TS

Fiche sur les intégrales

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I.
a et b sont deux réels quelconques dans I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Propriétés de l'intégrale pour les bornes

f est une fonction continue sur un intervalle I.
a, b, c sont trois réels dans I.

1°) Propriété 1 (ordre des bornes)

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2°) Propriété 2

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

3°) Propriété 3 (relation de Chasles)

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés pour les opérations algébriques (linéarité de l'intégrale)

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
a et b sont deux réels quelconques dans I.
λ est un réel quelconque.

1°) Propriété 1

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

2°) Propriété 2

$$\int_a^b \lambda \times f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégrales et inégalités

1°) Propriété 1

f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a \leq b)$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ **(positivité de l'intégrale)**
.
- Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$.

2°) Propriété 2 (« croissance » de l'intégrale)

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a \leq b)$.
Si $f \leq g$ sur $[a\,, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Formule d'intégration par parties

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
a et b ont deux réels quelconques dans I.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

Lorsque f est positive ou nulle, μ est la deuxième dimension d'un rectangle dont la première dimension est $b - a$ et qui a la même aire que le domaine située sous la courbe de f sur $[a, b]$ dans un repère orthogonal.

Propriété (inégalité de la moyenne)

f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.
m et M sont deux réels tels que $\forall x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$.
On a : $m \leq \mu \leq M$.

Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.
$a \in \mathrm{I}$ fixé.

Pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on pose $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

φ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi'(x) = f(x)$.

Application des intégrales aux calculs d'aires

Unité d'aire dans un repère orthogonal

u.a. = aire du rectangle OIKJ avec $\mathrm{O}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\mathrm{I}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\mathrm{J}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $\mathrm{K}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Aire associée à la courbe d'une fonction de signe constant

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ continue.

- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine située sous la courbe de f sur $[a, b]$ dans un repère orthogonal est égale à : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en u.a..

Ce domaine est défini par le système $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

- Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine située sous la courbe de f sur $[a, b]$ dans un repère orthogonal est égale à : $-\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en u.a..

Ce domaine est défini par le système $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.

Aire du domaine compris entre deux courbes

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ continue.
$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ continue.
$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

L'aire du domaine compris entre les courbes de f et g sur $[a, b]$ dans un repère orthogonal est égale à :
$\int_a^b \left[g(t) - f(t) \right]\ \mathrm{d}t$ en u.a..

Ce domaine est défini par le système $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$.

Application aux calculs de volumes

Théorème

● Formule de calcul par découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des cotes

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère un solide délimité par les plans de cotes a et b $(a < b)$.

On note $S(z)$ l'aire de la section à la cote z pour $a \leq z \leq b$.

Volume du solide $= \int_a^b S(z)\ \mathrm{d}z$ (en u.v.)

aire de la section à la cote z

● Cette formule reste valable pour un découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des abscisses.

On note $S(x)$ l'aire de la section à l'abscisse x pour $a \leq x \leq b$.

Volume du solide $= \int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x$ (en u.v.)

aire de la section à l'abscisse x

● Cette formule reste valable pour un découpage en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des ordonnées.

Volume d'un solide de révolution (méthode des disques)

f est une fonction continue et positive sur $[a\,; b]$.
$\mathcal{C}$: représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses est donné par la formule :

$$\mathrm{V} = \pi \times \int_a^b \left[f(x) \right]^2\ \mathrm{d}x$$

Calcul approché d'une intégrale

Méthode des rectangles : encadrement de l'aire sous la courbe d'une fonction monotone et continue sur un segment par la somme des aires des rectangles sous la courbes et par la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

Calcul d'intégrales avec la calculatrice