TS spé — Fiche sur suites de matrices

I.

Soit A un matrice carrée d'ordre *m* (c'est-à-dire à *m* lignes et *m* colonnes).

On considère la suite $\left(X_n\right)$ de matrices colonnes à *m* lignes définie sur $\mathbb{N}$ par :

- son premier terme X_0 qui est une matrice colonne à *m* lignes ;
- la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0}$ (expression du terme général).

Il est important de connaître la relation suivante :
$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad X_n = A^{n-m} X_m}$.

Lorsque l'on prend $m = 1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = A^{n-1} X_1}$.

Remarques :

- Grâce à la calculatrice, on peut calculer les premiers termes de la suite (commande « rép » ou programme).

- Lorsque l'on connaît les coefficients de A^n en fonction de *n*, on en déduit l'expression de X_n.

- Dans certains problèmes on étudiera la limite de la suite $\left(X_n\right)$.

II.

Soit A un matrice carrée d'ordre *m* (c'est-à-dire à *m* lignes et *m* colonnes) et B un matrice colonne à *m* lignes.

On considère la suite $\left(X_n\right)$ de matrices colonnes à *m* lignes définie sur $\mathbb{N}$ par :

- son premier terme X_0 qui est une matrice colonne à *m* lignes ;
- la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n + B$.

On suppose qu'il existe une matrice colonne S à *m* lignes telle que $S = AS + B$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $U_n = X_n - S$.

On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n\left(X_0 - S\right) + S}$.

III. Adaptation du cas du I à des matrices lignes

Soit A un matrice carrée d'ordre *m* (c'est-à-dire à *m* lignes et *m* colonnes).

On considère la suite $\left(X_n\right)$ de matrices lignes à *m* colonnes définie sur $\mathbb{N}$ par :

- son premier terme X_0 qui est une matrice ligne à *m* colonnes ;
- la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = X_n A$.

On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = X_0 A^n}$ (expression du terme général).

Il est important de connaître la relation suivante :
$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad X_n = X_m A^{n-m}}$.

Lorsque l'on prend $m = 1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = X_1 A^{n-1}}$.