TS

Lois normales

Introduction :

Rappels sur les chapitres précédents :

On a défini la notion de loi de probabilité continue définie par une densité de probabilité puis on a vu deux cas particuliers très importants de lois à densité : loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$ et la loi exponentielle.

Objectif de ce chapitre :

Dans ce chapitre, on va définir des lois de probabilité très importantes sur $\mathbb{R}$: les lois normales.

C'est le dernier type de loi à densité que nous étudierons cette année (d'autres lois, présentes sur la calculatrice, seront étudiées dans l'enseignement supérieur).

Ce chapitre est l'aboutissement des chapitres précédents et va permettre une application aux intervalles de fluctuation et de confiance.

Partie A : Loi normale centrée réduite

I. Fonction de densité

1°) Définition

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

2°) Propriété

f vérifie les 3 conditions :

C_1 : f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

C_2 : f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

C_3 : On admettra sans démonstration que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to -\infty} \int_y^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

(ces deux intégrales ne peuvent se calculer car on ne peut pas donner une primitive de f sous forme explicite).

C_3 peut aussi s'écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On dit que f est une **fonction de densité** sur $\mathbb{R}$.

3°) Étude de la fonction *f*

Dans la deuxième partie du cours sur l'exponentielle, on avait étudié les fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$ (avec k une constante réelle strictement positive). On avait notamment observé les courbes, la décroissance très rapide de ces fonctions.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

• **Parité**

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$= f(x)$$

Donc f est paire.

Par conséquent, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie (car le repère est orthogonal).

• **Dérivée**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les propriétés algébriques et de composition.

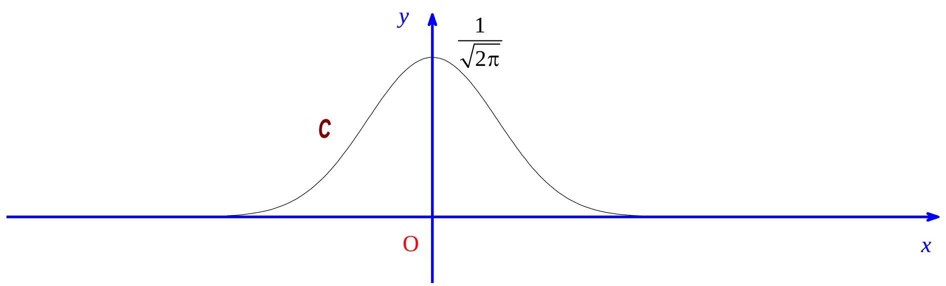
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-x) \times e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$		$+$	0	$-$	
Signe de $e^{-\frac{x^2}{2}}$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Ces limites sont obtenues par limites de composées.
Ces deux limites nous permettent de dire que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

4°) Représentation graphique



Cette courbe est appelée **courbe de Gauss** (ou « courbe en cloche »).

On peut interpréter l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$ en disant que l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et l'axe (Ox) est égale à 1 u. a. (pour cela il faut accepter l'idée d'aire finie d'un domaine infini, qui est en fait une limite d'aire).

On doit accepter l'idée d'aire finie d'un domaine infini (qui est en fait une limite d'aire comme nous l'avons vu dans le chapitre sur la loi exponentielle).

II. Loi normale N(0 ; 1)

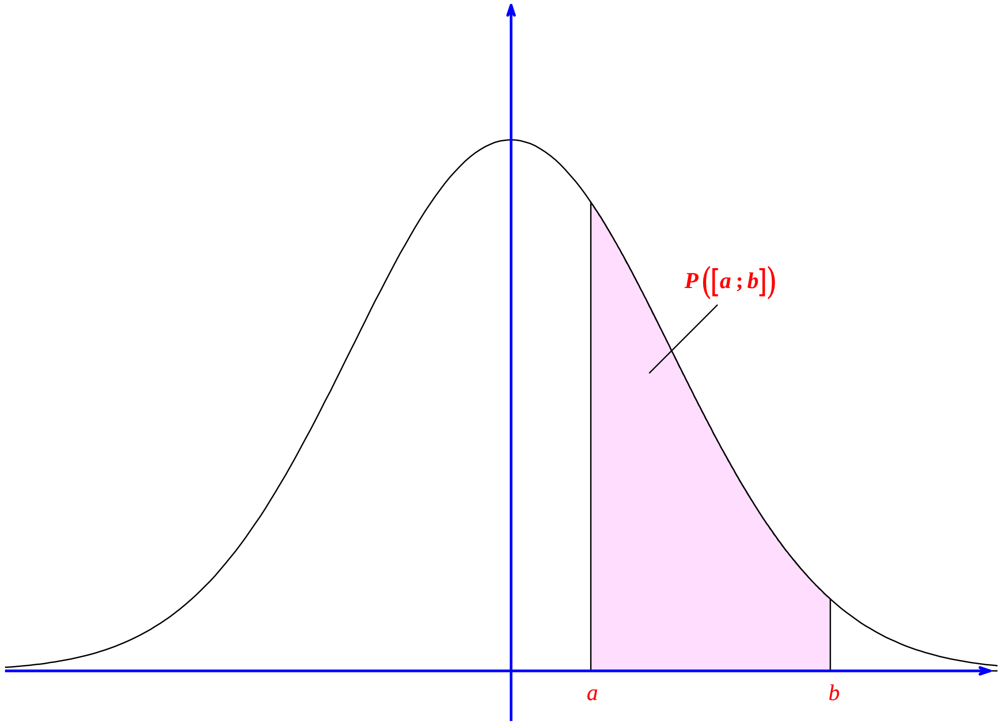
1°) Définition

On appelle **loi normale centrée réduite** ou **loi normale N(0 ; 1)** (ou loi gaussienne) la loi de probabilité P sur $\mathbb{R}$ admettant la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour densité de probabilité.

2°) Probabilité d'un intervalle fermé borné (expression intégrale d'une probabilité)

Pour tout intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$, on a : $P([a\,;b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Cette intégrale ne peut pas être calculée de manière exacte (voir utilisation de la calculatrice ou de logiciel).



3°) Une valeur remarquable à connaître

À cause de la symétrie de la courbe, l'aire sous la courbe sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ est égale à l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$; elles sont donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$ u. a..

On peut donc écrire :

$$\boxed{P([0\,;+\infty[)=P(]-\infty\,;0])=\frac{1}{2}}$$

4°) Variable aléatoire

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale pour exprimer qu'elle admet la fonction *f* pour densité de probabilité.

Pour tout couple $(a\,;b)$ de réels tels que $a\leqslant b$, on a donc : $P(a\leqslant \mathrm{X}\leqslant b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

5°) Utilisation de la calculatrice

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Tous les calculs seront effectués à la calculatrice ; on obtiendra donc des valeurs approchées.
Plutôt que d'utiliser les fonctionnalités permettant de déterminer une valeur approchée d'intégrale, ce qui obligerait à taper l'expression de la fonction de densité, on utilise les fonctionnalités de calculs de probabilités incorporées dans la calculatrice.

Pour les calculs, on utilise la commande normalFRép (qui s'obtient grâce [2nde] [var] (distrib)).
En dépit de son nom, cette commande ne correspond pas exactement à la fonction de répartition de la loi normale.

• **Calculer $P(-1\leqslant \mathrm{X}\leqslant 1)$.**

TI	Casio
[2nde] [var] 2 (normalFRép(si la calculatrice est en français ou normalcdf(si la calculatrice est en anglais) (–) 1 [,] 1 [,] 0 [,] 1 Les deux derniers nombres correspondent respectivement à l'espérance 0 et à l'écart-type 1 de la loi normale **N** (0 ; 1). On obtient l'affichage : 0,6826894809.	[MENU] 2 (STAT) [F5] (DIST) [F1] (NORM) [F2] Ncd Renseigner ainsi : Normal C, D Lower : – 1 Upper : 1 σ : 1 μ : 0 Save Res : None Execute [F1] Calc On obtient l'affichage : Normal C,D : P : = 0,68268949

On écrira : $P(-1\leqslant \mathrm{X}\leqslant 1)\approx 0{,}683$ (valeur arrondie au millième).

Il est possible de faire apparaître la probabilité sur une graphique.

TI	Casio
[2nde] [var] (distrib) Sélectionner DESSIN ou DRAW. Utiliser la fonction OMBRENORM ou ShadeNorm. Taper la valeur de *a* puis la valeur de *b*. Le domaine apparaît en couleur ainsi que son aire ce qui donne la probabilité cherchée.	Sélectionner DRAW et (F6) au niveau de Execute.

• **Calculer $P(\mathrm{X} \leqslant 1)$.**

1ère méthode :

$$P(\mathrm{X} \leqslant 1) = P(\mathrm{X} \leqslant 0) + P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1)$$

$$= 0{,}5 + P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1)$$

On utilise la calculatrice pour calculer $P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1)$.

On obtient l'affichage : 0,8413447399.

On a donc $P(\mathrm{X} \leqslant 1) = 0{,}841344739...$.

2e méthode :

On utilise l'approximation qui consiste à remplacer $P(\mathrm{X} \leqslant 1)$ par $P(-10^{99} \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1)$ pour laquelle l'erreur commise est négligeable.

En fait, on peut mettre – 1000 à la place de -10^{99} (si l'on ne veut pas taper l'exposant), vu que la courbe de Gauss « descend » très vite.

Le calcul de $P(-10^{99} \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1)$ est immédiat par la calculatrice (ça ne prend aucun temps).

On obtient l'affichage : 0,8413447404.

Il y a donc une différence de 0,0000000005 entre les affichages des deux résultats.

L'astuce permet de donner la valeur arrondie au millième de la probabilité cherchée sans aucun problème.

Donc $P(\mathrm{X} \leqslant 1) \approx 0{,}841$ (valeur arrondie au millième).

• **Calculer $P(\mathrm{X} \geqslant 0{,}5)$.**

1ère méthode :

$$P(\mathrm{X} \geqslant 0{,}5) = P(\mathrm{X} \geqslant 0) - P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0{,}5)$$

$$= 0{,}5 - P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0{,}5)$$

On utilise la calculatrice pour calculer $P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0{,}5)$.

2e méthode :

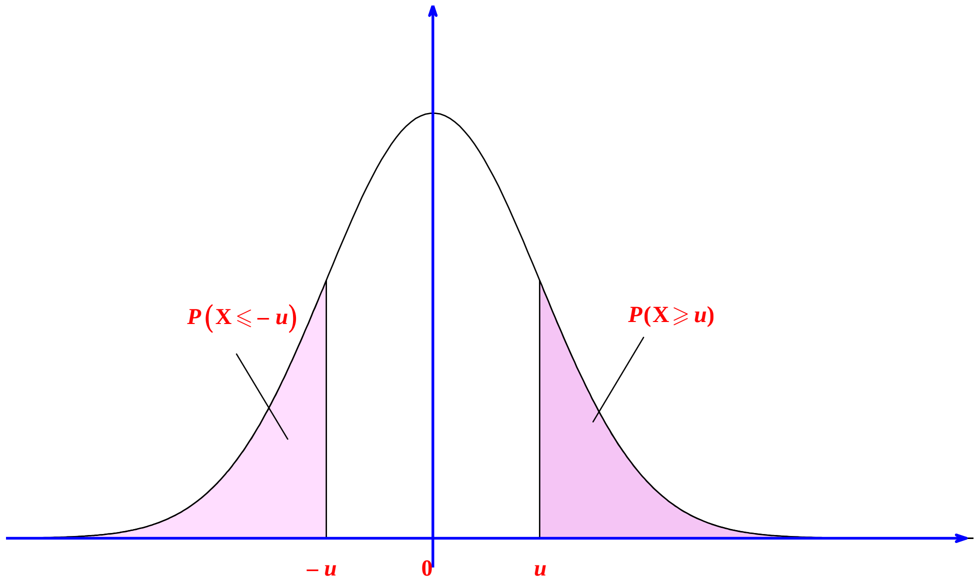
On utilise l'approximation qui consiste à remplacer $P(\mathrm{X} \geqslant 0{,}5)$ par $P(0{,}5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10^{99})$ pour laquelle l'erreur commise est négligeable.

On obtient l'affichage : 0,3085375322.

Donc $P(\mathrm{X} \geqslant 0{,}5) \approx 0{,}309$ (valeur arrondie au millième).
On peut aussi utiliser des logiciels de calcul.
Autrefois, on utilisait des tables numériques.

6°) Propriété liée à la symétrie

Pour tout réel u, $P(\mathrm{X} \leqslant -u) = P(\mathrm{X} \geqslant u) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant u)$.



Cette propriété se justifie par la symétrie de la courbe.

III. Fonction de répartition

1°) Définition

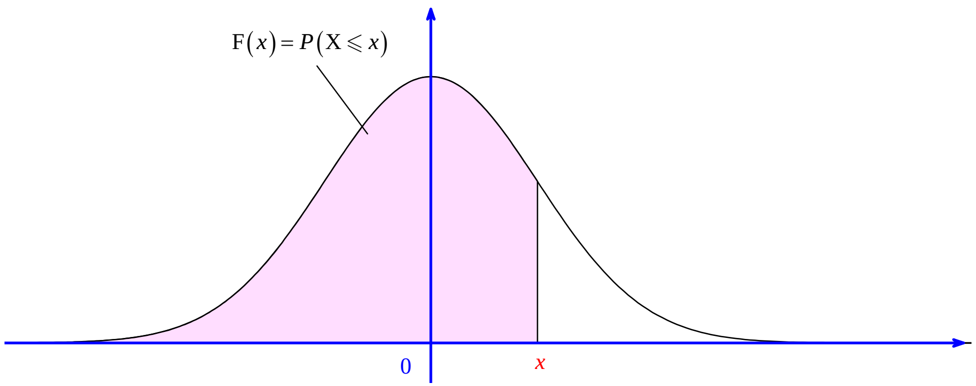
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale **N**(0 ; 1).

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F qui à tout réel x associe $\mathrm{F}(x)=P(\mathrm{X}\leqslant x)$.

En notant f la fonction de densité associée à X, on a donc $\mathrm{F}(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (ce que l'on peut écrire :
$\mathrm{F}(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$).

2°) Interprétation géométrique

$\mathrm{F}(x)$ est l'aire du domaine sous la courbe de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,x]$ (aire du domaine compris entre la courbe de g et l'axe des abscisses sur cet intervalle).



3°) Propriétés de la fonction de répartition

- F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{F}(x)=0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de F	0	1

Nous admettrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.
La dérivée de la fonction de répartition donne la densité.

4°) « Inversion » de la fonction de répartition

• Propriété

Pour tout réel $\alpha\in\,]0\,;1[$, il existe un unique réel u tel que $P(\mathrm{X}\leqslant u)=\alpha$.

• Démonstration

Cette propriété résulte du TVI appliqué à la fonction F dans sa forme générale : pour tout $\alpha\in\,]0\,;1[$, il existe un unique réel u tel que $\mathrm{F}(u)=\alpha$ c'est-à-dire $P(\mathrm{X}\leqslant u)=\alpha$.
La valeur de u dépend de α.

• Remarques

- Le terme « inversion » fait référence au caractère bijectif de la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;1[$ c'est-à-dire existence et unicité d'un antécédent de α par F. Ainsi, $\alpha=\mathrm{F}^{-1}(u)$.

- Il n'existe pas de formule donnant u en fonction de α.

Le mardi 9 mai 2017

À propos de l'exercice $P(\mathrm{T}\leqslant u)$ que j'ai corrigé ce jour avec les terminales.
Pour $P(\mathrm{X}\leqslant u)=\alpha$, il n'y a aucun moyen de calculer u en fonction de α (pas de formule).
La seule valeur de α pour laquelle on peut donner la valeur de u (sans calcul) est $\alpha=0{,}5$ pour laquelle $u=0$ ou μ.
C'est le seul cas où l'on pourra écrire un signe d'égalité.

En pratique, on utilise la calculatrice.

Signe de u :

- Lorsque $0<\alpha<0{,}5$, $u<0$ et lorsque $0{,}5<\alpha<1$, $u>0$.

- Lorsque $\alpha=0{,}5$, $u=0$.

• Exemple

Chercher le réel u tel que $P(X \leqslant u) = 0,975$.

TI	Casio
$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ 3 (FracNormale( ) 0.975 $\boxed{,}$ 0 $\boxed{,}$ 1 On obtient l'affichage : 1,959963986. On n'est pas obligé de fermer la parenthèse. On n'est pas non plus obligé de mettre 0, 1.	$\boxed{\text{MENU}}$ 2 (STAT) $\boxed{\text{F5}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM) $\boxed{\text{F3}}$ (InvN) Renseigner ainsi : Inverse Normal Area : 0,975 σ : 1 μ : 0 Save Res : None Execute On obtient l'affichage : Inverse Normal : x = 1, 95996398.

IV. Intervalles centrés en 0

1°) Probabilité d'un intervalle centré en 0 (ou symétrique par rapport à 0)

• Propriété

Pour tout réel $u > 0$, on a : $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2P(X \leqslant u) - 1$.

• Démonstration

$$P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\big(P(X \leqslant u) - P(X \leqslant 0)\big) = 2\big(P(X \leqslant u) - 0,5\big) = 2P(X \leqslant u) - 1$$

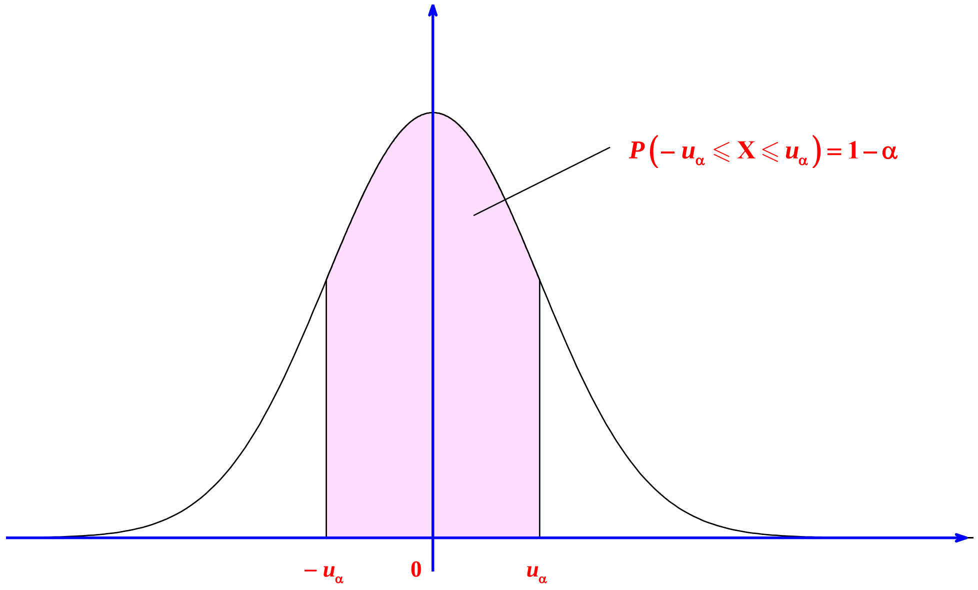
symétrie de la courbe

Il est important de savoir retrouver les relations de la propriété graphiquement.

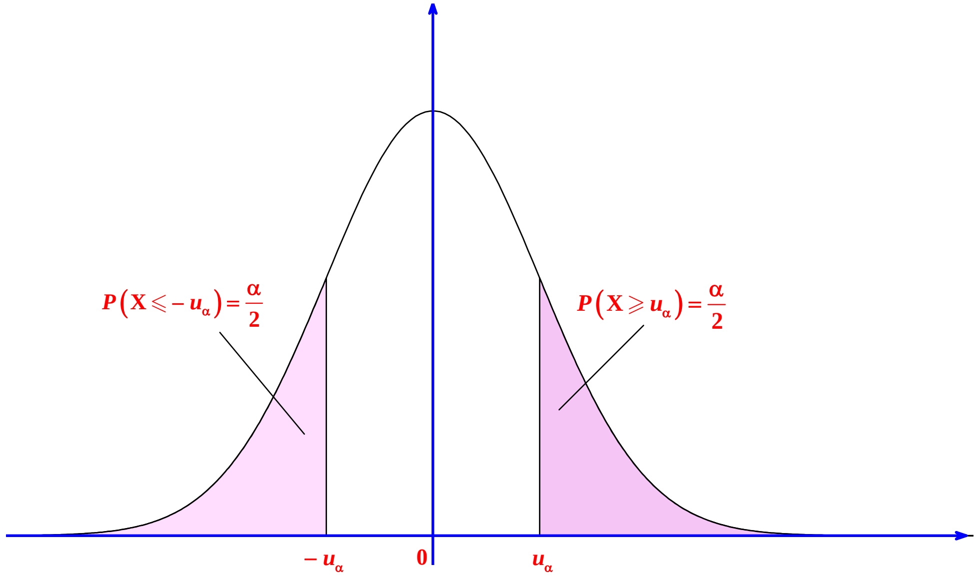
2°) Propriété d'encadrement (valeur seuil)

• Énoncé

Pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$, il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



On en déduit que $P(X \leqslant -u_\alpha) = P(X \geqslant u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$.



• Démonstration

$$P(-u \leqslant X \leqslant u) = 1-\alpha \iff 2P(X \leqslant u) - 1 = 1-\alpha$$
$$\iff 2P(X \leqslant u) = 2-\alpha$$
$$\iff P(X \leqslant u) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha \in]0\,;1[$ donc $\frac{\alpha}{2} \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

Par suite, $1-\frac{\alpha}{2} \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

Par la propriété d'inversion de F, on sait qu'il existe un unique réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(X \leqslant u_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

3°) Valeurs à connaître

Il n'existe pas d'expression explicite de u_α en fonction de α.

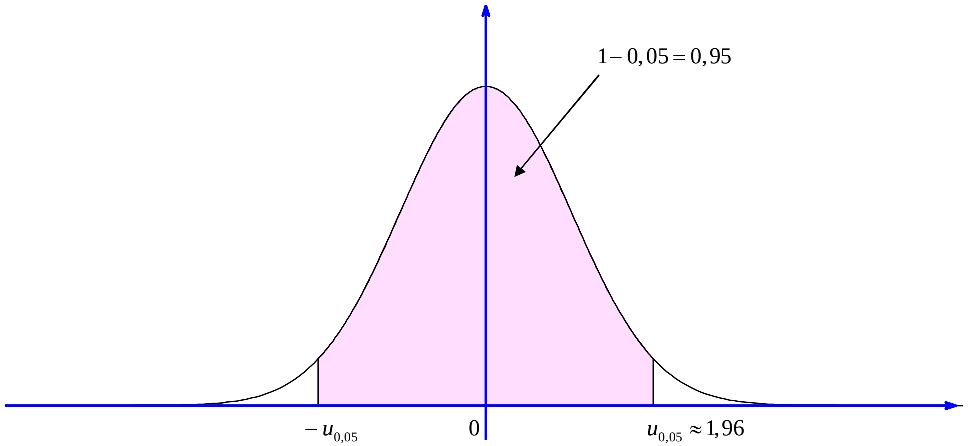
• On doit connaître les valeurs approchées suivantes :

$\boldsymbol{u_{0,05} \approx 1,96}$ et $\boldsymbol{u_{0,01} \approx 2,58}$.

On a donc $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$ et $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$.

• Pour obtenir ces valeurs, on utilise la calculatrice à partir de l'égalité $\boldsymbol{P(X \leqslant u_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}}$.

Par exemple, pour $\alpha = 0,05$, on a $P(-u_{0,05} \leqslant X \leqslant u_{0,05}) = 0,95)$ soit $P(X = u_{0,05}) = 0,975$.



On utilise la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour trouver une valeur approchée de $u_{0,05}$ (et même plutôt l'« inverse » de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

TI	Casio
[2nde] [var] 3 (FracNormale(ou invNorm( ) 0.975 [,] [0] [,] [1] On obtient l'affichage : 1,959963986.	[MENU] 2 (STAT) [F5] (DIST) [F1] (NORM) [F3] (InvN) Renseigner ainsi : Inverse Normal Area : 0.975 σ : 1 μ : 0 Save Res : None Execute On obtient l'affichage : Inverse Normal : x = 1.95996398.

V. Espérance et variance

1°) Définition

• L'espérance (ou la moyenne) d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite est donnée par la formule

$$E(X) = \lim_{A \to -\infty} \int_A^0 x \times f(x)\,dx + \lim_{B \to +\infty} \int_0^B x \times f(x)\,dx.$$

• La variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite est donnée par la formule

$$V(X) = \lim_{A \to -\infty} \int_A^0 (x - E(X))^2 \times f(x)\,dx + \lim_{B \to +\infty} \int_0^B (x - E(X))^2 \times f(x)\,dx.$$

Cette définition prolonge au cas d'une densité définie sur $\mathbb{R}$ la définition donnée pour une loi de probabilité sur un intervalle $[a\,;b]$.

2°) Propriété

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

$\boldsymbol{E(X) = 0}$

$\boldsymbol{V(X) = 1}$

On a immédiatement $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$.

Cette propriété l'appellation **N**(0 ; 1) parfois employée pour désigner la loi normale centrée réduite : les paramètres 0 et 1 font référence à l'espérance et à la variance.

3°) Démonstration

• Espérance

On considère deux réels *A* et *B*.

$$\int_0^B x\times f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^B x\times e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x\times e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-e^{-\frac{B^2}{2}}\right)$$

$$\int_A^0 x\times f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{A^2}{2}}-1\right)$$

Par passage à la limite, en faisant tendre B vers + ∞ et A vers – ∞, on obtient $E(X)=0$.

• Nous admettrons le résultat pour la variance.

Partie B : Loi normale dans le cas général

I. Généralités

1°) Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale N(μ ; σ^2) si la variable $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi N (0 ; 1).

2°) Densité

Nous admettrons sans démonstration que la loi normale **N**(μ ; σ^2) est associée à la densité

$g:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Ce résultat ne sera pas utilisé cette année.

Néanmoins, l'allure de la représentation graphique de la fonction de densité de la loi normale de paramètres μ et σ^2 est importante.

Propriété (admise sans démonstration) :

La représentation graphique admet la droite d'équation $x=\mu$ pour axe de symétrie.

Graphique

3°) Espérance et variance

Si X suit la loi normale **N**(μ ; σ^2), la variable aléatoire $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ est appelée **variable centrée réduite** associée à X.

L'espérance de X vaut μ ; sa variance vaut σ^2. Son écart-type est donc égal à σ.

La loi **N**(μ ; σ^2) est communément appelée **loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ**.

Attention, en pratique la loi **N**(3 ; 9) est la loi normale de moyenne 3 et de variance 9 donc d'écart-type 3.

4°) Utilisation de la calculatrice pour calculer des probabilités

On se place dans le cas d'une variable aléatoire X qui suit la loi **N**(μ ; σ^2) et l'on souhaite calculer $P(a\leqslant X\leqslant b)$.

On n'est pas obligé de passer par la variable centrée réduite associée pour calculer les probabilités.

TI	Casio
$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ 2 (normalFRép(si la calculatrice est en français ou normalcdf(si la calculatrice est en anglais) On tape la valeur de *a* $\boxed{,}$. On tape la valeur de *b* $\boxed{,}$. On tape la valeur de μ $\boxed{,}$. On tape la valeur de σ. Attention c'est bien σ que l'on doit taper en dernier et non σ^2.	$\boxed{\text{MENU}}$ 2 (STAT) $\boxed{\text{F5}}$ (DIST) $\boxed{\text{F1}}$ (NORM) $\boxed{\text{F2}}$ Ncd Renseigner ainsi : Normal C, D Lower : on tape la valeur de *a* Upper : on tape la valeur de *b* σ : on tape la valeur donnée par la loi μ : on tape la valeur donnée par la loi Save Res : None Execute $\boxed{\text{F1}}$ Calc

5°) Influence des paramètres μ et σ sur l'allure de la « cloche »

La courbe de la densité de la loi normale **N**(μ ; σ^2) admet la droite d'équation $x=\mu$ pour axe de symétrie si le repère est orthogonal.

En effet, $\forall t\in\mathbb{R}\quad g(\mu+t)=g(\mu-t)$.

Selon les valeurs de σ, le maximum est plus ou moins grand, la « cloche » est plus ou moins élargie.

Plus σ est petit, plus la cloche est « haute » (et resserrée autour de l'axe de symétrie).

6°) Utilisation des lois normales

On utilise les lois normales dans deux nombreux contextes issus de phénomènes naturels très fréquents (d'où la désignation de loi normale), qui résultent de l'addition de plusieurs causes indépendantes (par exemple, la taille d'un individu, le taux de cholestérol, des erreurs de mesures…).
On étudiera quelques exemples de modélisation par des lois normales en exercices.

Néji le 22-5-2013

L'énoncé précisera toujours qu'une variable aléatoire suit la loi normale (il donnera aussi les paramètres).

II. Fonction de répartition

1°) Définition

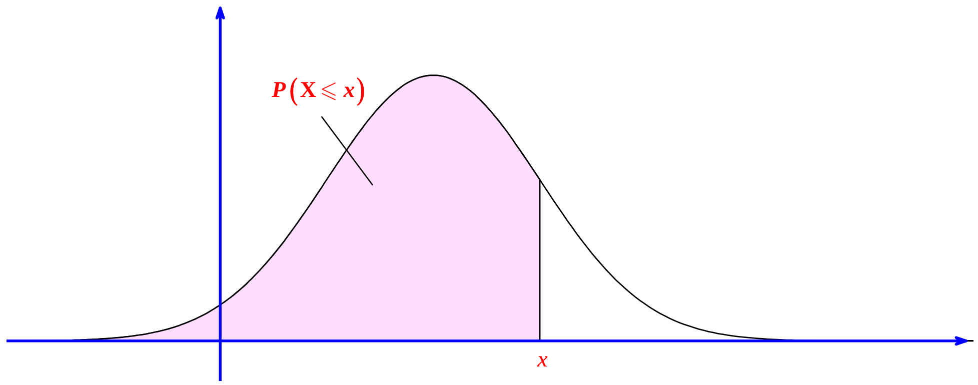
X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathbf{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F qui à tout réel x associe $F(x) = P(X \leqslant x)$.

En notant g la fonction de densité associée à X, on a donc $F(x) = \lim\limits_{y \to -\infty} \int_y^x g(t)\ \mathrm{d}t$ (ce que l'on peut écrire : $F(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\ \mathrm{d}t$).

2°) Interprétation géométrique

$F(x)$ est l'aire du domaine sous la courbe de g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ x]$ (aire du domaine limité par la courbe de g et l'axe des abscisses sur cet intervalle).



3°) Propriétés de la fonction de répartition

- F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Nous admettrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ \ F'(x) = g(x)$.

4°) Propriété d'« inversion » de la fonction de répartition

Pour tout $\alpha \in]0\ ;1[$, il existe un unique réel u tel que $P(X \leqslant u) = \alpha$.

Cette propriété résulte du TVI appliqué à la fonction F dans sa forme générale : pour tout $\alpha \in]0\ ;1[$, il existe un unique réel u tel que $F(u) = \alpha$.

Le terme « inversion » fait référence au caractère bijectif de la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $]0\ ;1[$ c'est-à-dire existence et unicité d'un antécédent de α par F.

Il n'existe pas de formule donnant u en fonction de α.

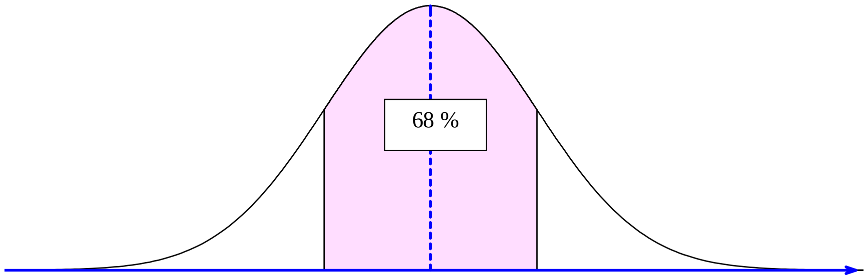
En pratique, on utilise la calculatrice en rentrant d'abord la valeur de α puis les paramètres de la loi normale (espérance et écart-type).

III. Plages de normalité

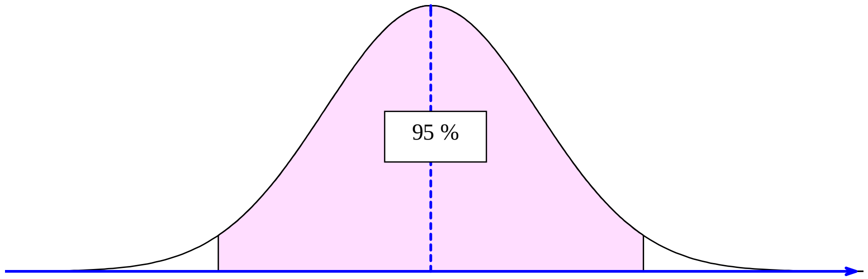
1°) Propriété

On a les résultats suivants, utilisés dans de nombreux contextes.

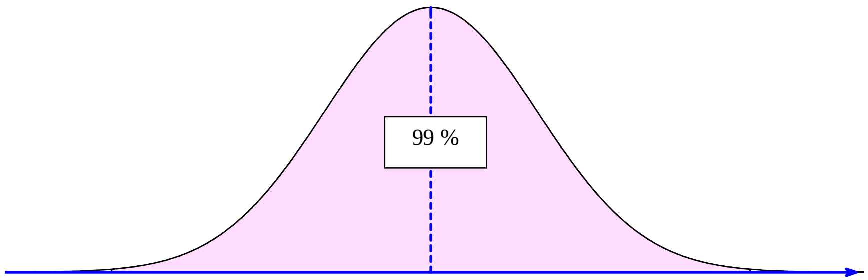
$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$ (à 10^{-2} près)



$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,95$ (à 10^{-2} près)



$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,99$ (à 10^{-2} près)



2°) Vocabulaire

Les intervalles $[\mu-\sigma\,;\mu+\sigma]$, $[\mu-2\sigma\,;\mu+2\sigma]$, $[\mu-3\sigma\,;\mu+3\sigma]$ sont appelés **plages de normalité** respectivement à 68 %, 95 % et 99 % (tous ces pourcentages ne sont qu'approchés).
On remarquera que tous ces intervalles ont pour centre μ.

3°) Démonstration

$$\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma \Leftrightarrow -\sigma \leqslant X-\mu \leqslant \sigma$$
$$\Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1$$

Comme X suit la loi normale **N**(μ ; σ^2), la variable $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi **N**(0 ; 1).

Avec la calculatrice on trouve $P\left(-1 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1\right) \approx 0,68$ donc $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$.

4°) Exemple

Si X suit la loi **N** (10 ; 9), on a $\mu = 10$ et $\sigma = 3$ donc les réalisations de X fluctuent à plus de 95 % dans l'intervalle $[10-2\times3\,;10+2\times3]$ soit $[4\,;16]$.

5°) Utilisation

Cette propriété met en lumière le rôle des deux paramètres de la loi normale : l'espérance et l'écart-type.
L'espérance est un indicateur de position : les valeurs prises par la variable aléatoire sont concentrées autour de cette espérance.
L'écart-type est un indicateur de dispersion autour de l'espérance.
Plus l'écart-type est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de l'espérance μ.

On peut aussi relier cette propriété avec la forme de la courbe de la densité (visualisation graphique).

Ces plages sont utilisées dans divers domaines par exemple en médecine.

Partie C : Approximation de la loi binomiale

I. Rappel sur la loi binomiale

1°) Loi de probabilité

n un entier naturel et p est un réel tel que $0 < p < 1$.

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

$\forall k \in \{0\,;1\ldots;n\}$ $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$ avec $q = 1-p$

2°) Espérance et variance

On reprend les notations précédentes.

$E(X) = np$

$V(X) = npq$

II. Variable centrée réduite

1°) Définition

Une variable aléatoire est dite centrée réduite si son espérance mathématique est nulle et si son écart-type vaut 1.

C'est le cas d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale **N** (0 ; 1) d'où le nom de loi normale centrée réduite.

2°) Rappel de la propriété sur l'effet d'une transformation affine sur les paramètres d'une variable aléatoire

X est une variable aléatoire.
***a* et *b* sont deux réels.**

On a :

$E(aX+b) = aE(X)+b$ **(linéarité de l'espérance)**

$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Cette propriété a été démontrée en 1$^{\text{ère}}$ pour une variable aléatoire discrète ; elle reste vraie pour une variable continue (admis sans démonstration cette année).

3°) Définition

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

La variable $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ a une espérance nulle et un écart-type égal à 1.

On dit que c'est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Démonstration :

$E(Z) = \dfrac{E(X)-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$

$\sigma(Z) = \dfrac{\sigma(X)}{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sigma} = 1$

4°) Application à une variable qui suit la loi binomiale

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

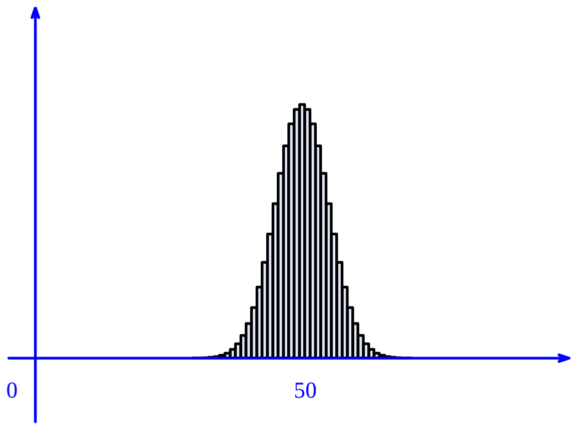
La variable centrée réduite associée à X est la variable $Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

III. Exemple de loi binomiale

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 10$.

Cette loi permet de modéliser le nombre de fois où l'on obtient pile dans une série de 100 lancers indépendants d'une pièce non truquée.

On peut représenter la loi de probabilité de X à l'aide d'un diagramme en bâtons (ou d'un histogramme) aisément obtenu sur calculatrice ou sur ordinateur.

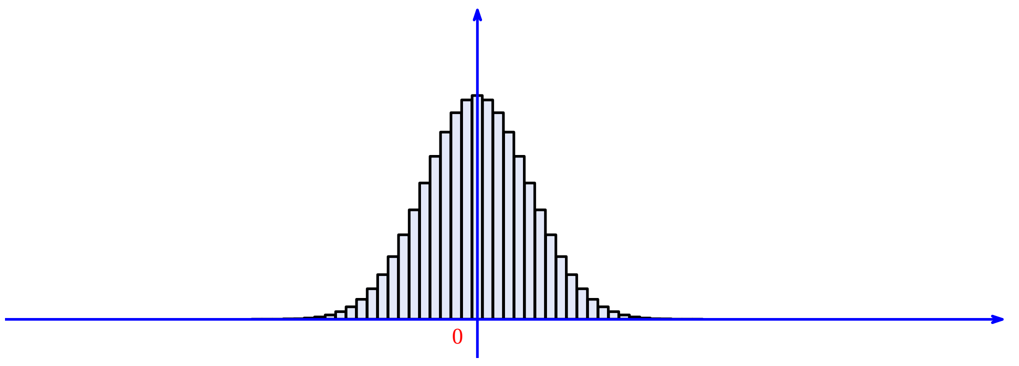


Le diagramme en bâtons fait apparaître une courbe en « cloche » (symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 50$) qui ressemble à une courbe de Gauss.

$E(X) = 50$

$\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$

La variable aléatoire centrée réduite associée à X est la variable $Z = \dfrac{X - 50}{5}$.



Le diagramme en bâtons de Z est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Il fait apparaître une courbe proche de celle de la densité de la loi normale centrée réduite.

IV. Théorème de Moivre-Laplace

1°) Énoncé (admis sans démonstration)

On suppose que pour tout entier naturel n, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0\,;1[$.

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée réduite associée à X_n.

Alors pour tout couple $(a\,;b)$ de réels tels que $a < b$ on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

2°) Interprétation

Ce théorème affirme que la loi binomiale centrée réduite « converge » vers la loi normale centrée réduite lorsque le nombre d'expériences tend vers l'infini.

Ce théorème a été démontré dans le cas $p = 0,5$ par Abraham de Moivre en 1733, puis généralisé à p réel quelconque de $]0\,;1[$ par Pierre-Simon Laplace en 1812.

Livre Indice TS édition 2012 page 328.

3°) Utilisation

Pour n très grand, on peut remplacer le calcul de $P(a \leqslant Z_n \leqslant b)$ par $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

On peut remplacer le calcul d'une probabilité avec la loi binomiale par un calcul de probabilités avec la loi normale centrée réduite.

Cette propriété sera revue et exploitée dans le chapitre sur l'échantillonnage.

4°) Historique

Moivre (1733) introduit une loi de probabilité pour un nombre élevé n d'épreuves vérifiant une loi binomiale pour $p = 0,5$.

Laplace (1812) a généralisé cette loi pour p quelconque.

Retenir

La loi normale est sans doute la loi de probabilité la plus connue et la plus utilisée.

Elle permet de modéliser de très nombreux phénomènes et sert également d'approximation à d'autres lois, notamment à la loi binomiale lorsque le nombre d'expériences devient grand.

L'expression de la densité de la loi normale centrée réduite doit être connue mais elle est inutilisable dans la pratique.

Les applications numériques se font essentiellement à la calculatrice (ou sur ordinateur). Il est donc essentiel de bien connaître le fonctionnement de sa machine. Le plus souvent on donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près.

Enfin, les propriétés conséquentes à la symétrie de la courbe de Gauss peuvent être utilisées pour transformer un énoncé en un calcul exploitable par la machine.

Il était une fois la « courbe en cloche »…

Historiquement, c'est le jeu de Pile ou Face qui conduit à la « courbe en cloche ». Le théorème d'Abraham de Moivre (1667-1754) affirme que le diagramme représentant les probabilités de tomber sur k fois Pile dans un jeu de n lancers s'approche d'une « courbe en cloche » lorsque le nombre n de lancers tend vers l'infini.
Trois quarts de siècle plus tard, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) généralise le résultat de Moivre et est le premier à concevoir qu'il ne s'applique pas uniquement aux jeux de hasard, mais aussi « aux questions de la vie », c'est-à-dire à tout type d'observations indépendantes.

À la fin du XVIII^{e} siècle, ces résultats permettront à l'astronomie d'atteindre une précision jamais égalée. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien et astronome, s'intéresse à la distribution des erreurs touchant les observations astronomiques. Des mesures avec un même instrument, répétées un grand nombre de fois dans des conditions les plus similaires possible, reportées sur un graphique, forment une courbe proche de la « courbe en cloche ». Cette courbe fut appelée alors « courbe de facilité » des erreurs de l'instrument.

Plus tard, Adolphe Quételet (1796-1874) appliqua ces résultats à des données sociales. Après avoir recensé les mesures du tour de poitrine de soldats écossais et du tour de taille des soldats français, il a constaté que les deux ensembles de la courbe de la « courbe de la loi des causes accidentelles ». Il élabora alors sa théorie de « l'homme moyen ». La loi des causes accidentelles va connaître un engouement au XIX^{e} siècle. Les statisticiens découvriront partout des « courbes en cloche ». Dans la même lignée, Francis Galton (1822-1911) affirma l'omniprésence de la loi normale dans la nature, la physique, la biologie.

Aujourd'hui, on estime que les variables qui suivent la « loi normale » sont beaucoup moins nombreuses que ce que Galton avait pu suggérer.
Les séries statistiques expérimentales qui se rapprochent le plus de la loi normale concernent essentiellement des variables (poids, dimensions, etc.) observées dans l'industrie pour les fabrications en grande série.

La théorie des probabilités n'est, au fond, que le sens réduit au calcul.
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Source de « Il était une fois la courbe en cloche » : Livre Déclic TES

Introduction

La *loi normale*, aussi nommée loi gaussienne, est la loi de probabilité la plus universelle. On observe en effet que la plupart des caractéristiques physiques, économiques, sociologiques, biologiques, … sont distribuées selon cette loi.

Le coin des langues

• Initialement nommée **« loi des erreurs »**, la loi gaussienne porte son nom en hommage au travail du mathématicien allemand ***Carl Friedrich Gauss***. Ce dernier montra en 1809 que les erreurs de mesures en astronomie fluctuent selon cette loi.

• On l'appelle parfois **« loi de Laplace-Gauss »** car le mathématicien français *Pierre-Simon de Laplace* fut le premier, en 1810, à justifier mathématiquement que la plupart des erreurs sont distribuées selon cette loi.

• Le célèbre statisticien britannique ***Karl Pearson*** la nomma dans un article de 1893 **« loi normale »** pour éviter tout conflit de paternité. Mais il le regretta : « cela a l'inconvénient de laisser croire aux gens que les autres distributions sont d'une façon ou d'une autre anormales »... C'est pourtant l'appellation qui prédomine aujourd'hui et justifie la lettre $\mathbf{N}$ de $\mathbf{N}(0\,;1)$.

La planche de Galton

La planche de Galton a été imaginée par ***Sir Francis Galton*** à la fin du XIX^{e} siècle pour illustrer le théorème de Moivre-Laplace. Des billes lâchées au sommet de cette planche rencontrent une série de clous et se répartissent naturellement dans les cases d'arrivée sous forme d'une cloche. La loi du nombre de billes dans chaque case suit approximativement une loi normale.
La loi normale ne laissa pas indifférent Sir Francis Galton :
« Cette loi aurait été personnifiée et déifiée par les grecs, s'ils l'avaient connue. »

Illustration concrète :

Sur cette photo, les filles d'une classe de 1975 ont été rangées par taille. La forme en cloche montre que la distribution des tailles suit approximativement une loi normale.

Bilan pour calculatrice TI :

On suppose que la variable aléatoire X suit la normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

■ **Pour calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$:**

→ Normalcdf/NormalFrép(a, b, μ, σ)

■ **Pour trouver le réel u tel que $P(X \leqslant u) = \alpha$:**

→ InvNorm/FracNorm(α, μ, σ)

Simulation de la loi normale centrée réduite par la méthode du rejet (livre Math'x TS édition 2011 page 432)

On cherche à simuler des réalisations d'une variable aléatoire Z et de loi normale centrée réduite. On suppose que le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur simule parfaitement d'une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1[.

1°) a) Rappeler quelle est la fonction densité f de la loi centrée réduite.

b) La fonction f est représentée ci-dessous. Donner la valeur m de son maximum.

c) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, la probabilité que Z prenne ses valeurs en dehors de l'intervalle [– 5 ; 5].

d) En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = -5$ et $x = 5$, exprimée en unités d'aires.

2°) On considère l'algorithme suivant.

Variables :
m, x, y

Initialisations :
m prend la valeur $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
x prend la valeur – 5 + 10/random()
y prend la valeur m random()

Traitement :
Tantque $(y > f(x))$ **Faire**
    x prend la valeur – 5 + 10 ∗ random
    y prend la valeur m ∗ random()
FinTantque

Sortie :
Afficher x

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X dont x, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?

b) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y dont y, dans l'algorithme ci-dessus, est une réalisation ?

c) Donner une interprétation graphique d'une réalisation (x ; y) des deux variables aléatoires précédentes.

d) Interpréter graphiquement la condition de « rejet » figurant dans la boucle « Tantque ».

e) Quelle est la probabilité de rejet, c'est-à-dire que la condition de la boucle soit satisfaite ?

f) Soit a et b deux nombres de l'intervalle [– 5 ; 5] avec $a \leqslant b$. Quelle est la probabilité qu'une valeur x acceptée (c'est-à-dire sortant de la boucle « Tantque ») appartienne à l'intervalle [a ; b] ? Que peut-on en déduire ?

3°) Implanter l'algorithme sur un ordinateur.

4°) Modifier l'algorithme de sorte qu'il génère 10 000 valeurs. Implanter ce nouvel algorithme et, selon les possibilités du logiciel, afficher un histogramme et comparer avec la représentation graphique de f.

Remarque : avec Scilab, on peut créer X avec X = zeros(1,10000) et tracer un histogramme à l'aide des instructions classes = linspace(– 5,5,21) et histplot(classes,X).

La méthode de simulation d'une variable aléatoire dite « du rejet » considérée ici a été développée par John Von Neumann (1903-1957) durant la Seconde Guerre mondiale dans le cadre des recherches sur la bombe atomique. Son intérêt est de pouvoir s'adapter à un grand nombre de densités de probabilité.

Complément sur la calculatrice :

La commande normaleFdp que l'on trouve juste au dessus de normaleFrep se réfère à la densité de probabilité d'une loi normale.
Nous avons vu que la densité de probabilité d'une loi normale d'espérance et d'écart-type est la fonction
$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
C'est cette fonction qui est appelée quand on utilise la commande normalecdf.

Exemple :

Lorsque l'on tape normaleFdp(4,0,1), on obtient la valeur de la densité de probabilité pour $x = 4$ dans le cas d'une loi normale centrée réduite.

Utilisation pratique éventuelle :

On peut utiliser la commande normalecdf pour représenter graphiquement la densité de probabilité d'une loi normale. Pour cela, on rentre la fonction dans $f(x)$ sous la forme $\mathrm{Y1} = \mathrm{normalefdp}(\mathrm{X},1,2)$). Cela évite de retaper la fonction entière. On obtient ainsi la représentation graphique d'une loi de densité d'espérance 1 et d'écart-type 2. Pour régler la fenêtre graphique, pour bien voir la représentation graphique sur l'écran de la calculatrice, il peut être utile de zoomer. Une bonne fenêtre graphique est : $\mathrm{Xmin} = -10$, $\mathrm{Xmax} = 10$, $\mathrm{Xgrad} = 1$, $\mathrm{Ymin} = 0$, $\mathrm{Ymax} = 0.3$, $\mathrm{Ygrad} = 1$. Le réglage en y s'effectue en tenant compte du fait que la fonction de densité est strictement positive, d'une part, et d'autre part en tenant compte du fait que son maximum est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
Complément :

Il est possible avec le même procédé d'obtenir graphiquement la représentation de la fonction de répartition d'une loi normale. Par exemple pour la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 2, on tape $\mathrm{Y1} = \mathrm{normaleFRép}(\mathrm{X},1,2)$. On prend la fenêtre graphique : $\mathrm{Xmin} = -10$, $\mathrm{Xmax} = 10$, $\mathrm{Xgrad} = 1$, $\mathrm{Ymin} = 0$, $\mathrm{Ymax} = 1$, $\mathrm{Ygrad} = 1$.