TS

Orthogonalité de l'espace

Plan

I. Droites orthogonales dans l'espace

II. Droite orthogonale à un plan

III. Théorèmes d'orthogonalité

IV. Utilisation des théorèmes

V. Plan médiateur

VI. Projetés orthogonaux

VII. Plans perpendiculaires

VIII. Intersection d'une sphère et d'un plan

I. Droites orthogonales dans l'espace

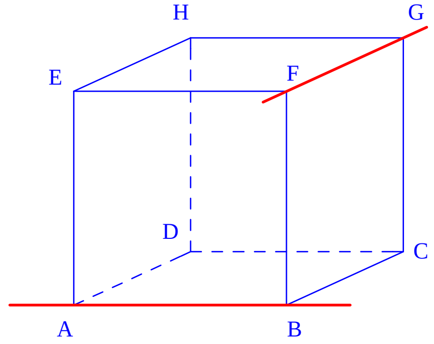
1°) Définition

On dit que deux droites de l'espace sont **« orthogonales »** lorsque leurs parallèles menées d'un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Cette définition ne dépend pas du point choisi.

2°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.



Les droites (AB) et (FG) sont orthogonales car la parallèle à la droite (FG) passant par B est la droite (BC) et les droites (BC) et (AB) sont perpendiculaires.

Symbole : $\perp$

(AB) $\perp$ (FG)

3°) Remarques

Attention : Deux droites de l'espace orthogonales ne sont pas forcément coplanaires.

L'adjectif « perpendiculaire » s'applique dans l'espace à des droites orthogonales sécantes uniquement.
(Par contre, les symboles « perpendiculaires » et « orthogonales » sont les mêmes).

II. Droite orthogonale à un plan

1°) Définition

On dit qu'une droite de l'espace est **« orthogonale »** à un plan pour exprimer qu'elle est perpendiculaire à deux droites de ce plan.

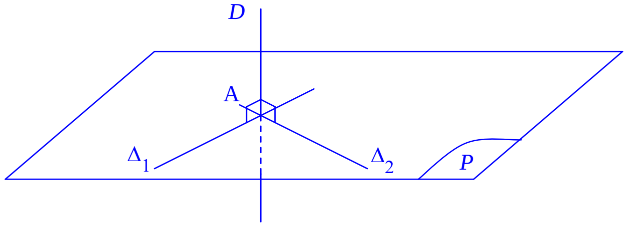


Image : plan horizontal-droite verticale

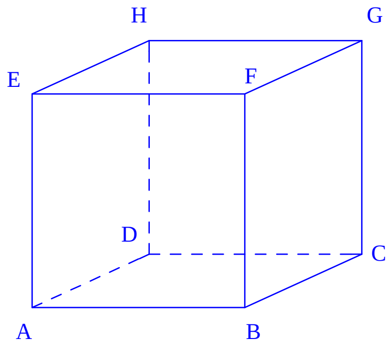
(exemple concret : une porte qui tourne autour de ses gonds)

2°) Remarques

On peut dire indifféremment qu'une droite est orthogonale à un plan ou est perpendiculaire à un plan.
Symbole $\perp$: $D \perp P$ (une droite orthogonale à un plan est forcément sécante à ce plan)

3°) Exemple

ABCDEFGH est un cube.



(AE) $\perp$ (ABC) (à utiliser directement)

III. Théorèmes d'orthogonalité (à savoir par cœur, à citer en contrôle)

Ces théorèmes sont admis sans démonstration.

1°) Théorème 1

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

2°) Théorème 2

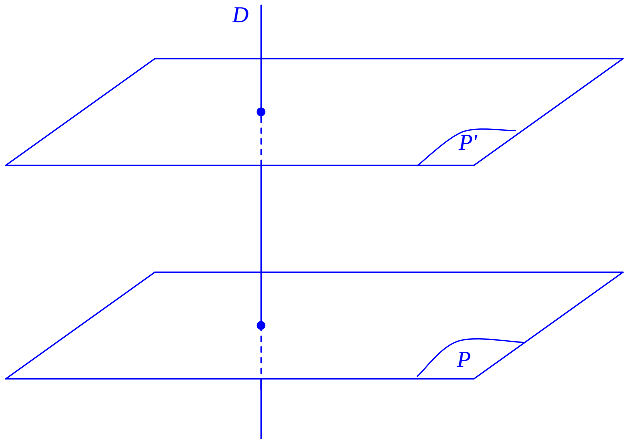
Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses (ou contenues) dans ce plan.

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales.

3°) Théorème 3

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux plans sont plans sont parallèles.



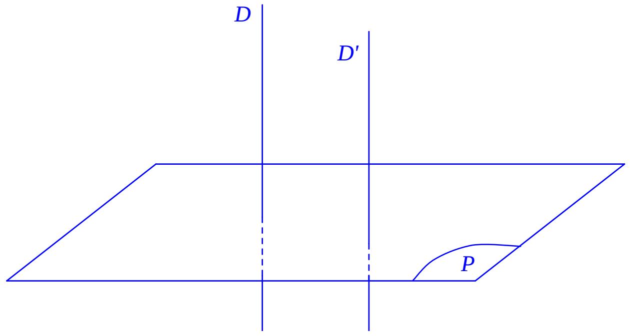
4°) Théorème 4

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

5°) Théorème 5

Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles (entre elles).



Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont parallèles.

6°) Théorème 6

Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Intérêt :
Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

IV. Utilisation des théorèmes

1°) Dans quels cas utiliser les théorèmes

• Démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan
→ th. 1
(th. 4, th. 6)

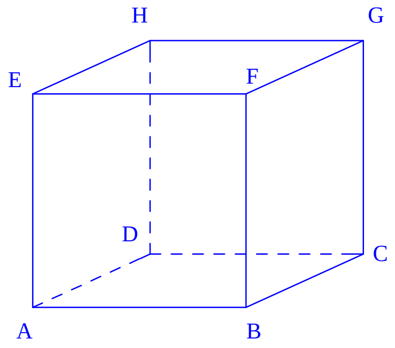
• Démontrer que deux droites sont orthogonales
→ définition
→ th. 2

• Démontrer que deux plans sont parallèles
→ th. 3

• Démontrer que deux droites sont parallèles
→ th. 5
(Théorèmes à citer en contrôle !)

2°) Exemple (avec rédaction-type)

ACDEFGH est un cube.



Démontrer que (DH) $\perp$ (AC).

(DH) $\perp$ (ABC)

(AC) $\subset$ (ABC)

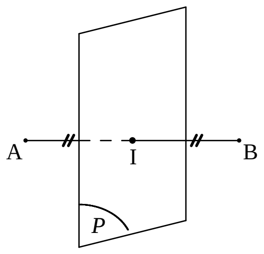
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Donc (DH) $\perp$ (AC).

V. Plan médiateur

1°) Définition

A et B sont deux points de l'espace.
On appelle **« plan médiateur »** du segment [AB] le plan *P* passant par le milieu I de [AB] et orthogonal à la droite (AB).



Attention : ne pas parler de médiatrice dans l'espace.

2°) Propriété de caractérisation du plan médiateur (admise sans démonstration)

M est un point quelconque de l'espace.

$\mathbf{M \in \mathit{P} \Leftrightarrow MA = MB}$

(Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités).

Il s'agit de la même propriété que pour la médiatrice dans le plan.

On peut aussi dire que le plan médiateur d'un segment est un plan de symétrie de ce segment.

VI. Projetés orthogonaux

1°) Projeté orthogonal d'un point sur une droite de l'espace

• Définition

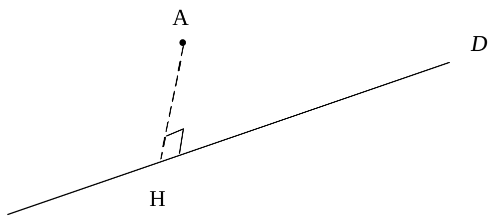
D est une droite.
A est un point de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur *D* le point H d'intersection de la droite *D* et du plan passant par A et orthogonal à *D*.

La distance AH est appelée **distance du point A à la droite *D***.

Le projeté orthogonal d'un point A sur *D* est le point H de *D* défini par :

- $H = A$ si $A \in D$;
- $(AH) \perp D$ si $A \notin D$.



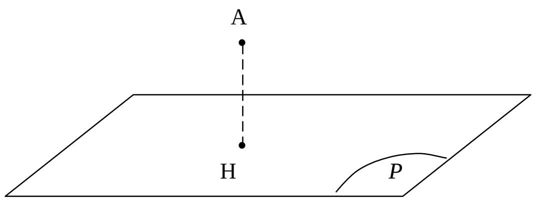
• Propriété

La distance AH est la plus courte distance du point A à un point de *D*.

2°) Définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan de l'espace

• Définition

P est un plan.
A est un point de l'espace.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur *P* le point H d'intersection du plan *P* et de la droite passant par A et orthogonale à *P*.
La distance AH est appelée **distance du point A au plan *P***.



• Propriété

La distance AH est la plus courte distance du point A à un point de *P*.

VII. Plans perpendiculaires

1°) Définition

On dit que deux plans P et P' sont **perpendiculaires** s'ils forment un angle droit.

On note $P \perp P'$.

2°) Exemple

Dans un pavé droit, les plans de deux faces consécutives sont perpendiculaires.

3°) Propriété

Deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si l'un des deux contient une droite orthogonale à l'autre.

VIII. Intersection d'une sphère et d'un plan

1°) Étude des différents cas possibles

S : sphère de centre O et de rayon R
P : plan de l'espace
H : projeté orthogonal de O sur P
On pose $d = \mathrm{OH} = \mathrm{d}(\mathrm{O}, P)$.

1er cas : $\boxed{d < R}$

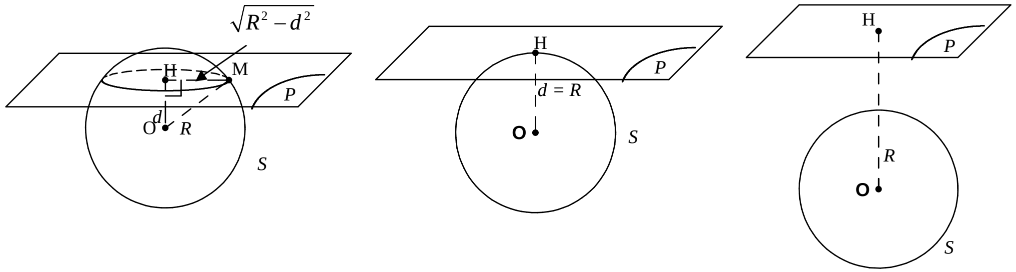
S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$
$S \cap P = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (théorème de Pythagore)

2e cas : $\boxed{d = R}$

S et P sont tangents en H ($S \cap P = \{\mathrm{H}\}$)

3e cas : $\boxed{d > R}$

S et P n'ont aucun point commun ($S \cap P = \varnothing$)



2°) Définition [plan tangent à une sphère]

Soit S une sphère de centre O.
Soit A un point de S.

On appelle plan tangent en A à S le plan passant par A et orthogonal à la droite (OA).

La définition est similaire à celle de la tangente en un point à un cercle dans le plan.