Révisions autour du dénombrement et des probabilités

1 Une association est composée de 35 personnes dont 20 femmes. On se propose de former un bureau de 5 personnes qui doit comprendre au moins deux hommes et au moins deux femmes.
Combien de bureaux différents peut-on former ?

Aide : On peut traduire « au moins deux hommes et au moins deux femmes » par « deux hommes **et** trois femmes » ou « trois hommes **et** deux femmes ».

2 Combien peut-on former de bouquets de quatre fleurs avec sept fleurs différentes ?

3 Dans un sac, on a placé 3 jetons numérotés 3, 4, 5.
On tire au hasard, successivement et sans les remettre dans le sac tous les jetons du sac.
On écrit le nombre qui a comme chiffre des centaines le 1^{er} nombre tiré, comme chiffre des dizaines le 2^{e} nombre tiré et comme chiffre des unités le 3^{e} nombre tiré.
1°) Donner le nombre de résultats possibles.
2°) Quelle la probabilité de l'événement : « obtenir 453 » ?
3°) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre strictement inférieur à 453 » ?
4°) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre multiple de 3 » ? Pouvait-on prévoir le résultat ?
5°) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir un nombre multiple de 2 » ?

4 **Vrai ou faux ?**

Un code d'entrée d'immeuble est composé dans l'ordre de 2 lettres suivies de 2 chiffres (compris entre 0 et 9).
Les lettres ne sont pas forcément distinctes ; les chiffres ne sont pas forcément distincts.
Le nombre de codes est égal à 260^2.

5 Voici deux questions :

• Question 1 : On tire au hasard 3 cartes parmi les 8 cartes de pique d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre de tirages possibles ?

• Question 2 : 8 athlètes s'affrontent pour trois médailles (or, argent, bronze). Combien de palmarès sont possibles ?

Voici des réponses :

$A = 8 \times 7 \times 6$; $B = 8 + 7 + 6$; $C = 3 \times 8$; $D = \binom{8}{3}$; $E = 8^3$.

Associer la bonne réponse à chaque question.

6 On tire deux cartes au hasard simultanément d'un jeu de trente-deux cartes.
On désire calculer le nombre de résultats possibles contenant au moins un roi.

On va étudier deux solutions justes puis une solution erronée.

Solution 1

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes.
Calculer le nombre total de tirages ne contenant aucun roi.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Solution 2

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement un roi.
Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement deux rois.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Etude d'une solution erronée

On utilise le raisonnement suivant : pour former un tirage contenant au moins un roi, on choisit d'abord une carte parmi les quatre rois puis on choisit une carte parmi les 31 cartes restantes.
Cela se traduit par le calcul $\binom{4}{1} \times \binom{31}{1}$.
Effectuer le calcul précédent pour constater que le résultat obtenu est supérieur au résultat trouvé avec les deux méthodes précédentes.
Il y a donc une erreur. Pourtant le raisonnement semble juste ! Où est l'erreur ?

7 On considère un ensemble E de cardinal 4 (c'est-à-dire à 4 éléments). On pose : $E = \{a, b, c, d\}$.
1°) Ecrire tous les sous-ensembles possibles de E à 2 éléments puis tous les sous-ensembles possibles à 3 éléments.
2°) Comment peut-on retrouver le nombre de sous-ensembles de E à 2 éléments ? Détailler le calcul.
Refaire la démarche pour les sous-ensembles à 3 éléments de E.

8 Développer $\left(2 - \frac{x}{2}\right)^5$.

9 Un candidat à un jeu télévisé doit choisir 7 questions parmi 10.
Combien a-t-il de choix possibles sachant qu'il doit en prendre au moins deux parmi les trois premières et exactement deux parmi les trois suivantes ?

10 Trois personnes prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée. Cet ascenseur dessert cinq étages.

1°) **Modélisation**
Chaque personne descend à l'un des cinq étages, on peut donc lui associer un numéro d'étages de 1 à 5. Une issue est représentée par une suite de trois numéros d'étages. Combien de suites peut-on obtenir ?
2°) Calculer la probabilité que toutes descendent au même étage.
3°) On note A l'évènement : « Une personne au moins descend au 5^{e} étage. »
a) Définir l'événement contraire de A.
b) Calculer la probabilité de l'événement contraire de A. En déduire la probabilité de A.

11 **Le doute de D'Alembert (simulation d'un jeu)**

On considère le jeu suivant.
On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On note le numéro de la face supérieure.
Si le résultat donne pile, alors le joueur a gagné et la partie s'arrête.
Si le résultat donne face, alors le joueur relance la pièce.
Si le résultat du deuxième lancer est pile, le joueur a gagné et la partie s'arrête.
Si le résultat du deuxième lancer est face, le joueur a perdu et la partie s'arrête.

Quel modèle choisir ?

Dans l'article « Croix et Pile » de l'*Encyclopédie* (1751-1772), Jean Le Rond d'Alembert présente deux raisonnements différents pour calculer les chances de gagner à ce jeu, c'est-à-dire d'obtenir « Croix » (on dirait aujourd'hui « face ») en lançant une pièce deux fois.

> « ... On demande combien il y a à parier qu'on amènera *Croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons :
>
> | **Premier coup** | **Second coup** |
> |---|---|
> | *Croix* | *Croix* |
> | *Pile* | *Croix* |
> | *Croix* | *Pile* |
> | *Pile* | *Pile* |
>
> De ces combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce... Cependant cela est-il bien exact ? Car ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent Croix au premier coup ? Car, dès qu'une Croix est venue, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons possibles :
> *Croix,* premier coup
> *Pile, Croix,* premier et second coups
> *Pile, Pile,* premier et second coups
> Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce.

Le premier raisonnement conduit à penser qu'il y a 3 chances sur 4 de gagner alors que le second donne 2 chances sur 3...

1°) Simulation de l'expérience

On simule l'expérience à l'aide d'une suite de 200 chiffres au hasard, on convient par exemple qu'un chiffre pair correspond à l'apparition de « Pile » et qu'un chiffre impair correspond à l'apparition de « Face ».
Calculer, à partir de l'extrait de la table de chiffres au hasard fourni, le pourcentage de parties gagnées.

Pour décider du modèle le plus approprié, on simule cette expérience en utilisant les 200 chiffres ci-dessous extraits d'une table de chiffres au hasard, et en décidant que tout chiffre pair représente « Pile » et tout chiffre impair représente « Face ».

72432	75549	80822	65404	51752	70058	58477	23491	25703	84926
43128	80486	66338	22652	85812	70996	67407	19709	72304	14022
74189	23770	63764	45534	02449	72041	34457	16813	24634	43737
38396	99720	64880	02311	12180	35105	84613	99422	59620	43617

Par exemple :

7	$\underbrace{24}$	3	$\underbrace{27}$	5	5	...
gagné	perdu	gagné	gagné	gagné	gagné	

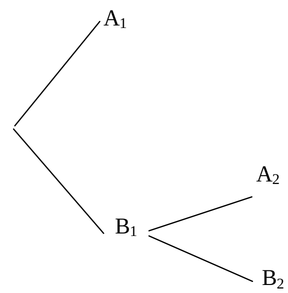
Donner le pourcentage de parties gagnées dans la simulation avec tous les chiffres disponibles dans l'extrait de la table précédente.

2°) Modélisation

a) Lequel des deux modèles semble le plus approprié ?

b) Proposer une explication à partir de l'arbre ci-dessous qui envisage les différents cas possibles.

On note A_1 l'événement : « obtenir pile au premier lancer » ;
B_1 l'événement : « obtenir face au premier lancer » ;
A_2 l'événement : « obtenir pile au deuxième lancer » ;
B_2 l'événement : « obtenir face au deuxième lancer ».



Solutions

6 Avec le raisonnement précédent, on compte plusieurs fois le même cas.
En effet, avec le raisonnement précédent il se peut très bien que l'on choisisse d'abord le roi de cœur pour la première carte puis le roi de carreau pour la deuxième carte.
Mais cela revient au même que la démarche qui consiste à choisir d'abord le roi de carreau puis ensuite le roi de cœur.

8 $\left(2-\frac{x}{2}\right)^5=32-40x+20x^2-5x^3+\frac{5x^4}{8}-\frac{x^5}{32}$

9 On fait une partition des choix.

1^er^ choix :

Il y a $\binom{3}{2}$ façons de prendre 2 questions parmi les 3 premières ;

$\binom{3}{2}$ façons de prendre 2 questions parmi les 3 suivantes ;

$\binom{4}{3}$ façons de prendre 3 questions parmi les 4 dernières.

2^e^ choix :

Il y a $\binom{3}{3}$ façons de prendre 3 questions parmi les 3 premières ;

$\binom{3}{2}$ façons de prendre 2 questions parmi les 3 suivantes ;

$\binom{4}{2}$ façons de prendre 2 questions parmi les 4 dernières.

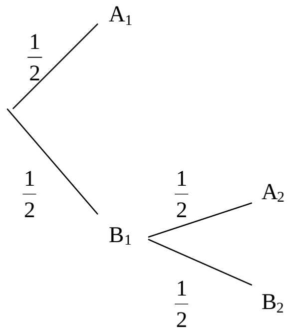
Le nombre de choix possibles est égal à :

$$N=\binom{3}{2}\times\binom{3}{2}\times\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\times\binom{3}{2}\times\binom{4}{2}$$

$$=\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}+\binom{3}{3}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{2}$$

$$=3\times3\times4+1\times3\times\frac{4\times3}{1\times2}$$
$$=36+18$$
$$=54$$

11 2°) b)



On note G l'événement « gagner la partie ».

$P(\mathrm{G})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$