Mémento des méthodes

• Vous trouverez dans ce mémento les **59 compétences clés** du programme de mathématiques Tle S (enseignement obligatoire).
• À chacune correspond un **code** C1, C2, C3, etc., qui est utilisé dans les différents renvois faits à la compétence concernée à travers l'ouvrage.
• Chacune est développée dans une petite **fiche** qui vous permet de réviser et de mémoriser l'essentiel de ce que vous devez savoir : selon le cas, une définition, un théorème ou une méthode de résolution.

Analyse

Généralités sur les fontions

C1 Calculer la limite d'une fonction

A. Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 .$$

B. Comportement à l'origine

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \ ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

C. Croissances comparées à l'infini

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 .$$

C2 Lever l'indétermination d'une limite

Les principales indéterminations portant sur les limites de fonction lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou une valeur finie x_0 sont les suivantes :

$$0 \times \infty \ ; \quad \frac{0}{0} \ ; \quad \frac{\infty}{\infty} \ ; \quad +\infty - \infty .$$

On dispose de plusieurs techniques pour lever ces indéterminations et trouver la limite cherchée.

A. Transformer l'expression de la fonction

On factorise ou on développe l'expression de la fonction.

B. Utiliser la quantité conjuguée de la fonction

Exemple : Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$, on montre que pour tout x,

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} .$$

D'où : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty$.

C. Utiliser le taux d'accroissement d'une fonction auxiliaire

En effet, on rappelle que si la fonction f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) .$$

Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos(0) = 1$.

C3 Interpréter graphiquement une limite

• Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

• Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$) alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

C4 Démontrer qu'une courbe admet une asymptote oblique $y = mx + p$

▶ 1re étape. Calculer l'expression $f(x) - (mx + p)$.

▶ 2e étape. Démontrer que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx + p) = 0$.

▶ 3e étape. Conclure : la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$.

Remarque : On démontre que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ pour prouver que $\mathscr{C}_g$ est une courbe asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.

C5 Étudier la continuité d'une fonction

A. Étude en un point *a*

▶ 1re étape. Préciser que f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

▶ 2e étape. Démontrer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

▶ 3e étape. f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

B. Étude sur un intervalle I

▶ 1re étape. Repérer la nature de la fonction. Pour cela, préciser si la fonction est une somme, un produit, un quotient ou la composée de fonctions.

▶ 2e étape. Appliquer la propriété associée. Soit f, g, continues sur I et h continue sur $g(\mathrm{I})$.

$f+g$; $f \times g$ et $h \circ g$ sont continues sur I et $\frac{f}{g}$ est continue partout où g ne s'annule pas.

C6 Étudier la dérivabilité d'une fonction

A. Étude en un point *a*

▶ 1re étape. Préciser que la fonction f est définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

▶ 2e étape. Calculer la $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

▶ 3e étape. Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \mathrm{L} \in \mathbb{R}$ (limite finie) alors f est dérivable en a et $f'(a) = \mathrm{L}$. Sinon f n'est pas dérivable en a.

B. Étude sur un intervalle I

▶ 1re étape. Repérer la nature de la fonction. Pour cela, préciser si la fonction est une somme, un produit, un quotient ou la composée de fonctions.

▶ 2e étape. Appliquer la propriété associée.

Soit f, g, deux fonctions dérivables sur I et h dérivable sur $g(\mathrm{I})$.

$f+g$; $f \times g$ et $h \circ g$ sont dérivables sur I et $\frac{f}{g}$ est dérivable partout où g ne s'annule pas.

C7 Calculer la dérivée ou une primitive d'une fonction

Avant de calculer la dérivée d'une fonction, identifier sa nature (somme, produit, etc.) et appliquer la formule associée.

A. Opérations sur les fonctions dérivées

$(u+v)' = u'+v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v+uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$; $(e^u)' = u'e^u$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $(n \in \mathbb{N}^*)$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

B. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, f' est la dérivée de f.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x (a>0)$	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Remarque : f est une primitive de f'. En effet, F est une primitive de f sur I si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Pour démontrer que g est une primitive de f, démontrer que $g' = f$.

C8 Déterminer l'équation de la tangente en un point à une courbe

Soit f une fonction dérivable sur I et $a \in \mathrm{I}$.

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente T_a de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

C9 Déterminer les variations d'une fonction

A. En étudiant le signe de la dérivée

En général, il est plus facile de déterminer le signe d'un produit (ou d'un quotient) que celui d'une somme.

▶ 1re étape. Factoriser donc l'expression $f'(x)$.

▶ 2e étape. Conduire l'étude du signe en utilisant un tableau de signes, le cas échéant.

▶ 3e étape. Conclure en utilisant la propriété suivante.

Soit f une fonction dérivable sur I :

si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I ;

si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

B. En utilisant les propriétés suivantes

• La somme de deux fonctions croissantes (décroissantes) sur I est croissante (décroissante) sur I.

• La composée de deux fonctions de même sens (sens contraire) de variations est croissante (décroissante).

C10 Dresser le tableau de variation d'une fonction

Dans un tableau de variation, il est impératif de préciser :

– les variations ;

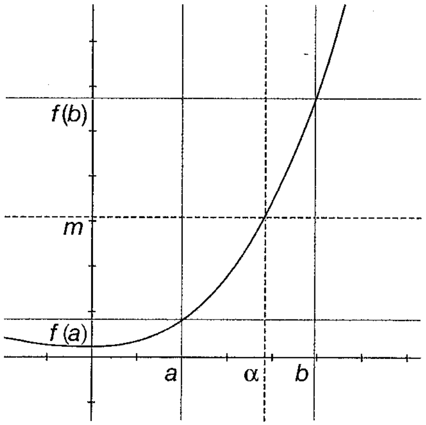
– les *extrema* de la fonction, c'est-à-dire les *maxima* et les *minima* de la fonction ;

– les limites, seulement si elles sont demandées.

C11 Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution

A. Le théorème de la bijection

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Si $m \in [f(a)\,;\,f(b)]$ ou $m \in [f(b)\,;\,f(a)]$ et si f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ alors l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution α sur $[a\,;b]$.



B. La méthode

▶ **1re étape.** Calculer $f(a)$ et $f(b)$.

▶ **2e étape.** Préciser que $f(a) < m < f(b)$ (ou $f(b) < m < f(a)$).

▶ **3e étape.** Préciser que f est continue et strictement croissante ou décroissante sur $[a\,;b]$, appliquer le théorème de la bijection et conclure que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur $[a\,;b]$.

Remarque : Pour prouver que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses, une seule et unique fois, on étudie de la même façon l'équation $f(x) = 0$.

C12 Étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

▶ **1re étape.** Résoudre l'équation $f(x) - g(x) = 0$.

▶ **2e étape.** Chaque solution trouvée correspond à l'abscisse d'un point d'intersection. Pour trouver l'ordonnée correspondante, calculer l'image de cette abscisse par l'une des fonctions f ou g.

C13 Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

▶ **1re étape.** Étudier le signe de $f(x) - g(x)$

▶ **2e étape.** Si $f(x) - g(x) > 0$ sur I, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I.
Si $f(x) - g(x) < 0$ sur I, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.

C14 Étudier la parité d'une fonction

▶ **1re étape.** Préciser que le domaine de définition D_f est symétrique par rapport à O.

▶ **2e étape.** Si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$ alors f est paire et $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$ alors f est impaire et $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

C15 Démontrer qu'une courbe admet un axe ou un centre de symétrie

Soit f définie sur un intervalle I et soit a un réel.

▶ **1re étape.** Préciser que, pour tout h, les nombres $a + h$ et $a - h$ appartiennent à I.

▶ **2e étape.** Calculer $f(a + h)$ et $f(a - h)$.

▶ **3e étape.** Appliquer l'une des deux propriétés suivantes.

• Si $f(a + h) = f(a - h)$ alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.

• Si $f(a + h) + f(a - h) = 2b$ alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $A(a\,;\,b)$.

C16 Résoudre une inéquation

A. En manipulant des inégalités

Veiller, à chaque étape, au sens de l'inégalité. Pour cela, appliquer la monotonie d'une fonction usuelle sur un intervalle judicieusement choisi. Ainsi $a < x < b$ entraîne $f(a) < f(x) < f(b)$ si f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.

B. En étudiant le signe d'une fonction auxiliaire

On veut démontrer que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in$ I.

▶ 1re étape. Introduire la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$.
▶ 2e étape. Étudier le signe de h sur I. On pourra pour cela étudier les variations de h et démontrer qu'elle admet un maximum positif ou nul sur I.
▶ 3e étape. Conclure.

La fonction exponentielle

C17 Connaître les propriétés de la fonction exponentielle

A. Propriété – Définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=1$, et, pour tout réel x, $f'(x)=f(x)$.

B. Signe et sens de variation

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C. Égalités algébriques

Soit a et b deux réels et n un entier. Alors, on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;
- $(e^a)^n = e^{n \times a}$.

D. Équation et inéquation

Soit x et y deux réels. Alors :

- $e^x = e^y$ si, et seulement si, $x = y$;
- $e^x > e^y$ si, et seulement si, $x > y$.

C18 Connaître les propriétés des fonctions puissances

A. Définition

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On appelle a puissance b et on note a^b le réel $e^{b \ln a}$.

B. Égalités algébriques

Soit $a > 0$, et b et c deux réels quelconques. Alors, on a :

- $a^{b+c} = a^b \times a^c$;
- $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$;
- $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$;
- $(a^b)^c = a^{b \times c}$.

La fonction logarithme népérien

C19 Connaître les propriétés de la fonction logarithme népérien

A. Définition – Propriété

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0 ; +\infty[$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et, pour tout $x > 0$, on a $e^{\ln x} = x$.

B. Signe et sens de variation

- $\ln 1 = 0$.

Pour tout $x \in]0 ; 1[$, on a $\ln(x) < 0$ et, pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, on a $\ln(x) > 0$.

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

C. Égalités algébriques

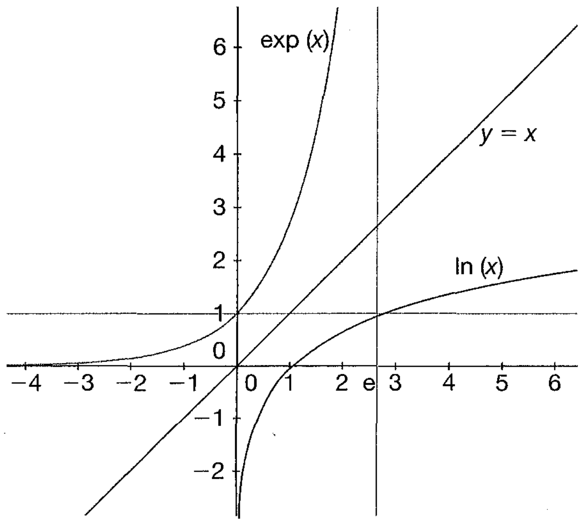
Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier. Alors, on a :

- $\ln a \times b = \ln a + \ln b$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

D. Équation et inéquation

Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors :

- $\ln x = \ln y$ si, et seulement si, $x = y$.
- $\ln x > \ln y$ si, et seulement si, $x > y$.



C20 Appliquer le principe de récurrence

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, il faut procéder en trois étapes :

▶ 1re étape. Initialisation : montrer que la proposition P_n est vraie à l'ordre n_0.

▶ 2e étape. Hérédité : supposer que P_k est vraie et montrer, avec cette hypothèse de récurrence, que P_{k+1} est vraie.

▶ 3e étape. Conclusion : la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

C21 Connaître les propriétés des suites arithmétiques

A. Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier n, on a :

$u_{n+1} = u_n + r$; r est appelé la raison de la suite.

B. Démontrer qu'une suite est arithmétique

▶ 1re étape. On calcule $u_{n+1} - u_n$.

▶ 2e étape. On montre que ce nombre ne dépend pas de n.

C. Exprimer u_n en fonction de n

Si la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors : $u_n = u_0 + nr$.

Plus généralement, pour tout entier p supérieur à n, $u_n = u_p + (n-p)r$.

D. Calculer la somme de termes consécutifs

Si la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0,

alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$.

C22 Connaître les propriétés des suites géométriques

A. Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = qu_n$.

q est appelé la raison de la suite.

B. Démontrer qu'une suite est géométrique

▶ 1re étape. On montre que u_n ne s'annule pas pour tout n.

▶ 2e étape. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

▶ 3e étape. On montre que ce nombre ne dépend pas de n.

C. Exprimer u_n en fonction de n

Si la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors : $u_n = u_0 q^n$. Pour tout entier p supérieur à n, $u_n = u_p q^{n-p}$.

D. Calculer la somme de termes consécutifs

Si la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0,

alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

C23 Étudier les variations d'une suite

A. Définition

- Une suite (u_n) est croissante si, à partir d'un certain rang, on a :
- $u_{n+1} - u_n > 0$.
- Une suite (u_n) est décroissante si, à partir d'un certain rang, on a :

$u_{n+1} - u_n < 0$.

B. Méthode

▶ 1re étape. Calculer $u_{n+1} - u_n$.

▶ 2e étape. Étudier le signe de cette différence et conclure d'après la définition précédente.

C24 Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée voire bornée

- Une suite est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n entier on a $m \leqslant u_n$.
- Une suite est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n entier on a $u_n \leqslant M$.
- Une suite bornée est une suite à la fois minorée et majorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n entier on a : $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Exemple : Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Pour tout n entier non nul, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

C25 Utiliser le théorème des suites monotones et bornées

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

C26 Appliquer la propriété des suites adjacentes

A. Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient :

- $u_n \leqslant v_n$;
- u_n croissante et v_n décroissante ;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

B. Propriété

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

C27 Calculer la limite d'une suite

A. Limite d'une suite géométrique

- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

B. Limite d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Si f est continue sur un intervalle contenant ℓ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. On remarquera que la suite converge vers ℓ, solution de l'équation $f(x) = x$.

C. Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et, si

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell.$$

Primitives et intégration

C28 Interpréter graphiquement une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.

On appelle intégrale de a à b de f et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ le réel mesurant l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque : Dans le cas général, si f et g sont deux fonctions continues telles que $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$ mesure l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

C29 Calculer une intégrale

A. Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et F une de ses primitives.

On a $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

B. Méthode pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$

▶ 1re étape. Déterminer une primitive F de f.

▶ 2e étape. Calculer $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

C30 Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. On suppose que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

C31 Appliquer les propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et $c \in [a\,;b]$.

A. Inégalités

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

En particulier si $0 \leqslant f(x)$ alors $0 \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. Formule de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

C. Linéarité

Soit $k \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

D. Valeur moyenne d'une fonction et inégalité de la moyenne
La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a\,;b]$,

$$\text{alors : } m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

C32 Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Si F est la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors F est la primitive de f qui s'annule en a, autrement dit, $F'(x)=f(x)$, pour tout $x \in [a\,;b]$ et $F(a)=0$.

Équations différentielles

C33 Résoudre une équation différentielle du premier degré

A. Théorème
Soit a un réel non nul et b un réel. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Équation	Solutions sur $\mathbb{R}$
$y'=0$	$f(x)=C$ avec $C \in \mathbb{R}$
$y'=ay$	$f(x)=Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$
$y'=ay+b$	$f(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$

B. Unicité des solutions
Pour tout couple de réels $(x_0\,;y_0)$, il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation telle que $f(x_0)=y_0$
(On dit qu'on s'est fixé une condition initiale).

C. *f*, solution d'une équation différentielle (E)
Pour démontrer que f est solution d'une équation différentielle (E), on démontre que f vérifie l'égalité (E).

Géométrie

Géométrie plane : nombres complexes

C34 Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z a une écriture du type $z=a+ib$, où a et b sont deux nombres réels appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z et où i est le nombre tel que $i^2=-1$.

C35 Déterminer le conjugué d'un nombre complexe

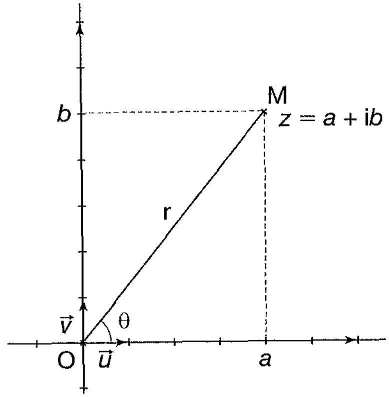
A. En utilisant la définition
Soit $a+ib$ la forme algébrique d'un nombre complexe z.
On appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.

B. En utilisant les propriétés du conjugué
Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; • $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z}'$; • $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ (z' non nul).

C36 Déterminer le module d'un nombre complexe

A. En utilisant la définition
Soit z un nombre complexe ayant pour forme algébrique $z=a+ib$.
On appelle module de z, le nombre r positif tel que $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.



B. En utilisant les propriétés du module

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (z' non nul) • $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

C37 Déterminer un argument d'un nombre complexe non nul

A. En utilisant la définition

► 1re étape. Déterminer $|z|$: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

► 2e étape. Factoriser l'expression algébrique de z par la valeur de $|z|$:

$$z = a + \mathrm{i}b = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\,\frac{b}{|z|}\right).$$

► 3e étape. Déterminer une valeur θ telle que $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$.

Utiliser les valeurs usuelles des angles ci-dessous et le cercle trigonométrique pour déterminer une valeur θ.

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

B. En utilisant les propriétés de l'argument

- $\arg z \times z' = \arg z + \arg z'$ • $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$
- $\arg z^n = n \arg z$

C38 Déterminer la forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe

A. Définition

Tout nombre complexe admet une écriture du type $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ appelée forme trigonométrique, où r est le module de z et θ un argument de z.

B. Donner la forme trigonométrique d'un nombre complexe

► 1re étape. Déterminer le module r de z.

► 2e étape. Déterminer un argument θ de z.

► 3e étape. Conclure en donnant la forme trigonométrique de z.

C. Donner la forme exponentielle d'un nombre complexe

Si on reprend les notations ci-dessus, on note $re^{\mathrm{i}\theta}$ la forme exponentielle du nombre complexe z.

On a donc, par analogie avec la fonction exponentielle, les formules :

- $re^{\mathrm{i}\theta} \times r'e^{\mathrm{i}\theta'} = (r \times r')e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ • $(re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$
- $\frac{re^{\mathrm{i}\theta}}{r'e^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$; avec $r' \neq 0$.

C39 Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

A. Équation du premier degré

On procédera comme dans $\mathbb{R}$. En particulier, on retiendra les règles suivantes :

- Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
- Un quotient de nombres complexes est nul si, et seulement si, le numérateur est nul et le dénominateur est non nul.

B. Équation du second degré

a, b et c sont trois nombres réels. Soit (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

C40 Utiliser les nombres complexes en géométrie (1)

A. Calculer la norme d'un vecteur

On a $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$.

B. Déterminer la mesure d'un angle

Soit $M(z)$ et $\theta = \arg z$. On a $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) = \arg z$.

D'une façon générale, on a :

- $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ • $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

C. Déterminer des lieux géométriques

– Équation du type $|z-a|=\mathrm{R}$

Soit R un réel positif. L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que z soit solution de $|z-a|=\mathrm{R}$ est le cercle de centre $\mathrm{A}(a)$ et de rayon R.

– Équation du type $|z-a|=|z-b|$

Soit A et B les points d'affixe a et b. L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que z soit solution de $|z-a|=|z-b|$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$.

– Équation du type $\dfrac{z-a}{z-b}=k\mathrm{i}$

Soit $\mathrm{M}(z)$, $\mathrm{A}(a)$ et $\mathrm{B}(b)$ et k un nombre réel non nul. L'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ du plan tels que z soit solution de $\dfrac{z-a}{z-b}=k\mathrm{i}$ est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$ privé des points A et B.

D. Déterminer l'affixe du milieu d'un segment

Soit $\mathrm{A}(a)$ et $\mathrm{B}(b)$ et I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. On a $z_{\mathrm{I}}=\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}$.

C41 Utiliser les nombres complexes en géométrie (2)

Soit une transformation du plan qui associe à tout point $\mathrm{M}(z)$ du plan (ou d'une partie du plan) le point $\mathrm{M}'(z')$ tel que $z'=f(z)$.

A. Trouver l'image d'un point par une transformation f du plan

Soit A le point d'affixe a. Pour trouver l'affixe a' du point A' image de A par f calculer $f(a)$.

B. Trouver le ou les antécédents d'un point par une transformation du plan

Soit B le point d'affixe b. Pour trouver le (ou les points) qui a (ont) pour image le point B, résoudre l'équation $f(z)=b$ et conclure.

C. Trouver le ou les point(s) invariant(s) d'une transformation du plan

– Définition

Le point A d'affixe a est appelé point invariant de f si $f(a)=a$.

– Méthode

Pour déterminer le ou les point(s) invariant(s) de f, résoudre l'équation $f(z)=z$ et conclure.

D. Ecriture complexe d'une transformation usuelle du plan

– Rotation

Soit θ un nombre réel et $\mathrm{M}'(z')$ l'image de $\mathrm{M}(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.

On a $\boxed{z'-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)}$.

– Translation

Soit $\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$. Soit $\mathrm{M}'(z')$ l'image de $\mathrm{M}(z)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On a $\boxed{z'-z=z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$.

– Homothétie

Soit k un nombre réel et $\mathrm{M}'(z')$ l'image de $\mathrm{M}(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k.

On a $\boxed{z'-\omega=k(z-\omega)}$.

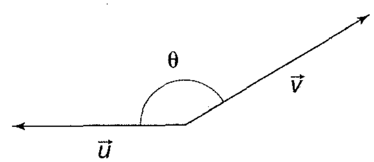
Géométrie dans l'espace : produit scalaire, droites et plans dans l'espace

C42 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

A. En utilisant la définition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Sinon $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.



B. En utilisant les coordonnées des vecteurs

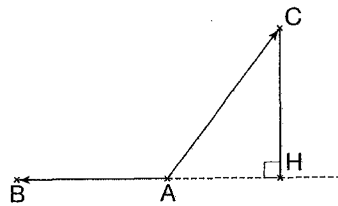
Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$, et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

C. En utilisant un projeté orthogonal

Soit A, B et C trois points distincts et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AH}}$.



D. En utilisant les propriétés

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

E. Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

C43 Déterminer une équation cartésienne d'un plan Π

A. Plan passant par trois points A, B et C de coordonnées données

Soit $ax+by+cz+d=0$ l'équation cartésienne du plan Π.

▶ 1re étape. Injecter les coordonnées de A, de B, puis celles de C, dans l'équation de Π, pour obtenir un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
▶ 2e étape. Résoudre le système.
▶ 3e étape. Conclure en donnant l'équation de Π.

B. Plan de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ passant par un point A
▶ 1re étape. Le plan Π a pour équation $ax+by+cz+d=0$.
Il reste à déterminer le nombre d.
Pour cela, injecter les coordonnées de A dans l'équation de Π.
▶ 2e étape. Résoudre l'équation obtenue.
▶ 3e étape. Conclure en donnant l'équation de Π.

C44 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Soit (d) une droite passant par $A(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$. Une représentation paramétrique de la droite (d) est donnée par le système suivant : $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

C45 Étudier la position relative entre deux plans

Deux plans sont :
– soit confondus ;
– soit strictement parallèles, dans le cas où leurs vecteurs normaux sont colinéaires ;
– soit sécants et leur intersection est une droite.

C46 Étudier la position relative entre un plan et une droite

L'intersection d'un plan et une droite est :
– soit vide ;
– soit une droite ;
– soit un point.

C47 Démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan

A. En utilisant deux droites sécantes du plan
Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

B. En utilisant un vecteur directeur et un vecteur normal
Si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont colinéaires, alors la droite est orthogonale à ce plan.
Remarque : Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, on démontrera que leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

C48 Étudier la position d'un point par rapport à un plan

Soit (Π) un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C\ ;\ z_C)$ trois points de l'espace.

A. Déterminer la distance du point A au plan (Π)
La distance de A à (Π) est donnée par :

$$d(A\ ;\ \Pi)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

B. Démontrer que les trois A, B et C définissent un plan
Démontrer pour cela que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
▶ 1re étape. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
▶ 2e étape. Supposer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.
▶ 3e étape. Traduire cette égalité vectorielle par trois équations d'inconnue k.
▶ 4e étape. Les résoudre, puis conclure en interprétant les résultats.

C. Prouver que B est le projeté orthogonal de A sur un plan
▶ 1re étape. Montrer que $B\in(\Pi)$. Pour cela, montrer que les coordonnées de B vérifient l'équation de (Π).
▶ 2e étape. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$, normal au plan (Π), sont colinéaires. (Pour ce faire, on montrera que les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles.)
▶ 3e étape. Conclure.

C49 Déterminer le barycentre de n points de l'espace

A. En utilisant la définition

• Le barycentre des n points pondérés $(A_1\ ;\ \alpha_1)$, $(A_2\ ;\ \alpha_2)$, ..., $(A_n\ ;\ \alpha_n)$ (avec $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$) est l'unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

• Pour tout point M du plan, on a : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$.

Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$, le vecteur $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ est constant et ne dépend donc pas du point M.

B. En utilisant l'associativité

Soit p et n deux entiers tel que $2 \leqslant p < n$. Le barycentre de n points pondérés ne change pas si on remplace p points du système par le barycentre partiel affecté de la somme des poids des p points choisis.

Exemple : Soit G′ le barycentre des points (A ; 2) et (B ; − 5).

Le barycentre G des points (A ; 2), (B ; − 5) et (C ; − 2) est le barycentre des points (G′ ; − 3) et (C ; − 2).

C. En utilisant les coordonnées des points du système

$$G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} ; \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{A}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} ; \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)$$

C50 Caractériser une figure à l'aide du barycentre

A. Une droite, un segment

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

- L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).
- L'ensemble des barycentres des points (A ; α) et (B ; β), tels que α et β soient de même signe, est le segment [AB].

B. Un plan, un triangle

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).
- L'ensemble des barycentres des points (A ; α), (A ; α) et (C ; δ), tels que α, β et δ soient de même signe, est la réunion de l'intérieur du triangle ABC et de ses côtés.

Probabilités et statistiques

Conditionnement et indépendance

C51 Calculer la probabilité d'un événement

A. En utilisant les propriétés élémentaires

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit p une loi de probabilité sur l'univers Ω.

- On a : $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$.
- Pour tout événement A, on a $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- Pour tout événement A, on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- Pour tous événements A et B, on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

- Soit $A_1, ..., A_n$ une partition de l'événement A. On a $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$.

B. En utilisant l'hypothèse d'équiprobabilité

Soit A un événement. Dans le cas où tous les événements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité, on se trouve sous l'hypothèse de l'équiprobabilité.

Pour calculer la probabilité d'un événement :

► **1^re^ étape.** Déterminer card(Ω), c'est-à-dire le nombre de cas possibles.

► **2^e^ étape.** Déterminer card(A), c'est le nombre de cas favorables à A.

► **3^e^ étape.** Appliquer la formule : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

C. En appliquant la formule des probabilités totales

Soit A et B deux événements. On a $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

D'une façon plus générale, soit $A_1, ..., A_n$ une partition de l'univers Ω, alors :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + ... + p(B \cap A_n).$$

C52 Calculer une probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de B sachant A est donnée par la formule :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

C53 Étudier l'indépendance de deux événements.

Deux événements A et B sont *indépendants* si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

C54 Étudier une variable aléatoire

A. Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire est une fonction X qui a tout élément Ω associe un nombre réel x.

B. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On veut déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

► **1^re^ étape.** Déterminer l'ensemble des valeurs x_i prises par la variable X.

▶ 2ᵉ étape. Pour chacune de ces valeurs, calculer la probabilité de l'événement $X = x_i$ que l'on note $p(X = x_i) = p_i$.

▶ 3ᵉ étape. Résumer l'étude à l'aide d'un tableau.

C. Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$$

D. Calculer la variance d'une variable aléatoire

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

E. Calculer l'écart type d'une variable aléatoire

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

C55 Calculer le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments

Appliquer la formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{avec} \quad n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \ ;$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \ ;$$

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n-1 .$$

C56 Appliquer la formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier non nul.

On a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Lois de probabilités

C57 Étudier une loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p toute épreuve aléatoire qui admet deux issues :

– l'événement « succès », noté S, de probabilité p ;

– l'événement « échec », noté E, de probabilité $1 - p$.

- Soit une succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire associant, à chaque issue, le nombre de succès, a pour loi de probabilité : $p(X = k) = \binom{n}{\cancel{p}} p^k (1-p)^{n-k}$.

Attention erreur : c'est k et non p

Son espérance est $E(X) = n \times p$.

Sa variance est $V(X) = n \times p \times (1-p)$.

- On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

C58 Étudier une loi de probabilité continue

A. Définition

- Une loi de probabilité continue sur un intervalle I est définie par une fonction f, appelée densité de probabilité, satisfaisant les conditions suivantes : f est continue et positive sur I, et $\int_{x \in I} f(x) = 1$.
- On définit alors la loi de probabilité de densité f sur I, en associant à tout intervalle $[a\ ;\ b]$, le nombre $p([a\ ;\ b]) = \int_a^b f(x)\, dx$.

B. La loi est uniforme sur $[a\ ;\ b]$ et sa densité associée est la constante $\frac{1}{b-a}$.

Pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$ on a : $p([c\ ;\ d]) = \frac{d-c}{b-a}$.

C. La loi exponentielle de paramètre λ dont la densité associée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (avec λ réel positif). On a :

- $p(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X > a) = e^{-\lambda a}$

C59 Vérifier l'adéquation à une loi équirépartie

▶ 1ʳᵉ étape. Calculer la somme des carrés des écarts entre la distribution de fréquences observées (f_i) et la loi de probabilité donnée par l'hypothèse de l'équiprobabilité (p_i) : $d^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_i - p_i)^2$.

▶ 2ᵉ étape. Si la valeur d^2 calculée est supérieure à la valeur du seuil imposé, on rejette l'hypothèse d'équiprobabilité. Sinon on dit que la distribution des fréquences est en accord avec la loi équirépartie, au seuil choisi.