TS   Limites et comparaisons

Les théorèmes donnés dans ce chapitre sont analogues à ceux concernant les limites de suites.

I. Le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est + ∞.
***f*, *g*, *h* sont trois fonctions définies sur I telles que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.**
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Ce théorème est admis sans démonstration.

Ce théorème reste vrai si x tend vers – ∞ ou x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Attention : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

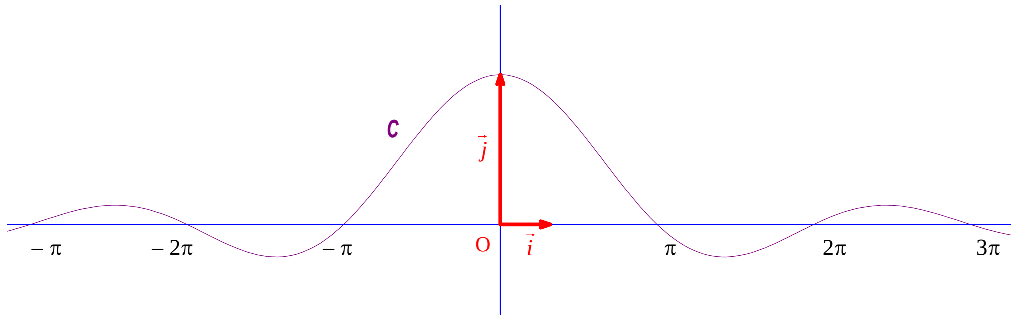
$: x \; (x > 0)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Il est intéressant de regarder la courbe de la fonction f : on observe bien qu'elle admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞ (et en – ∞).

On peut d'ailleurs noter qu'elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.



La limite que nous venons d'obtenir $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (limite en + ∞) ne doit pas être confondue avec la limite de référence étudiée dans le chapitre sur l'étude des fonctions cosinus et sinus : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (limite en 0).
Cette dernière limite se « voit » également graphiquement sur la courbe de la fonction f (observation au voisinage du point $\mathrm{A}(0\,;1)$: la fonction f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ n'est cependant pas une limite de référence et doit être démontrée à chaque fois.

II. Extension du théorème des gendarmes (un seul gendarme)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est + ∞.
***f* et *g* sont deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant g(x)$.**

- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.**
- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.**

Ce théorème est admis sans démonstration.

Ce théorème reste vrai si x tend vers – ∞ ou x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x + \sin x$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

• Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \geqslant -1$
donc
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \geqslant x - 1$ (minoration de la fonction)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$
Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \leqslant 1$
donc
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \leqslant x + 1$ (majoration de la fonction)

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$
Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

III. Point–méthode : utilisation des théorèmes de comparaison

1°) Quel théorème utiliser

• 2 limites finies égales : on utilise le théorème des gendarmes (**I**).

• 1 limite infinie : on utilise l'extension du théorème des gendarmes (**II**).

2°) Attention sur les inégalités

Quand on multiplie par un réel négatif, on change de sens.

3°) Penser au théorème des gendarmes ou à son extension quand on a des fonctions cosinus ou sinus.