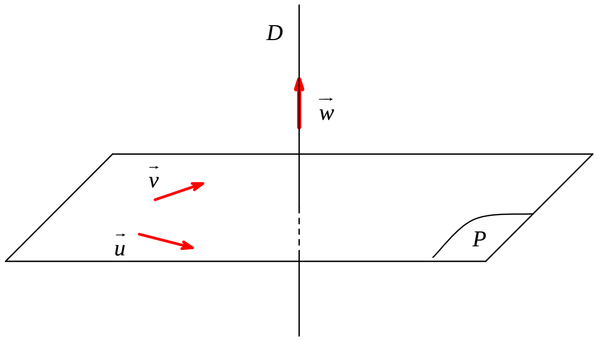
P et *Q* sont sécants $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Soit *P* et *Q* deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$P \perp Q \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (c'est-à-dire . $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Soit *D* une droite de l'espace.
Soit *P* un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de *P*.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de *D*.

$$D \perp P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$$



Soit *D* une droite de l'espace.
Soit *P* un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à *P*.
Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de *D*.

$D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Avec les mêmes notations, *D* est sécante à $P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Soit *D* une droite de l'espace.
Soit *P* un plan de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à *P*.
Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de *D*.

$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.