Terminale S

Démonstrations au programme du baccalauréat
à compter de juin 2013

Extraits du programme officiel (Bulletin officiel spécial N° 8 du 13 octobre 2011)

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par un sigle spécial dans le programme.
Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

♦ Suites

• Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain indice
- $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

• Démontrer que si une suite est croissante et admet une limite **l**, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à **l**.

• Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.
On démontre au préalable par récurrence que pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel n, on a :
$(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

• Démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

♦ Fonction exponentielle

• Démontrer l'unicité d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

• Démontrer que $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

♦ Espace

• Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c trois réels non tous nuls.

• Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

♦ Probabilités

Conditionnement et indépendance

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Lois à densité

• Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

• Démontrer que pour tout réel $\alpha \in]0 ; 1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que
$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Intervalle de fluctuation

Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, alors, pour tout réel $\alpha \in]0 ; 1[$,
on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ où $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right]$.

Fin des extraits du B.O..

Les démonstrations énoncées ci-dessus ont valeur de modèle donc d'autres démonstrations peuvent être demandées.

Par exemple :

• Propriétés algébriques des fonctions exponentielle, logarithme népérien, limites de ces fonctions aux bornes de leur ensemble de définition, croissances comparées.

• Limites de $\frac{\sin x}{x}$ en 0, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0 et $\frac{e^x - 1}{x}$ en 0.

• Propriétés du conjugués, du module, de l'argument d'un nombre complexe.

• Propriétés de l'intégration.

Exemple de démonstration pouvant être demandée au baccalauréat :

Prérequis :

- Définition de l'argument d'un nombre complexe non nul

- Propriété : Pour tous complexes z et z' non nuls, on a : $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

Démontrer que pour tous complexes z et z' non nuls, on a : $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$.

Autre exemple de démonstration pouvant être demandée au baccalauréat :

Prérequis :

- Définition du logarithme népérien d'un nombre strictement positif

- Propriété : Pour tous réels strictement positifs x et y, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

a) Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y, on a : $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

b) Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y, on a : $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$.