

Les vecteurs du plan

Objectifs :

- consolider les acquis de seconde
- approfondir le calcul vectoriel abordé en seconde
- mettre en œuvre le calcul vectoriel pour démontrer des propriétés

Les vecteurs seront utilisés en physique lors de l'étude des forces.

I. Translation et vecteurs

1°) Définition d'un vecteur

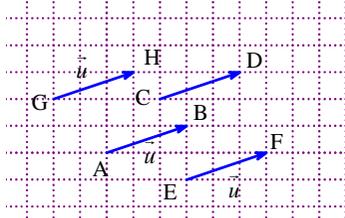
Si la translation t qui transforme A en B transforme aussi C en D, E en F, G en H..., on dit qu'il s'agit de la **translation** de vecteur \vec{u} représenté par \overline{AB} ou \overline{CD} ou \overline{EF} ou

Vocabulaire :

Le vecteur \vec{u} est attaché à la translation t . Il caractérise la translation t . On dit que c'est le vecteur de la translation t .

Il ne faut pas confondre vecteur et translation.

Nous y reviendrons dans le paragraphe VII.



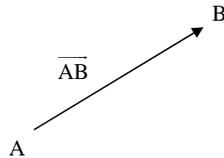
On écrit : $\vec{u} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \dots$

On dit que \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} sont des **représentants** du vecteur \vec{u} .

2°) Vecteur défini par deux points distincts

Lorsque A et B sont distincts (c'est-à-dire non confondus ou encore $A \neq B$), le **vecteur** \overline{AB} est défini par :

- **sa direction** : celle de la droite (AB) ;
- **son sens** : celui de A vers B ;
- **sa norme** : la longueur AB.



A est parfois appelé **l'origine** du vecteur \overline{AB} ; B est parfois appelé **l'extrémité** du vecteur \overline{AB} .

Le vecteur \overline{AB} est un « objet » mathématique caractérisé par **3** choses : sa direction, son sens, sa norme.

Il est possible de tracer un représentant d'un vecteur en prenant pour origine n'importe quel point du plan.

Il est possible de tracer un représentant d'un vecteur en prenant pour extrémité n'importe quel point du plan.

3°) Deux notions à ne pas confondre : direction et sens.

4°) Norme

La norme d'un vecteur \vec{u} est notée $\|\vec{u}\|$.

Remarque : $\|\overline{AB}\| = AB$ (la norme du vecteur \overline{AB} est égale à la distance entre les points A et B)

La norme d'un vecteur ne dépend pas du représentant choisi. C'est un réel positif ou nul.

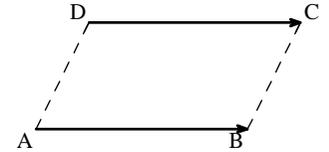
II. Égalité de deux vecteurs

1°) Définition

Dire que les vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} ($A \neq B$ et $C \neq D$) sont égaux signifie qu'ils ont même direction, même sens et même norme.

2°) Caractérisation

Dire que $\overline{AB} = \overline{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.



Dire que $\overline{AB} = \overline{DC}$ signifie que [AC] et [BD] ont le même milieu.

III. Addition des vecteurs

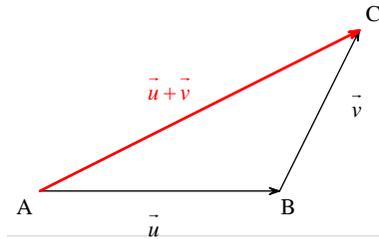
On peut définir la somme de deux vecteurs.

1°) Relation de Chasles

Étant donnés deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , la **somme** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ qui correspond à la translation de vecteur \vec{u} suivie de la translation de vecteur \vec{v} .

2°) Relation de Chasles

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

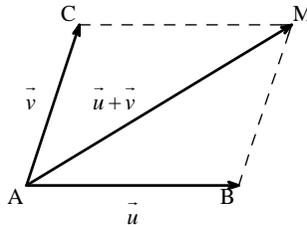


$$\vec{u} = \overline{AB} ; \vec{v} = \overline{BC}$$

Application : construction de la somme de deux vecteurs en mettant les vecteurs « bout à bout ».

On notera que la relation de Chasles est fautive pour les longueurs ; on n'a pas $AB + BC = AC$.

3°) Règle du parallélogramme



$$\vec{u} = \overline{AB}$$

$$\vec{v} = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AM} \text{ où } ABMC \text{ est un parallélogramme.}$$

Démonstration :

1^{ère} manière : $\vec{u} + \vec{v} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AM}$ (relation de Chasles)

1^{ère} manière : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \overline{AC} + \overline{CM} = \overline{AM}$ (relation de Chasles)

Application : construction de la somme de deux vecteurs ayant la même origine.

4°) Vecteur nul

Le **vecteur nul** noté $\vec{0}$ est le vecteur \overline{AA} , \overline{BB} ...

Il n'a ni direction ni sens.

Propriété : Pour tout vecteur \vec{u} , on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

La norme du vecteur nul est 0. On peut écrire $\|\vec{0}\| = 0$.

5°) Vecteur opposé

\overline{BA} est le **vecteur opposé** au vecteur \overline{AB} .

$$\overline{BA} = -\overline{AB} \text{ et } \overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$$

6°) Soustraction de deux vecteurs

• Définition

La **différence** $\vec{u} - \vec{v}$ de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

• Application : forme soustractive de la relation de Chasles

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Il s'agit d'une forme intéressante pour décomposer un vecteur à l'aide de deux autres vecteurs.

IV. Multiplication par un réel

1°) Définition

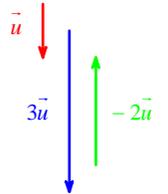
\vec{u} est un vecteur et k un réel.

Le **produit** du vecteur \vec{u} par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ défini comme suit.

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, alors $k\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{u} = \vec{0}$.

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur :

- de même direction que \vec{u} ,
- de même sens que \vec{u} si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$,
- de norme égale à $|k|$ (valeur absolue de k) fois la norme de \vec{u}



2°) Remarque sur la norme

$$\text{On a : } \|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

Cette égalité se lit : « La norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale à la valeur absolue de k multipliée par la norme de \vec{u} ».

Exemple :

$$\|-2\vec{u}\| = |-2| \times \|\vec{u}\| = 2 \times \|\vec{u}\|$$

3°) Propriétés

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous réels k et k' :

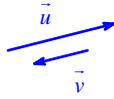
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

V. Vecteurs colinéaires

1°) Définition

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** lorsque :

- ils sont non nuls et ont la même direction
- ou
- l'un au moins des deux vecteurs est nul.



Par définition, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction mais n'ont pas forcément le même sens.

2°) Caractérisation

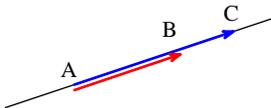
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si on peut exprimer l'un en fonction de l'autre.

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs tels que \vec{u} soit non nul.

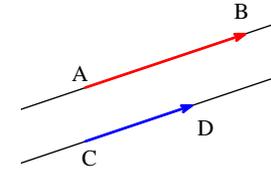
Dire que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

3°) Application à l'alignement et au parallélisme

• Dire que A, B, C sont trois points alignés équivaut à dire que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.



• Dire que (AB) et (CD) ($A \neq B$ et $C \neq D$) sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.



4°) Remarque

Ne pas confondre colinéarité et égalité de vecteurs.

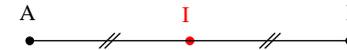
VI. Milieu d'un segment

1°) Propriété (caractérisations vectorielles du milieu d'un segment)

I milieu de [AB] équivaut à $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

I milieu de [AB] équivaut à $\vec{AI} = \vec{IB}$

I milieu de [AB] équivaut à $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$



Attention, on ne parle pas du milieu d'un vecteur ! On ne dit pas que I est le milieu du vecteur \vec{AB} .

2°) Propriété (réduction d'une somme)

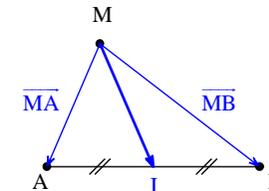
• Énoncé

A et B sont deux points quelconques du plan.

I est le milieu de [AB].

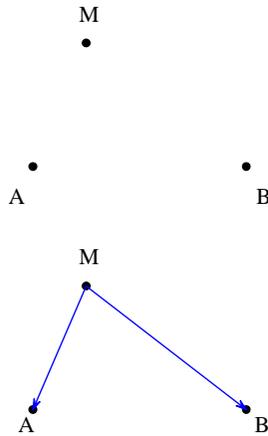
Pour tout point M du plan, on a : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

• Figure

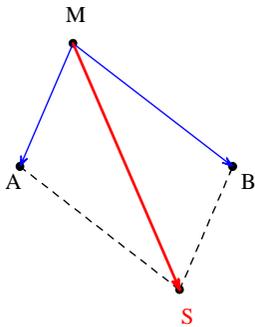


Mise en garde : Il s'agit bien d'une égalité de vecteurs et non de longueurs. L'égalité $MA + MB = 2MI$ est fausse.

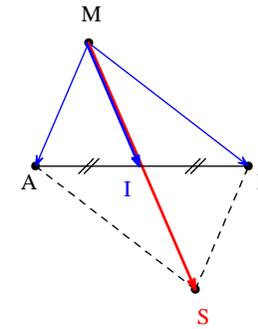
Les figures suivantes fournissent une explication de la relation et permettent de la mémoriser facilement (image mentale).



On note S le point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MS}$.
On sait que S est le point tel que le quadrilatère AMBS soit un parallélogramme.



On peut donc dire que les segments $[AB]$ et $[MS]$ se coupent en leur milieu.
Donc le milieu I de $[AB]$ est aussi le milieu de $[MS]$.
On peut donc dire que $\overrightarrow{MS} = 2\overrightarrow{MI}$.



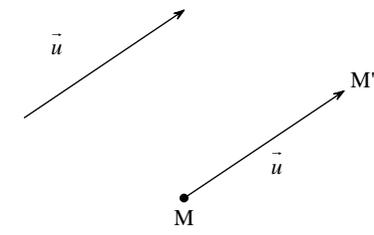
● **Démonstration**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \quad (\text{relation de Chasles ; on introduit le point I}) \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_0 \quad (\text{car I est le milieu de } [AB]) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \end{aligned}$$

VII. Retour sur la translation

1°) Définition de l'image d'un point

\vec{u} est un vecteur fixé du plan.
Pour tout point M quelconque du plan, il existe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
Le point M' est appelé l'image de M par la translation de vecteur \vec{u} (ou le translaté).



2°) Propriété

A et B sont deux points quelconques distincts du plan.
M' est l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} signifie que ABM'M est un parallélogramme.

3°) Construction du translaté

Diverses méthodes :

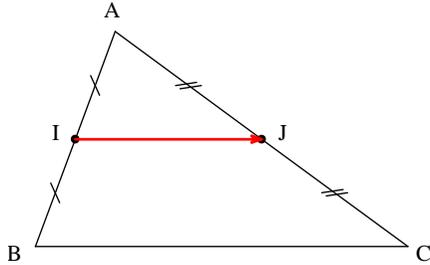
- utilisation du quadrillage
- utilisation du compas (construction du 4^e sommet d'un parallélogramme)
- utilisation de la règle et l'équerre (pour tracer les parallèles)

(Un chapitre spécial sera consacré ultérieurement aux propriétés de la translation.)

VIII. Droite des milieux dans un triangle

1°) Propriété

Soit A, B, C trois points quelconques du plan.
On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].
On a $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.



2°) Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{IJ} &= \vec{AJ} - \vec{AI} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{BC}\end{aligned}$$

3°) Application dans un triangle (« droite des milieux »)

Propriété 1 :

Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au support du 3^e côté.
Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

Propriété 2 :

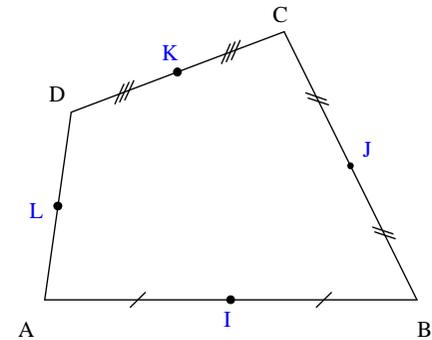
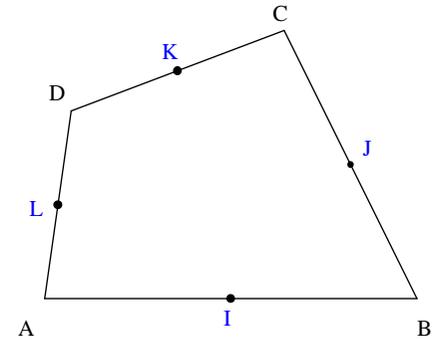
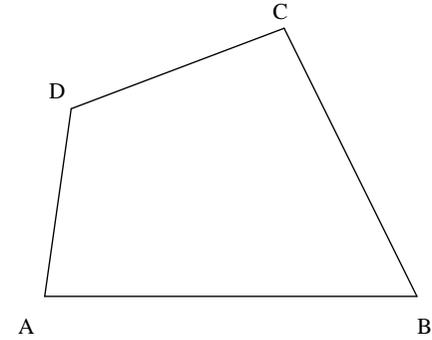
Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

Ces deux propriétés découlent de l'égalité vue au 1°).
On peut aussi les voir comme un cas particulier du théorème de Thalès et de sa réciproque.

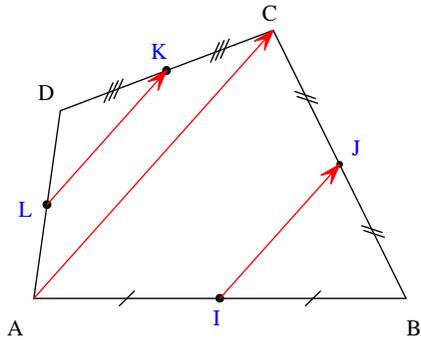
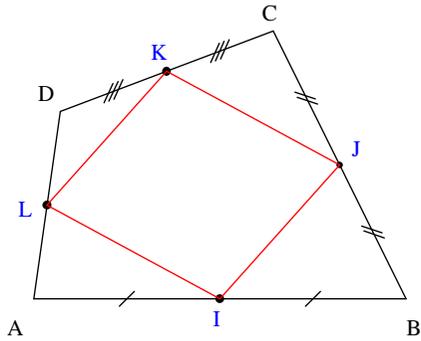
4°) Une application : le théorème de Varignon

Propriété :

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
On note I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].
Le quadrilatère IJKL est un parallélogramme (théorème de Varignon).



Complément sur la norme d'un vecteur



Pierre Varignon

Le père jésuite Pierre Varignon (1654-1722) est un mathématicien français. Il est l'auteur d'importantes contributions à la statique, notamment par la formalisation du triangle des forces et des conditions d'équilibre en trois dimensions.

Généralisation lorsque $\vec{AI} = \lambda \vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \lambda \vec{AC}$ où λ est un réel quelconque.

IX. Homothétie dans le plan

X. Appendice : calculs de longueur

1°) Hauteur d'un triangle équilatéral de côté a

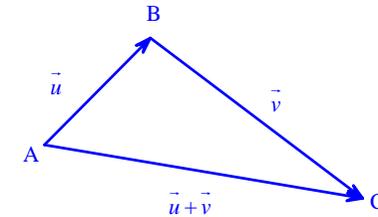
2°) Diagonale d'un carré de côté a

Propriété :

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs quelconques.
On a $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Démonstration :

On note A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.



On a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ (relation de Chasles).

D'après l'inégalité triangulaire, on a $AC \leq AB + BC$.

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Complément sur le centre de gravité d'un triangle

Propriété :

Soit ABC un triangle quelconque.

Les médianes de ABC sont concourantes en un point G.

Ce point G est appelé le **centre de gravité** du triangle.

G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le point G est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet.

Démonstration :

On note A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB].

Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1).

Figure codée sans placer G au début.

Démontrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$.

Par permutation circulaire des lettres A, B, C on obtient $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}$.

On peut déduire de ce qui précède que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

On peut donc placer G sur la figure.

Propriété

Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité.

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG} \quad (\text{relation de Chasles}) \\ = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$$

Or G est le centre de gravité du triangle ABC.

L'énoncé rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Point-méthode

1. Retour sur vecteurs colinéaires et alignement

Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés à l'aide des vecteurs, il suffit de démontrer que deux vecteurs sont colinéaires.

On a 12 choix possibles :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} * \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BC}$$

* Il vaut mieux privilégier le 1^{er} choix : les lettres sont dans l'ordre alphabétique, la 1^{ère} lettre est le point commun aux représentants des deux vecteurs.

2. Retour sur vecteurs colinéaires et parallélisme

Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles à l'aide des vecteurs, il suffit de démontrer que deux vecteurs sont colinéaires.

On a 4 choix possibles :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} * \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{DC}$$

* Il vaut mieux privilégier le 1^{er} choix : les lettres sont dans l'ordre alphabétique.

3. Retour sur les milieux

Pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment à l'aide des vecteurs, on utilise l'une des 3 caractérisations qui ont été rappelées.

4. Retour sur la configuration du parallélogramme

Égalité de vecteurs

- Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- Réciproquement, si $\overline{AB} = \overline{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme.

On peut exprimer ces deux énoncés dans une seule propriété à l'aide de la locution « si et seulement si » :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Commentaire :

La réciproque d'une propriété n'est pas toujours vraie.

On peut écrire d'autres égalités :

$$\begin{aligned}\overline{BA} &= \overline{CD} \\ \overline{AD} &= \overline{BC} \\ \overline{DA} &= \overline{CB}\end{aligned}$$

Somme de vecteurs

- Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.
- Réciproquement, si $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, alors ABCD est un parallélogramme.

On peut exprimer ces deux énoncés dans une seule propriété à l'aide de la locution « si et seulement si » :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Commentaire :

D'autres égalités sont possibles.

Utilisation

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme à l'aide des vecteurs, on utilise l'une des deux caractérisations qui ont été rappelées :

- égalité de deux vecteurs ;
- somme vectorielle.

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme à l'aide des vecteurs on utilise un seul sens des propriétés traduites à l'aide d'un « si et seulement si » : le sens de droite à gauche.

« Si ..., alors est un parallélogramme. »

Remarque

Pour les parallélogrammes, on pourrait démontrer que les vecteurs définis par les côtés sont colinéaires, mais c'est souvent long et maladroit ce qui explique qu'on ne le fasse pas.

5. Retour sur les vecteurs colinéaires

Attention

Les vecteurs colinéaires servent à démontrer

- que des droites sont parallèles (et par exemple à démontrer qu'un quadrilatère est un trapèze) ;
- que des points sont alignés.

Les vecteurs colinéaires ne servent pas :

- pour démontrer un milieu ;
- pour démontrer des parallélogrammes.

6. Calcul vectoriel

Quelques principes

Dans un calcul vectoriel, on peut :

- remplacer un vecteur par un vecteur qui lui est égal.
- transformer les différences en somme (opposé d'un vecteur)
- utiliser la relation de Chasles
 - pour décomposer un vecteur ;
 - pour réduire une somme de vecteurs.

Attention néanmoins à ne pas réduire n'importe comment.

Exemple :

$2\overline{AB} + \overline{BC}$ ne peut être réduit à cause de la présence du nombre 2 devant le vecteur \overline{AB} (impossibilité de réduire avec la relation de Chasles)

$2\overline{AB} + \overline{BC}$ n'est pas égal au vecteur \overline{AC} ni au vecteur $2\overline{AC}$.

Utilisations

- Réduire une somme (au sens algébrique) de vecteurs.
- Exprimer un vecteur en fonction de deux autres vecteurs.

Dans quel but ?

On démontre que des vecteurs sont égaux ou colinéaires pour en déduire des propriétés géométriques (parallélogramme, alignement de trois points, parallélisme de deux droites).

Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition

On appelle **combinaison linéaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des réels.

Cette définition s'applique à plus de deux vecteurs.

Exprimer un vecteur \vec{w} en fonction de deux autres vecteurs \vec{u} et \vec{v} c'est l'exprimer comme **combinaison linéaire** de ces deux vecteurs : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

7. Notations en géométrie

Milieu d'un segment et pas milieu d'un segment.

Symbole // : on l'utilise à bon escient.

La norme d'un vecteur \vec{u} n'est pas notée u sans flèche, sans norme, sans rien comme en physique !

$$\|k\vec{u}\| = \begin{cases} k \times \|\vec{u}\| & \text{si } k > 0 \\ -k \times \|\vec{u}\| & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

La relation de Chasles n'est valable que pour les vecteurs mais n'est pas valable pour les distances.

Décomposer un vecteur selon deux vecteurs non colinéaires.

Si possible choisir deux vecteurs ayant la même origine

Pour décomposer les vecteurs : on s'appuie plutôt sur les hypothèses que sur la figure (d'où la nécessité d'écrire les hypothèses).

Décomposer 1 vecteur selon 2 vecteurs non colinéaires
2 vecteurs si possibles de même origine

Avant de commencer la résolution d'un exercice

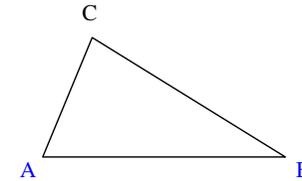
• Figures

Triangles : disposition des points

La disposition a une certaine importance pour le cerveau.

On essaie si possible d'avoir toujours au moins un côté horizontal (plus commode pour le cerveau).

Triangle quelconque ABC



Triangle isocèle : on prend la base horizontale et le sommet principal au-dessus

Triangle rectangle :

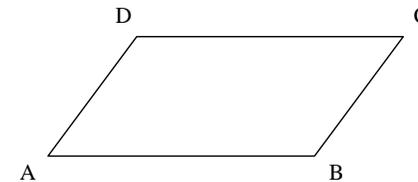
Pour ABC triangle rectangle en A, on prendra :

- (AB) horizontale,
- A à gauche de B
- C au-dessus de (AB)
- $AB > AC$

On marque le codage de l'angle droit.

Parallélogrammes : disposition des points

Parallélogramme ABCD



(AB) horizontale ;

A « à gauche » de B ;

C et D au-dessus de (AB) ;

angle \widehat{BAD} aigu ;

AB longueur et AD largeur (c'est-à-dire $AB < AD$).

Codages des milieux

- **Partage d'un segment (division régulière)** : utilisation des carreaux, méthode avec le théorème de Thalès (demi-droite auxiliaire).
- Écrire les **hypothèses** dans un **encadré** à la règle à côté de la figure.