

Les théorèmes donnés dans ce chapitre sont analogues à ceux concernant les limites de suites.

I. Le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est $+\infty$.

f, g, h sont trois fonctions définies sur I telles que $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \ (l \in \mathbb{R})$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

Ce théorème est admis sans démonstration.

Ce théorème reste vrai si x tend vers $-\infty$ ou x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$$f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

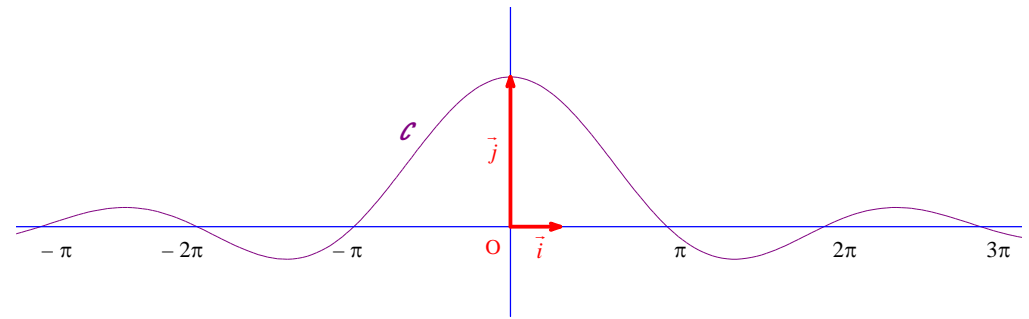
Attention : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \end{aligned}} \right\} : x (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Il est intéressant de regarder la courbe de la fonction f : on observe bien qu'elle admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ (et en $-\infty$).

On peut d'ailleurs noter qu'elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.



La limite que nous venons d'obtenir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (limite en $+\infty$) ne doit pas être confondue avec la limite de

référence étudiée dans le chapitre sur l'étude des fonctions cosinus et sinus : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (limite en 0).

Cette dernière limite se « voit » également graphiquement sur la courbe de la fonction f (observation au voisinage du point $A(0;1)$) : la fonction f peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction continue sur \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ n'est cependant pas une limite de référence et doit être démontrée à chaque fois.

II. Extension du théorème des gendarmes (un seul gendarme)

1°) Énoncé

I est un intervalle dont la borne de droite est $+\infty$.

f et g sont deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Ce théorème est admis sans démonstration.

Ce théorème reste vrai si x tend vers $-\infty$ ou x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

2°) Exemple

$$f: x \mapsto x + \sin x$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \geq -1$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \geq x - 1 \quad (\text{minoration de la fonction})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x \leq 1$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \sin x \leq x + 1 \quad (\text{majoration de la fonction})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$$

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

III. Point-méthode : utilisation des théorèmes de comparaison

1°) Quel théorème utiliser

- 2 limites finies égales : on utilise le théorème des gendarmes **(I)**.
- 1 limite infinie : on utilise l'extension du théorème des gendarmes **(II)**.

2°) Attention sur les inégalités

Quand on multiplie par un réel négatif, on change de sens.

3°) Penser au théorème des gendarmes ou à son extension quand on a des fonctions cosinus ou sinus.