$1^{\text{ère}}$ S

Formules d'addition et de duplication pour le cosinus et le sinus

Plan du chapitre :

Toutes les démonstrations du chapitre ainsi que les exemples doivent être sues par cœur.

Connaissances et savoir-faire à connaître :

- formules du cours à savoir utiliser dans les deux sens (développer et réduire)

- utilisation de changements de variables

- utilisation pour déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{8}$

- réduction et simplification d'expressions trigonométriques (écrire une expression à l'aide d'un seul cosinus ou d'un seul sinus)

I. Compléments sur le produit scalaire

1°) Rappel

Une unité de longueur est fixée dans les différents paragraphes concernant les démonstrations du chapitre.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques du plan.

On pose $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \alpha$ $\;(\alpha \in [0\,;\pi])$.

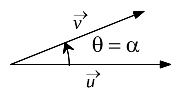
$$\boxed{\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha.}$$

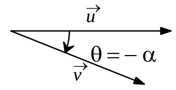
Rappel : $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on ne parle pas d'angle vectoriel).

2°) Démonstration

Le plan est orienté.

On note θ la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.





On sait que $\begin{cases} \theta = \alpha \\ \text{ou} \\ \theta = -\alpha \end{cases}$.

Dans les deux cas, on a : $\cos\theta = \cos\alpha$ (car $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$).

3°) Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan orienté.

θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

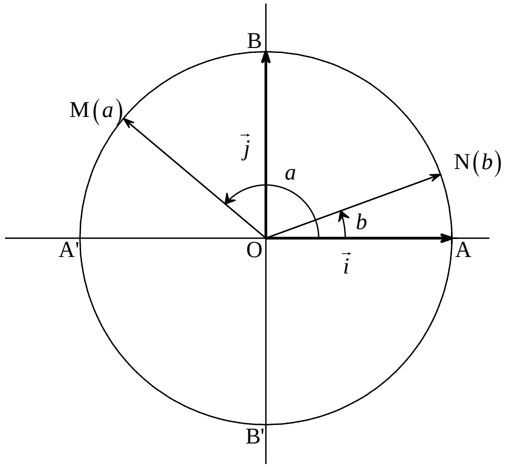
II. Formules d'addition

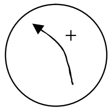
1°) Cosinus de la différence de deux réels

Hypothèses :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a et b sont deux réels quelconques.
M est l'image de a sur le cercle trigonométrique.
N est l'image de b sur le cercle trigonométrique.





But : Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

1ère manière :

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \underbrace{\mathrm{ON}}_{1} \times \underbrace{\mathrm{OM}}_{1} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{ON}} ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{ON}} ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{ON}} ; \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$$= -b + a$$

$$= a - b$$

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \cos(a-b)$.

2e manière :

On utilise le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$$\mathrm{M} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{M}} = \cos a \\ y_{\mathrm{M}} = \sin a \end{array} \right. \qquad \mathrm{N} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{N}} = \cos b \\ y_{\mathrm{N}} = \sin b \end{array} \right.$$

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$ (expression analytique du produit scalaire).

Conclusion :

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b}$$

2°) Cosinus de la somme de deux réels

$\cos(a+b) = \cos\left[a - (-b)\right]$

Astuce de départ

1°)

$= \cos a \times \cos(-b) + \sin a \times \sin(-b)$

formules de trigonométrie

$= \cos a \times \cos b + \sin a \times (-\sin b)$

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

3°) Sinus de la somme de deux réels quelconques

$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right]$

astuce de départ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

1°)

$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\sin a} \times \cos b + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\cos a} \times \sin b$

$= \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$

4°) Sinus de la différence de deux réels

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin\left[a + (-b)\right] \\ &= \sin a \times \cos(-b) + \sin(-b) \times \cos a \\ &= \sin a \times \cos b + (-\sin b) \times \cos a \\ &= \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a \end{aligned}$$

5°) Récapitulatif

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

Il faut se garder d'écrire des égalités telles que $\cos(a+b)=\cos a+\cos b$, $\sin(a+b)=\sin a+\sin b$ … bref, toutes sortes d'égalités qui paraissent naturelles et donc tentantes mais qui sont toutes fausses. On parle de « propriétés-en-actes ».

6°) Exercice

Vérifier que : $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ (valeur exacte)

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ (valeur exacte)

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{array}}$$

Il faut retenir par cœur la méthode utilisée pour calculer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$.

Autre méthode possible : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ (autre décomposition)

Exercice personnel :

À l'aide des résultats précédents, calculer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

On trouve $\boxed{\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$.

Remarque :

La calculatrice TI-83 Premium CE donne directement les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$.

7°) Test

Il est intéressant de voir ce que donne les formules pour des valeurs particulières de a et b.

Dans ce paragraphe, on va tester les formules lorsque l'un des deux réels vaut 0.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos(x+0)&=\cos x\times\cos 0-\sin x\times\sin 0\\ &=\cos x\times 1-\sin x\times 0\\ &=\cos x\end{aligned}$$

On obtient une égalité qui est bien vraie…

III. Formules de duplication

1°) Rappel

Relation fondamentale

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1}$$

N.B. : $\cos^2 x=(\cos x)^2$

Penser à l'utiliser en exercice souvent sous la forme :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

ou

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

2°) Cosinus du double d'un réel

$a \in \mathbb{R}$

Astuce de départ :

$\cos 2a = \cos(a + a)$

1ère expression : formule d'addition

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos a \times \cos a - \sin a \times \sin a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\end{aligned}$$

2e expression :

On utilise l'égalité $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

3e expression :

On utilise l'égalité $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$.

$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

Remarque :
Les formules obtenues montrent bien que $\cos 2a$ n'est pas égal à $2\cos a$.
D'ailleurs, un simple test pour une valeur particulière de a (comme 0) aurait montré qu'il n'y a pas égalité entre les deux expressions.

La formule 2 permet de calculer le cosinus du double d'un réel dont on connaît le cosinus.
La formule 3 permet de calculer le cosinus du double d'un réel dont on connaît le sinus.

3°) Sinus du double d'un réel

$\sin 2a = \sin(a + a)$

$\sin 2a = \sin a \times \cos a + \sin a \times \cos a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

On a $\sin 2a = 2 \times \sin a \times \cos a$.
$2 \times \sin a \times \cos a$ désigne le produit de 2 par $\sin a$ par $\cos a$.
Dans un produit, les facteurs peuvent être écrits dans n'importe quel ordre donc on peut tout aussi bien écrire $\sin 2a = 2\cos a \sin a$.

4°) Récapitulatif

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 a\\ \sin 2a &= 2\sin a \cos a\end{aligned}}$$

Il faut se garder d'écrire des égalités telles que $\cos 2a = 2\cos a$ et $\sin 2a = 2\sin a$ qui consisteraient à « sortir » le 2 du cosinus ou du sinus.
Ces deux égalités qui paraissent naturelles et donc tentantes sont fausses. On parle de « propriétés-en-actes ».

Il faut également avoir une « vision correcte » de l'égalité $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
Le 2 placé devant le $\cos^2 x$ n'est pas le 2 du cosinus $2x$ que l'on aurait sorti !

Il est intéressant de tester les formules.
Par exemple, nous allons tester la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ pour différentes valeurs de x, par exemple $x = \pi$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ … La liste n'est pas exhaustive… On peut prendre n'importe quelle valeur remarquable pour le cosinus.

Par exemple, pour $x = \pi$, la formule s'écrit :
$\cos 2\pi = 2\cos^2 \pi - 1$
$\cos 2\pi = 1$

Par exemple, pour $x = \frac{\pi}{2}$, la formule s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1\\ &= -1\end{aligned}$$

On sait bien que $\cos \pi = -1$.

La formule fonctionne…

L'intérêt de ces calculs est nul du point de vue pratique mais est intéressant du point de vue théorique.

5°) Exemples d'utilisation (manipulations de formules)

- **$\cos x = \frac{1}{3}$**

Calculer cos 2*x*.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

- **$\sin x = -\frac{1}{5}$.**

Calculer cos 2*x*.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\times\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

- **$x \in \mathbb{R}$**

Calculer cos 4*x* en fonction de cos 2*x*.

$$\cos 4x = \cos\left(2\times\underbrace{2x}_{a}\right)$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 2\cos^2(2x) - 1$$

- **$x \in \mathbb{R}$**

Calculer cos *x* en fonction de $\cos\frac{x}{2}$.

$$\cos x = \cos\left(2\times\underbrace{\frac{x}{2}}_{a}\right)$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

- **$x \in \mathbb{R}$**

Calculer $\cos(-2x)$ en fonction de cos *x*.

$$\cos(-2x) = \cos 2x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

- **$x \in \mathbb{R}$**

Exprimer $(\cos x + \sin x)^2$ et $\sin x \cos x$ en fonction d'un seul cosinus ou d'un seul sinus.

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

6°) Application aux lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

Pour le cosinus et le sinus, on va utiliser les formules de duplication du cosinus de manière astucieuse en observant que $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$.

- **Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$.**

Astuce de départ : $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$$

Formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

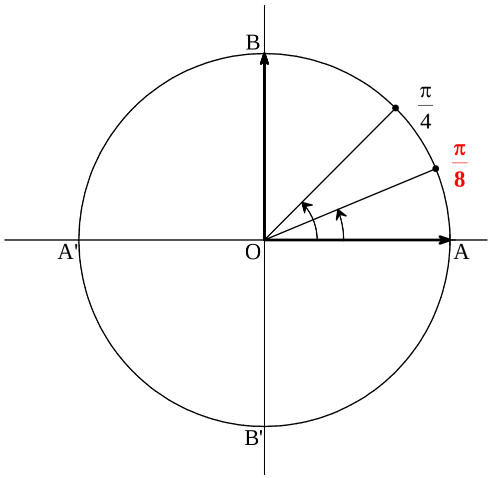
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\times\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

On a donc $2\times\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Il faut déterminer le signe de $\cos\frac{\pi}{8}$.

Or $\frac{\pi}{8} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$.



D'où $\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ (valeur exacte).

On ne peut pas aller plus loin, il n'y a pas de simplification possible.

Variante :

On applique directement la formule de linéarisation (voir plus loin) $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ que l'on peut aussi écrire sous la forme $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ en prenant $x=\frac{\pi}{8}$.

On obtient ainsi $2\times\cos^2\frac{\pi}{8}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
On finit comme précédemment.

• **Calcul de $\sin\frac{\pi}{8}$.**

$\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$

Formule $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\times\sin^2\frac{\pi}{8}$

$2\times\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Donc $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

D'où : $\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ (valeur exacte).

Exercice personnel :

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$.

On trouve : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

Remarque :

La calculatrice TI-83 Premium CE ne donne pas les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$.

Cette méthode permet de retrouver de calculer les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$, en écrivant que $2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$. On obtient des expressions sous la forme de « racines de racines » dont on peut démontrer qu'elles coïncident avec celles obtenues par les formules d'addition.

IV. Formules de linéarisation

1°) Carré d'un cosinus

$a\in\mathbb{R}$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$
$\cos 2a+1=2\cos^2 a$

$\boxed{\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}}$

2°) Carré d'un sinus

$a\in\mathbb{R}$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$
$\cos 2a-1=-2\sin^2 a$
$1-\cos 2a=2\sin^2 a$ $\times(-1)$

$\boxed{\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}}$

3°) Formulaire récapitulatif

$$\boxed{\begin{gathered}\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\\ \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}\end{gathered}}$$

Il est intéressant de retenir les formules $1-\cos 2a=2\sin^2 a$ et $\cos 2a+1=2\cos^2 a$.

Les formules peuvent s'appliquer en remplaçant a par des expressions. Par exemple, on peut linéariser $\cos^2 3x$ en écrivant $\cos^2 3x=\frac{1+\cos 6x}{2}$.

4°) Formule complémentaire

Il est intéressant de retenir la formule suivante qui découle de la formule de duplication pour le sinus.

$$\boxed{\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}}$$

V. Retour sur des formules de trigonométrie déjà étudiées

Les formules d'addition du cosinus et du sinus permettent de retrouver des formules de trigonométrie.

La méthode employée ici est maladroite et n'est pas à reproduire. Le paragraphe présenté ici n'a pour seul but que de montrer la cohérence avec ce qui a été appris dans des chapitres antérieurs.

Relation fondamentale :

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= \cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x \\ &= \cos(x - x) \\ &= \cos 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Angles associés :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= \cos \pi \times \cos x + \sin \pi \times \sin x \\ &= (-1) \times \cos x + 0 \times \sin x \\ &= -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= \cos \pi \times \cos x - \sin \pi \times \sin x \\ &= (-1) \times \cos x - 0 \times \sin x \\ &= -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \times \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \times \sin x \\ &= 0 \times \cos x + 1 \times \sin x \\ &= \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \times \cos x - \sin\frac{\pi}{2} \times \sin x \\ &= 0 \times \cos x - 1 \times \sin x \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

Formulaire récapitulatif

Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

Formule fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$