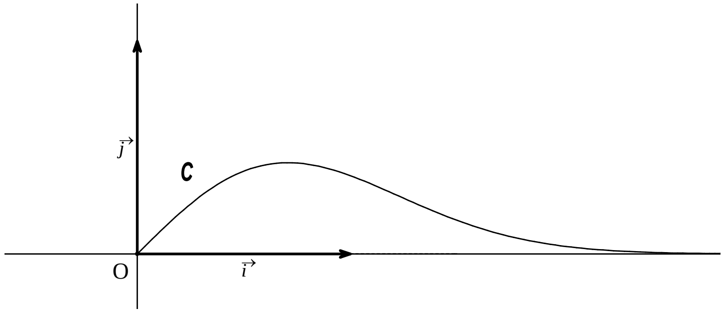
TS

Exercices de révision pour le bac

1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Déterminer par le calcul la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

2°) Démontrer que f admet un maximum sur $[0\ ;+\infty[$ et préciser sa valeur (valeur exacte).

3°) Soit a un réel positif ou nul. Exprimer, en unité d'aire et en fonction de a, l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Exprimer $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a.

Quelle est la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

2 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$u_0 = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

1°) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;1]$, on a : $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Indication : On pourra procéder par encadrements successifs.

b) En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$ (on ne cherchera pas à calculer u_0[*]).

2°) Calculer u_1.

3°) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4°) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

[*] On admettra en effet que ce calcul n'est pas possible car il n'est pas possible d'exprimer une primitive de f à l'aide des fonctions usuelles (résultat admis sans démonstration).

3 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

On note $\mathcal{C}$ et Γ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm ou 4 « gros carreaux » en abscisse et en ordonnée).

1°) Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$ (dérivées, variations, limites et interprétation graphique). Dresser son tableau de variation.

2°) En observant que $g(x) = f(-x)$ pour tout réel x, démontrer que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie que l'on déterminera.

3°) Tracer $\mathcal{C}$ et Γ.

4°) a) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit λ un réel strictement positif fixé. On considère l'ensemble $\mathcal{D}_\lambda$ des points $\mathrm{M}(x, y)$ du plan tels que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$ et on note $\mathcal{A}_\lambda$ son aire en unité d'aire.

Démontrer que $\mathcal{A}_\lambda = 2\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^\lambda}{2}\right) - \lambda$.

Colorier $\mathcal{D}_1$ sur le graphique. Donner une approximation décimale de l'aire de ce domaine en cm^2 à 10^{-2} près.

5°) **Question facultative :**

Démontrer que $\mathcal{C}$ et Γ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}$.

4

Partie A

1°) Étudier les variations de la fonction $u : x \mapsto 1 + x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ (sans les limites).

2°) En déduire que pour tout réel x, on a : $1 + x\mathrm{e}^x > 0$.

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°) Dresser le tableau de variation de f avec les limites.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale Δ en $+\infty$.

b) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y = -x$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ'.

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
$f(x)$										

Tracer $\mathcal{C}$, Δ et Δ'. On prendra un centimètre ou un « gros carreau » pour unité graphique.

$\boxed{5}$ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1$, $z_{\mathrm{B}} = 2+2\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 1-\mathrm{i}$.

1°) Faire une figure. On prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
On complètera cette figure au fur et à mesure.

2°) Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}}}$; en déduire la nature du triangle OBC.

3°) Calculer l'affixe du milieu I de [BC].

4°) Soit D l'image du point O par la rotation r de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe du point D.

5°) Quelle est la nature du quadrilatère OABD ?

$\boxed{6}$ On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère la transformation ponctuelle *f* qui, à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z^2 + 1$.

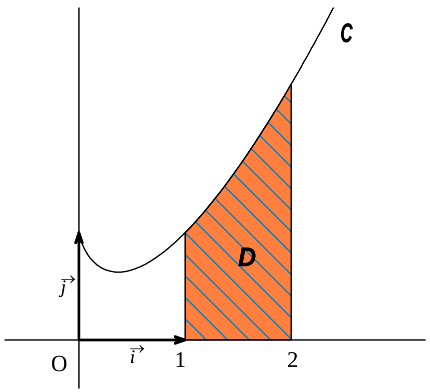
1°) Déterminer les antécédents du point O par *f*.
2°) Existe-t-il des points invariants par *f* ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.
3°) Démontrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

4°) Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par *f*, puis démontrer que les points O, A et A' sont alignés.

5°) Soit θ un nombre réel. On note N le point d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et N' son image par *f*.
a) Démontrer que N appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
b) Démontrer que l'on a : $|\,z'-1\,| = 1$. En déduire que, lorsque θ varie, le point N' reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{ON}'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.
Expliquer la construction du point N'.

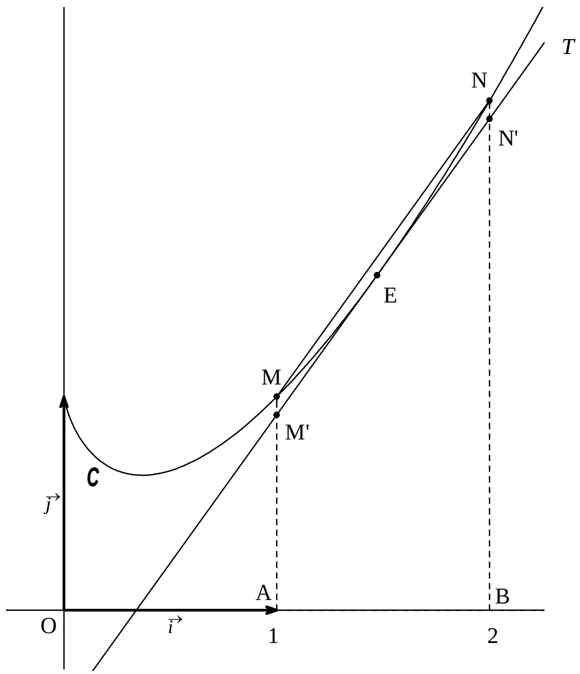
$\boxed{7}$ On considère sur le graphique suivant la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 + x\ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dans l'exercice, on s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.



Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.
On note M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et 2, A et B leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée ci-dessous.



1°)
a) Démontrer que *f* est positive sur [1 ; 2].

b) Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.
Démontrer que la tangente en E à $\mathcal{C}$ est parallèle à (MN).
c) On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point E. Déterminer une équation de T.
Dans toute la suite, on admettra que sur l'intervalle [1 ; 2], la courbe $\mathcal{C}$ reste au-dessus de T.
3°) Soit M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T.
On admettra que la courbe $\mathcal{C}$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle[1 ; 2] et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
a) Calculer les aires des trapèzes MNQP et $\mathrm{M}'\mathrm{N}'\mathrm{QP}$.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\dfrac{(b+B)\times h}{2}$ où *b*, *B* et *h* désignent respectivement la petite base, la grande base et la hauteur du trapèze.
b) En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

On considère la fonction F définie par $F(x) = x + \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$.

1°) Démontrer que la fonction F est une primitive de *f*.
2°) En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

8 Un supermarché organise une campagne publicitaire en offrant, à chaque client qui passe à la caisse, un ticket de jeu sur lequel il y a une grille de 28 cases.
Chaque grille contient 3 cases noires et 25 cases blanches réparties au hasard parmi les 28 cases ; la couleur de chaque case est cachée et il faut gratter la case pour la découvrir.
La règle du jeu est la suivante :
Chaque joueur gratte deux cases de la grille ;

- s'il découvre deux cases noires, il gagne un bon d'achat de 10 € ;
- s'il ne découvre qu'une seule case noire, il gagne un bon d'achat de 2 € ;
- sinon il ne gagne rien.

Les probabilités demandées seront données sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Faire un arbre de probabilités avec les événements suivants ci-dessous :

N_1 : « la première case grattée est noire » ;
N_2 : « la deuxième case grattée est noire » ;
B_1 : « la première case grattée est blanche » ;
B_2 : « la deuxième case grattée est blanche ».

2°) a) Un client gratte au hasard une première case. Quelle est la probabilité qu'il découvre une case blanche ?
b) Un client a découvert une case blanche en grattant la première case. Quelle est la probabilité qu'il découvre une case noire en grattant la seconde case ?

3°) Soit E l'événement « le client a gagné un bon d'achat de 10 € » et F l'événement « le client a gagné un bon d'achat de 2 € ».
Calculer la probabilité de E et de F.

9 Une urne contient 12 boules : 8 blanches et 4 noires.

1°) Un joueur tire successivement au hasard, avec remise, deux boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 5 €, mais à chaque boule noire, il perd 10 €.
On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur lors d'un tirage.

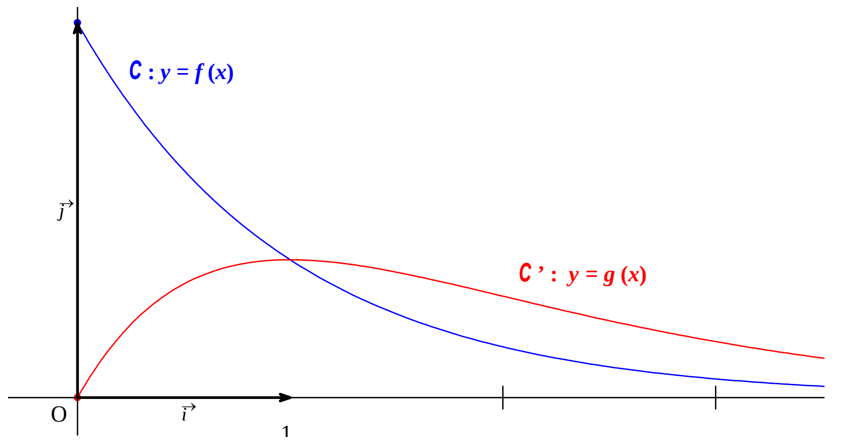
a) Faire un arbre de probabilités et déterminer la loi de probabilité de G (faire un tableau).
On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.
b) Le jeu est-il équitable ?

2°) Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si l'on effectue les tirages sans remise ?

3°) Calculer et comparer les écart-types de G dans les deux cas.

10 **Probabilités continues**

On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = xe^{-x}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Partie A

Calculer, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$ et $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(x)\,dx$.

Calculer leurs limites en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

Partie B

À la MIAF et à la FMG, mutuelles d'assurance bien connues, les durées de traitement d'un dossier de sinistre (exprimé en heures) ont été modélisées par les variables aléatoires X et Y dont les lois continues ont pour densités respectives les fonctions *f* et *g*.
Justifier que *f* et *g* sont bien des densités de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
Laquelle des deux lois peut-on reconnaître ?

Calculer pour chaque mutuelle, la probabilité qu'un dossier pris au hasard soit traité :

- en moins d'1 heure
- en plus de 2 heures
- en au moins une demi-journée (3 heures et demie)
- en 3 heures exactement
- en 1 heure et demie (à 5 minutes près).

Comparer ; quels commentaires peut-on faire ?

$\boxed{11}$ Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ et on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1°) **2 versions au choix :**

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$.

- Démontrer que la fonction $h : x \mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de f_1 ; calculer I_1.

2°) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
b) Étudier la monotonie de la suite (I_n).
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3°) Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $g(x)=\ln(1+x)-x$.
a) Étudier le sens de variation de g sur [0 ; + ∞[.
b) En déduire le signe de g sur [0 ; + ∞[. Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif ou nul, on a $\ln(1+x^n)\leqslant x^n$.
c) En déduire la limite de la suite (I_n).

$\boxed{12}$ **Probabilités**

1°) Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, P) tels que $P(\mathrm{A})=0{,}5$ et $P(\mathrm{B})=0{,}2$.

La probabilité de l'événement A ∪ B est égale à : ………………..

2°) Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux.
Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.
Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale.

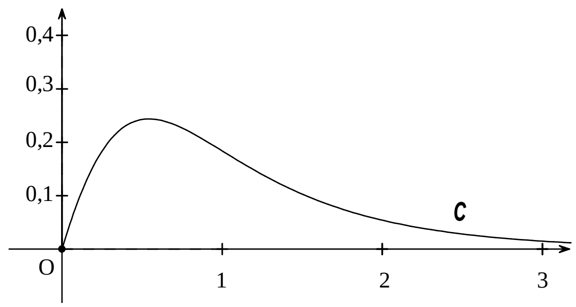
La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à : …………….

Dans les questions 3°) et 4°), on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

3°) La probabilité, arrondie au millième, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à : ……………..

4°) La probabilité, arrondie au millième, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :……………

$\boxed{13}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0 ; +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{e}^{-x}$.
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O.



On admet que l'on ne peut pas donner l'expression d'une primitive de f sur I.

1°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. On admet que $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite (OA) sur l'intervalle [0 ; 1].

a) Démontrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2°) a) Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f(x)\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

b) En déduire que pour tout réel a positif ou nul, on a : $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{2}$.

$\boxed{14}$ Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de pile lors d'un jet d'une pièce truquée est $\dfrac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de pile lors d'un jet de pièce équilibrée est de $\dfrac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1°) On prend une pièce au hasard, on la lance.
a) Calculer la probabilité d'obtenir pile.
b) Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu pile ?

2°) On prend une pièce truquée au hasard et on la lance 4 fois.
Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois pile ?
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

$\boxed{15}$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$.

2°) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].
En déduire que si $x\in[0\,;1]$, alors $f(x)\in[0\,;1]$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n-\ln\left(u_n{}^2+1\right)$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n\in[0\,;1]$.

2°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

$\boxed{16}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\int_0^1(1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n non nul.

1°) Calculer la valeur de u_1.

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3°) a) Démontrer que pour tout réel $t\in[0\,;1]$, on a : $0\leqslant(1-t)^n\,\mathrm{e}^t\leqslant(1-t)^n\,\mathrm{e}$.

b) En déduire un encadrement de u_n.

c) En déduire la limite de (u_n).

$\boxed{17}$ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\mathrm{A}=-2\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_\mathrm{C}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

1°) a) Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2°) a) Écrire le quotient $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3°) On note r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Calculer l'affixe (sous forme algébrique) du point O', image de O par r.

b) Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c) Tracer l'image Γ′ du cercle Γ par la rotation r.

d) Justifier que les cercles Γ et Γ′ se coupent en A et B.

4°) a) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z|=\left|z+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|$.

b) Démontrer que les points A et B appartiennent à E.

$\boxed{18}$ Pour se rendre au lycée, Frédéric a le choix entre deux itinéraires A et B. La probabilité qu'il choisisse l'itinéraire A est $\dfrac{1}{3}$. La probabilité qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire A est $\dfrac{2}{5}$; celle qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire B est $\dfrac{3}{10}$.

On note R l'événement : « Frédéric arrive en retard au lycée. »
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles sauf dans la question 4°).

1°) Quelle est la probabilité que Frédéric arrive à l'heure au lycée et qu'il ait choisi l'itinéraire A ».

2°) Quelle est la probabilité que Frédéric arrive à l'heure au lycée ?

3°) Sachant que Frédéric est arrivé à l'heure au lycée, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire B ?

4°) Chaque semaine, Frédéric se rend dans son lycée le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi et le vendredi.
Calculer la probabilité que Frédéric arrive au moins une fois en retard durant une semaine.
Donner la valeur arrondie au millième du résultat.

$\boxed{19}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=\dfrac{1}{2}(u_n+u_{n+1})$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

2°) On pose $v_n=u_{n+1}-u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3°) Écrire les unes en dessous des autres les égalités $v_p=u_{p+1}-u_p$ pour p allant de 0 à $n-1$.
En additionnant membre à membre toutes ces égalités, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4°) Déterminer la limite de (u_n).

$\boxed{20}$ Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note E_n l'événement : « Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange ».

Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $(n+1)$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième le feu est rouge ou orange, vaut $\dfrac{1}{20}$;
- la probabilité que le $(n+1)$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième le feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

1°) On suppose, tout d'abord, qu'Amélie ne rencontre que deux feux.

a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{E}_2)$ et $P_{\overline{\mathrm{E}_1}}(\mathrm{E}_2)$.

b) Construire un arbre pondéré pour décrire cette expérience aléatoire et calculer $P(\mathrm{E}_2)$.

2°) On se place maintenant dans le cas général.

a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$ et $P_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1})$.

b) Démontrer que, pour tout $n\geqslant 1$, on a : $p_{n+1}=\dfrac{1}{20}\,p_n+\dfrac{9}{20}q_n$.

c) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3°) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = 28p_n - 9$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite, si elle existe, de p_n quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

4°) On suppose que les feux s'allument indépendamment les uns des autres avec une probabilité d'être rouge ou orange égale à $\frac{1}{8}$.

Amélie rencontre 5 feux, quelle est la probabilité qu'elle rencontre au moins un feu vert ?

21 Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln x - kx^2 + 1$.

Partie A

1°) Déterminer la limite de la fonction f_k en 0^+.

2°) Déterminer la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

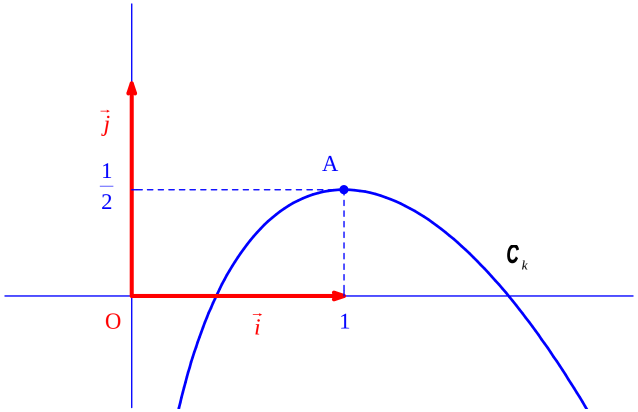
3°) Calculer $f'_k(x)$. Donner le résultat sous la forme d'un seul quotient.

4°) Dresser le tableau de variations de la fonction f_k (avec les limites). On rappelle que $k > 0$.

Calculer la valeur de l'extremum (ou des extremums) de la fonction f_k (en fonction de k).

Partie B

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_k$ représentative d'une fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $\text{A}\left(1\ ;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_k$.



1°) Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.

2°) Dans cette question, k a la valeur trouvée précédemment.

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_k$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

22 Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle : $10v'(t) + v(t) = 30$.

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1°) Exprimer $v(t)$ en fonction de t.

2°) a) Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

b) Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3°) On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.

Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4°) La distance d parcourue par ce cycliste entre deux instants t_1 et t_2 $(t_1 < t_2)$ est donnée par $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

23 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On considère deux points A et B distincts de O, d'affixes respectives a et b, tels que le triangle OAB soit rectangle direct en A.

Soit θ un nombre réel. On note A' et B' les images respectives de A et B par la rotation r de centre O et d'angle θ. On désigne par a' et b' les affixes respectives de A et B.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment [BB'] en son milieu.

1°) Exprimer a' en fonction de a et de θ ; exprimer b' en fonction de b et θ.

2°) Soit P le milieu de [AA'] et Q le milieu de [BB']. On désigne par p et q les affixes respectives de P et Q.

a) Exprimer p en fonction de a et de θ ; exprimer q en fonction de b et de θ.

b) Démontrer que l'on a : $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.

c) En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d) Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

24 Une urne contient 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Un joueur effectue plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire X suivant la loi :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(\text{X} \leqslant k) = \int_0^k 0{,}01\,\mathrm{e}^{-0{,}01x}\ \mathrm{d}x$.

On répondra aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

1°) Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(\text{X} \leqslant 50)$.

2°) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Corrigé

1 Étude d'une fonction, calcul d'une aire

$f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

1°) **Limite de *f* en + ∞**

On rencontre une forme indéterminée du type « 0 × ∞ ».

Pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x^2}_{X}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right)=+\infty \text{ (limite de référence, croissance comparée)}\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée :}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}\right)=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\underbrace{x^2}_{Y}}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{Y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{Y}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée : }\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit : }\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

2°) **Variations de *f***

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (règle sur les fonctions dérivables).

$$\forall x\in[0\,;+\infty[\quad \begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{e}^{-x^2}+x\times\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\\&=\mathrm{e}^{-x^2}\left(1+x\sqrt{2}\right)\left(1-x\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
SGN de e^{-x^2}		+		+	
SGN de $1+x\sqrt{2}$		+		+	
SGN de $1-x\sqrt{2}$		+	0	–	
SGN de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$	↘	0

f admet un maximum global sur $[0\,;+\infty[$ égal à $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

Dans le tableau de variation, on met uniquement 0 pour avoir un tableau de variation complet.

3°)

Une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ est la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

f est positive et continue sur $[0\,;+\infty[$ donc par restriction sur l'intervalle $[0\,;a]$.
Par conséquent l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0\,;a]$ est donnée par :

$$\mathcal{A}(a)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(0)=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0^2}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\mathrm{e}^{-a^2}}{2}$$

Limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers + ∞.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{a\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-a^2}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit : }\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}\right)=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme : }\lim_{a\to+\infty}\mathcal{A}(a)=\frac{1}{2}.$$

Ce résultat s'interprète aisément comme aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0\,;+\infty[$.

L'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0\,;+\infty[$ (domaine infinie) est égale à $\dfrac{1}{2}$ unité d'aire.

$\boxed{2}$ Étude d'une suite définie par une intégrale

Thème de l'exercice : intégrales et suites.

f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$

(u_n)

$$u_0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1°)

a) **Démontrons que, $\forall x\in[0\ ;\ 1]$: $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant 1$.**

1ère méthode : encadrements successifs

$0\leqslant x\leqslant 1$

$0\leqslant x^2\leqslant 1$

$-1\leqslant -x^2\leqslant 0$

$\mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\leqslant \mathrm{e}^0$

$\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant 1$

2e méthode : étude de fonction

On détermine le sens de variation de f sur [0, 1] (méthode : soit par dérivée, soit par composée de fonctions ; nous allons développer la méthode par calcul de dérivée).

f est dérivable sur [0, 1].

$\forall x\in[0\ ;\ 1]\quad f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$

x	0		1
SGN de $-2x$	0	$-$	
SGN de e^{-x^2}		$+$	
SGN de $f'(x)$	0	$-$	
Variations de f	1	$\searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$

Calculons $f(0)$ et $f(1)$.

$f(0)=1$

$f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$

b) **Déduisons-en que $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant u_0\leqslant 1$.**

$u_0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\forall\ x\in[0\ ;\ 1]\ \ \frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant 1$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 1\,\mathrm{d}x$ (« croissance de l'intégrale »)

Par suite, on a : $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1$

⚠ Il n'y a pas de primitive pour f (admis car non démontrable en Tale).
On ne peut pas calculer u_0.
On pourra par contre calculer u_1 car on connaît une primitive de la fonction $x\mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$.

c) **Calculons une valeur approchée de u_0.**

À l'aide de la calculatrice TI :

On utilise l'instruction fnInt(disponible dans le menu [MATH], choix N°9.
Voici sa syntaxe :
fnInt(fonction,variable,borne_inf,borne_sup)
-Fonction : soit on tape la fonction, soit on entre le nom de sa variable (Y1...Y0 [VARS] [-->] [1] sur 83, [2nd][VARS] [1] SUR 82)
- variable : toujours X
- borne inf : borne inférieure "de l'aire" (" à gauche")
- borne_sup : borne supérieure "de l'aire" ("à droite")

Grâce à la calculatrice, on trouve : $u_0=0{,}746824132...$

À l'aide de CASIO 35 + : OPTN $\rightarrow$ CALC $\rightarrow\int$ dx : $\int(f(x), a, b)$

2°) **Calculons u_1.**

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^1 x f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\ \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

3°)

a) **Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ u_n \geqslant 0$.**

En toute rigueur, il faudrait distinguer deux cas : $n=0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad x^n \geqslant 0$

$\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad f(x) > 0$ (car $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$)

Donc $\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad x^n f(x) \geqslant 0$

Par conséquent, comme les bornes sont dans le « bon » sens, par positivité de l'intégrale, on peut dire que $u_n \geqslant 0$.

b) **Étudions le sens de variation de la suite (u_n).**

$\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad x \leqslant 1$ donc en multipliant les deux membres de l'inégalité par $x^n \geqslant 0$, on obtient :
$\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad x^{n+1} \leqslant x^n$

D'où par « croissance l'intégrale », $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Par suite, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Comme cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n, on en conclut que la suite (u_n) est décroissante.

c) **Déduisons-en que la suite (u_n) est convergente.**

D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
Or toute suite décroissante et minorée converge donc la suite (u_n) converge (vers une limite positive ou nulle ; on ne sait pas encore que c'est 0 ; ce sera l'objet de la question 4°) de le démontrer).

4°)

a) **Démontrons que , pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.**

On ne fait pas de récurrence.

$\forall\, x \in [0\,;\,1]\quad \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$

$\times x^n \quad (x^n \geqslant 0)$

$\mathrm{e}^{-x^2} \times x^n \leqslant x^n$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x}_{\frac{1}{n+1}}$

b) **Déduisons-en la limite de la suite (u_n).**

$$\left.\begin{array}{l}
\forall n \in \mathbb{N}\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \\
0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème des gendarmes $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de u_0, u_1, u_2 … (u_0, u_2 … ne peuvent pas se calculer de manière exacte ; admis car ne se démontre pas).

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$; $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1°) **Étudions la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ (dérivées, variations, limites et interprétation graphique). Dressons son tableau de variation.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=-\dfrac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
SGN de $-e^{x}$	$-$
SGN de $\left(1+e^{x}\right)^2$	$+$
SGN de $f'(x)$	$-$
Variations de *f*	1 ↘ 0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{x}\right)^2=1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{x}\right)^2=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet les droites d'équations $y=0$ et $y=1$ pour asymptotes horizontales respectibement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x)=f(-x)$ donc Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

3°) **Traçons $\mathcal{C}$ et Γ.**

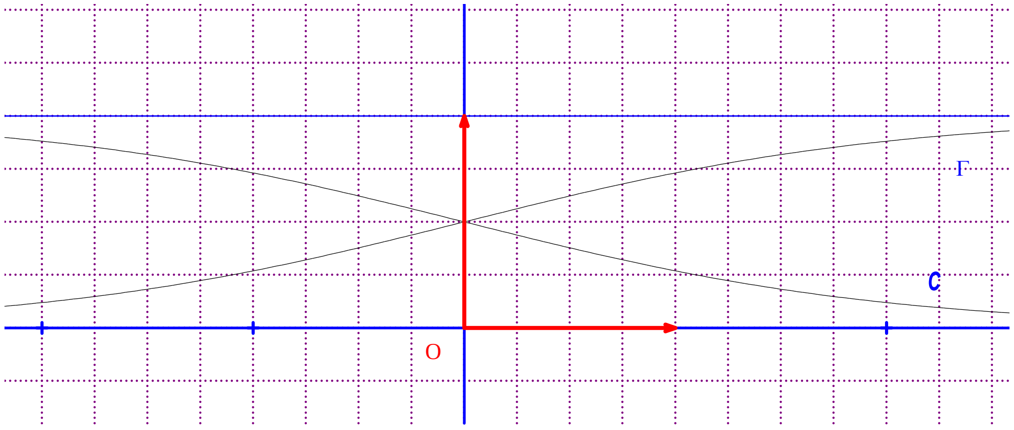
On trace les deux asymptotes.
On peut faire un tableau de valeurs (valeurs arrondies au centième pour toutes les valeurs, sauf pour l'image de 0).

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,95	0,88	0,73	0,5

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,27	0,12	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

La courbe $\mathcal{C}$ n'admet pas de tangente horizontale.

On pourrait démontrer qu'elle admet le point $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ pour centre de symétrie.



4°) a) **Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{\dfrac{1}{e^{x}}}{1+\dfrac{1}{e^{x}}}=\dfrac{1}{e^{x}+1}=f(x)$

Déduisons-en une primitive *F* de *f*.

On pose $u(x)=1+e^{-x}$.

On a donc : $f(x)=-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Par conséquent, une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *F* définie par $F(x)=-\ln\left|1+e^{-x}\right|$.

Comme la quantité $1+e^{-x}$ est toujours strictement positive, on peut écrire $F(x)=-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ (on transforme les barres de valeur absolue en parenthèses).

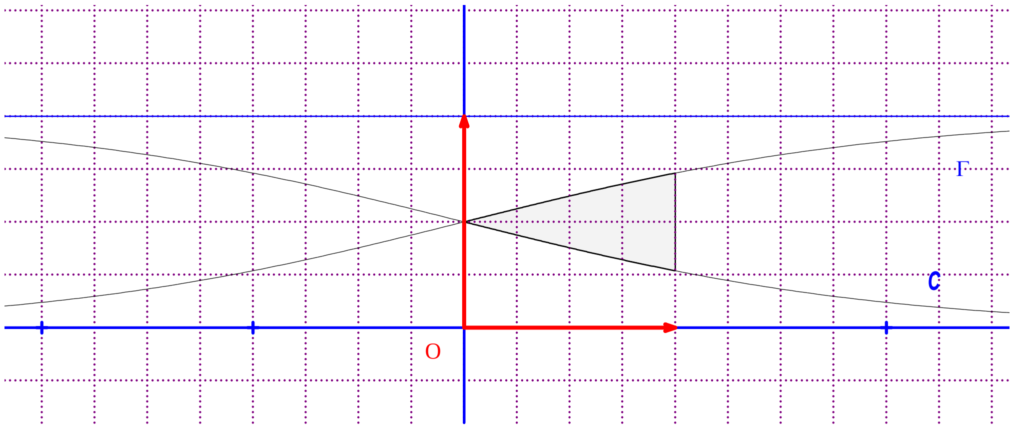
b) Soit λ un réel strictement positif fixé. On considère l'ensemble $\mathcal{D}_\lambda$ des points M(x, y) du plan tels que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$ et on note $\mathcal{A}_\lambda$ son aire en unité d'aire.

Démontrons que $\mathcal{A}_\lambda = 2\ln\left(\dfrac{1+e^\lambda}{2}\right) - \lambda$.

La courbe Γ est au-dessus de courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0 ; \lambda]$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\lambda &= \int_0^\lambda \left[g(x) - f(x)\right] \, dx \\
&= \int_0^\lambda \left(\frac{e^x}{1+e^x} - f(x)\right) \, dx \\
&= \left[\ln\left(1+e^x\right) + \ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^\lambda \\
&= \ln\left(1+e^\lambda\right) + \ln\left(1+e^{-\lambda}\right) - 2\ln 2 \\
&= \ln\left(1+e^\lambda\right) + \ln\left(\left(e^\lambda+1\right)e^{-\lambda}\right) - 2\ln 2 \\
&= \ln\left(1+e^\lambda\right) + \ln\left(e^\lambda+1\right) + \ln\left(e^{-\lambda}\right) - 2\ln 2 \\
&= 2\ln\left(1+e^\lambda\right) - \lambda - 2\ln 2 \\
&= 2\ln\left(\frac{1+e^\lambda}{2}\right) - \lambda
\end{aligned}$$

Colorions $\mathcal{D}_1$ sur le graphique. Donner une approximation décimale de l'aire de ce domaine en cm^2 à 10^{-2} près.



Le domaine $\mathcal{D}_1$ correspond au domaine $\mathcal{D}_\lambda$ pour $\lambda = 1$.

$\mathcal{A}_1 = 0{,}240\ 229013\ 9\ldots$

5°) **Démontrons que $\mathcal{C}$ et Γ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.**

Il n'y a pas de formule dans le cours pour ce type de question (il n'y a de formule que pour les symétries par rapport à une droite d'équation $x = a$ dans un repère orthogonal).
Cependant, une petite figure permet de voir qu'il s'agit de démontrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{f(x)+g(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$ ce qui se fait relativement simplement par le calcul.

1ère démarche :

$$f(x)+g(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{\left(1+e^{-x}\right)+\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^{-x}\right)} = \frac{2+e^{-x}+e^x}{1+e^{-x}+e^x+1} = \frac{2+e^{-x}+e^x}{2+e^{-x}+e^x} = 1$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{f(x)+g(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, $\mathcal{C}$ et Γ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

2e démarche :

$$f(x)+g(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1+e^x}{e^x+1} = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{f(x)+g(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

Partie A

1°) **Étudions les variations de la fonction $u : x \mapsto 1+x\mathrm{e}^{x}$ (sans les limites).**

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les fonctions dérivables).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 1\times \mathrm{e}^{x} + x \times \mathrm{e}^{x}$$
$$= \mathrm{e}^{x}(1+x)$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
SGN de e^{-x^2}		$+$		$+$	
SGN de $1+x$		$-$	0	$+$	
SGN de $u'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de u		$\searrow$	$1-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	

2°) **Déduisons-en que $\forall x \in \mathbb{R} \;\; 1+x\mathrm{e}^{x} > 0$.**

u est minorée par $1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Or $1-\frac{1}{\mathrm{e}} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+x\mathrm{e}^{x} > 0$.

Partie B

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x}+x}{\mathrm{e}^{x}-1}$$

1°) **Déterminons l'ensemble de définition de f.**

$f(x)$ existe si et seulement si $\mathrm{e}^{x}-1 \neq 0$

si et seulement si $\mathrm{e}^{x} \neq 1$

si et seulement si $x \neq 0$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^{*}$$

2°) **Dressons le tableau de variations de f avec les limites.**

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{x}-1)-(\mathrm{e}^{x}+x)\times \mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$$
$$= \frac{-1-x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$$
$$= -\frac{1+x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$$
$$= -\frac{u(x)}{(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}}$$

Il y a trois « valeurs » sur la première ligne.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $u(x)$		$+$		$+$	
SGN de $(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}$		$+$	0	$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^{+}} (\mathrm{e}^{x}+x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^{+}} (\mathrm{e}^{x}-1) = 0^{+} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^{-}} (\mathrm{e}^{x}+x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^{-}} (\mathrm{e}^{x}-1) = 0^{-} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x) = -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} (\mathrm{e}^{x}+x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (\mathrm{e}^{x}-1) = -1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=1 \quad \text{(en utilisant } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty \text{ qui est une limite de référence)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1\end{array}\right\} \text{donc par limite d'un}$$

quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) **Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale Δ en + ∞.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour asymptote horizontale en + ∞.

b) **Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y=-x$ pour asymptote oblique en – ∞.**

$\forall x\in \mathcal{D}_f \quad f(x)-(-x)=\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}$

$\forall x\in \mathcal{D}_f \quad f(x)-(-x)=\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+xe^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1\end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y=-x$ pour asymptote oblique en – ∞.

Étudions la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ'.

$$f(x)-(-x)=\frac{(x+1)e^x}{e^x-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
SGN de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de e^x		$+$		$+$		$+$	
SGN de e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
SGN		$+$	0	$-$	‖	$+$	

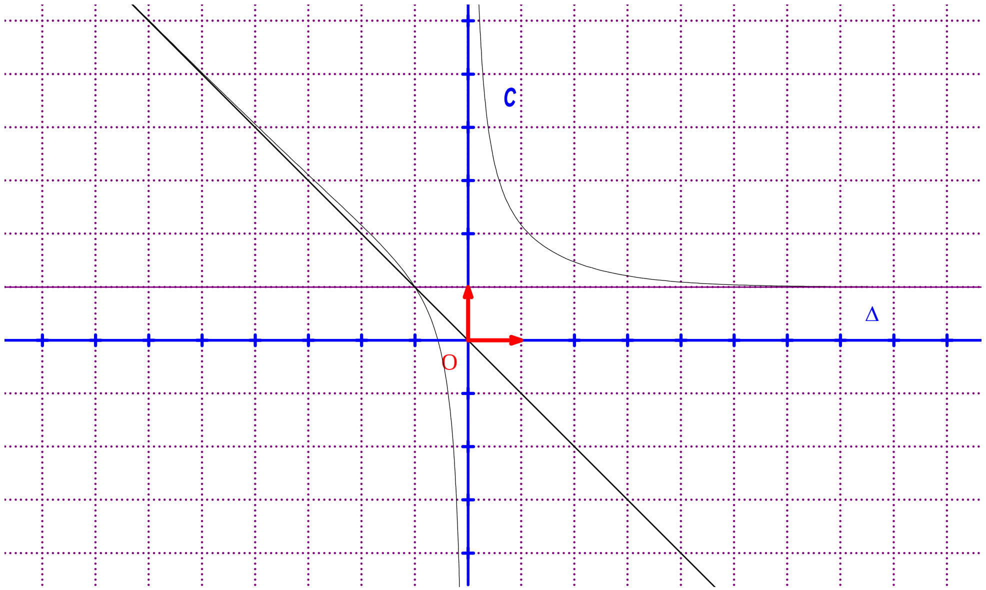
$\forall x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[\quad f(x)>-x$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus Δ' sur $\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

$\forall x\in\left]-1\,;0\right[\quad f(x)<-x$ donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus Δ' sur $\left]-1\,;0\right[$.

$\mathcal{C}$ et Δ' sont sécantes au point d'abscisse – 1.

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	1	2	3	4	5
$f(x)$	5,027	4,056	3,1048	2,1565	1	0,2164	1,4696	1,2096	1,0933	1,0407

Tracer $\mathcal{C}$, Δ et Δ'. On prendra un centimètre ou un « gros carreau » pour unité graphique.



$\boxed{5}$

$z_A = 1$ $z_B = 2+2i$ $z_C = 1-i$

1°) Faire une figure. On prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
On complètera cette figure au fur et à mesure.

2°) **Donnons l'écriture exponentielle du nombre complexe $\frac{z_B}{z_C}$; déduisons-en la nature du triangle OBC.**

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{2+2i}{1-i}$$

$$= \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+2i+2i+2i^2}{2}$$

$$= 2i$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Par conséquent, $\arg\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

On en déduit que le triangle OBC est rectangle en O.

3°) **Calculons l'affixe du milieu I de [BC].**

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2+2i+1-i}{2} = \frac{i+3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

4°) D : image du point O par la rotation *r* de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Calculons l'affixe du point D.

$$z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_C) + z_C$$

$$= -i\left(0 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= -i\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \frac{3}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= 1 + 2i$$

5°) **Déterminons la nature du quadrilatère OABD.**

$z_{\overrightarrow{OA}} = 1$ et $z_{\overrightarrow{DB}} = 1$

On constate que $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{DB}}$.

Par suite, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DB}$.

On en déduit que OADB est un parallélogramme.

$\boxed{6}$

f : application qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z^2 + 1$

1°) **Déterminons les antécédents du point O par *f*.**

Les affixes des antécédents du point O par *f* sont solutions de l'équation $z^2 + 1 = 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$

Les antécédents de O par *f* sont les points d'affixes i et – i.

2°) **Déterminons s'il existe des points invariants par f et précisons leurs affixes respectives.**

M est invariant par f $\Leftrightarrow$ $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{M}'=\mathrm{M}$

$\Leftrightarrow$ $z=z'$ (deux points sont confondus si et seulement si leurs affixes sont égales)

$\Leftrightarrow$ $z=z^2+1$

$\Leftrightarrow$ $z^2-z+1=0$

Considérons le polynôme z^2-z+1.

Son discriminant est égal à $\Delta=-3$.

On a $\Delta<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées : $z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

f admet deux points invariants : M_1 d'affixe $z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et M_2 d'affixe $z_2=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

3°)

• Démontrons que deux points symétriques par rapport à O ont la même image.

Soit M_1 et M_2 deux points symétriques par rapport à O d'affixes respectives z_1 et z_2.

On a $z_2=-z_1$.

D'une part,
$z'_1=(z_1)^2+1$.

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
z'_2&=(z_2)^2+1\\
&=(-z_1)^2+1\\
&=(-z_1)^2+1\\
&=(z_1)^2+1
\end{aligned}
$$

On a donc : $z'_2=z'_1$.
Par suite, M'_1 et M'_2 sont confondus.

• Démontrons que les images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Soit M_1 et M_2 deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses d'affixes respectives z_1 et z_2.

On a $z_2=\overline{z_1}$.

D'une part,
$z'_1=(z_1)^2+1$.

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
z'_2&=(z_2)^2+1\\
&=\left(\overline{z_1}\right)^2+1\\
&=\overline{(z_1)^2}+1\\
&=\overline{(z_1)^2+1}
\end{aligned}
$$

On a donc : $z'_2=\overline{z'_1}$.

Par suite, M'_1 et M'_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

4°) A $\left(z_{\mathrm{A}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)$

• Déterminons l'affixe de $\mathrm{A}'=f(\mathrm{A})$.

$$
\begin{aligned}
z_{\mathrm{A}'}&=(z_{\mathrm{A}})^2+1\\
&=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right]^2+1\\
&=\frac{2}{4}\times 2\mathrm{i}+1\\
&=\mathrm{i}+1
\end{aligned}
$$

• Démontrons que les points O, A et A' sont alignés.

On a :

$z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$

$z_{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}}=1+\mathrm{i}$

On constate que $z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}}$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ sont colinéaires.

Par suite, les points O, A et A' sont alignés.

5°) $\theta\in\mathbb{R}$

N : point d'affixe $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

a) **Démontrons que N appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.**

$\mathrm{ON} = \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right| = 1$ (c'est une propriété du cours : $\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$)

Donc N appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

b)

• **Démontrons que l'on a : | z' – 1 | = 1.**

On a : $z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 1$

Donc $\left| z' - 1 \right| = \left| \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 - 1 \right| = \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} \right| = 1$.

• **Déduisons-en que, lorsque θ varie, le point N' reste sur un cercle.**

On a : $\Omega\mathrm{N}' = 1$ où Ω est le point d'affixe 1.

Donc le point N' appartient au cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon 1.

c)

• **Vérifions que $\overrightarrow{\mathrm{ON}'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.**

$z_{\overrightarrow{\mathrm{ON}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$z_{\overrightarrow{\mathrm{ON}'}} = z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times 2\cos\theta = 2\cos\theta \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Donc on constate que $z_{\overrightarrow{\mathrm{ON}'}} = 2\cos\theta \times z_{\overrightarrow{\mathrm{ON}}}$.
Par suite, on a : $\overrightarrow{\mathrm{ON}'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

• **Déduisons-en que les points O, N et N' sont alignés.**

$\overrightarrow{\mathrm{ON}'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}'}$ sont colinéaires.

Par suite, les points O, N et N' sont alignés.

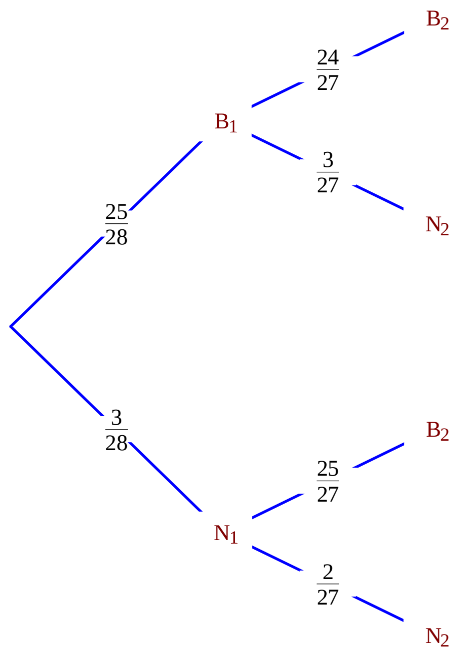
• **Expliquons la construction du point N'.**

$\boxed{8}$

1°) b) $\frac{1}{9}$ 2°) $P(\mathrm{F}) = \frac{25}{126}$

Solution :

1°) Faire un arbre de probabilités avec les événements suivants ci-dessous :
N_1 : « la première case grattée est noire » ;
N_2 : « la deuxième case grattée est noire » ;
B_1 : « la première case grattée est blanche » ;
B_2 : « la deuxième case grattée est blanche ».



2°)

a) **Un client gratte au hasard une première case.**
Quelle est la probabilité qu'il découvre une case blanche ?

Le client gratte au hasard une carte ; on est donc en situation d'équiprobabilité.

$P(\mathrm{N}_1) = \frac{\mathrm{card}\ \mathrm{N}_1}{\mathrm{card}\ \Omega} = \frac{3}{28}$

b) **Un client a découvert une case blanche en grattant la première case.**
Quelle est la probabilité qu'il découvre une case noire en grattant la seconde case ?

$P_{B_1}(N_2)=\dfrac{3}{27}$ (calcul par restriction de l'univers : $\dfrac{\text{card } N_2}{\text{card } \Omega_1}$)

3°) E : « le client a gagné un bon d'achat de 10 € »

F : « le client a gagné un bon d'achat de 2 € »

Calculons la probabilité de E et de F.

$$\begin{aligned}P(E)&=P(N_1\cap N_2)\\&=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\\&=\frac{3}{28}\times\frac{2}{27}\\&=\frac{1}{126}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(F)&=P(N_1\cap B_2)+P(B_1\cap N_2)\\&=P(N_1)\times P_{N_1}(B_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(N_2)\\&=\frac{3}{28}\times\frac{25}{27}+\frac{25}{28}\times\frac{3}{27}\\&=\frac{25}{126}\end{aligned}$$

9

1°) **Tirage avec remise.**

a)

N_1 : « la première boule tirée est noire » ;
N_2 : « la deuxième boule tirée est noire » ;
B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
B_2 : « la deuxième boule tirée est blanche ».

G : gain algébrique

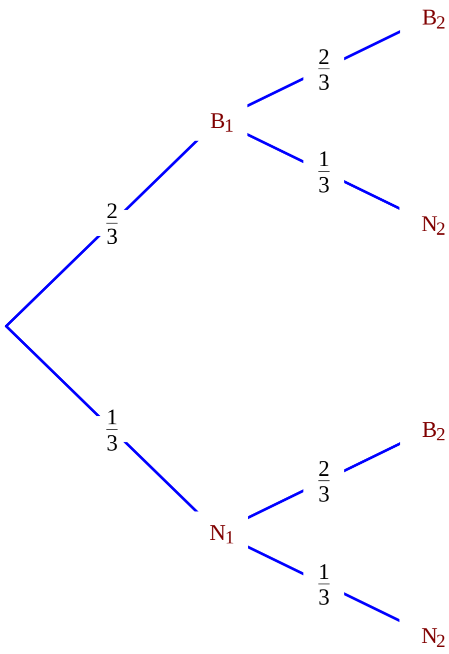
Déterminons la loi de probabilité de G.

Les valeurs possibles du gain G sont :

- $g_1=-20$ si le joueur tire deux boules noires ;
- $g_2=-5$ si le joueur tire deux boules de couleurs différentes ;
- $g_3=+10$ si le joueur tire deux boules blanches.

Les épreuves sont indépendantes.

On fait un arbre de probabilités.



$$\begin{aligned}P(G=10)&=P(B_1\cap B_2)\\&=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\\&=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(G=-5)&=P(B_1\cap N_2)+P(N_1\cap B_2)\\&=P(B_1)\times P_{B_1}(N_2)+P(N_1)\times P_{N_1}(B_2)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(G=-20)&=P(N_1\cap N_2)\\&=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

La loi de probabilité de G est donc :

$P(\text{G}=-20)=\dfrac{1}{9}$; $P(\text{G}=-5)=\dfrac{4}{9}$; $P(\text{G}=+10)=\dfrac{4}{9}$

g_i	-20	-5	10	Total
$P(\text{G}=g_i)$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	1

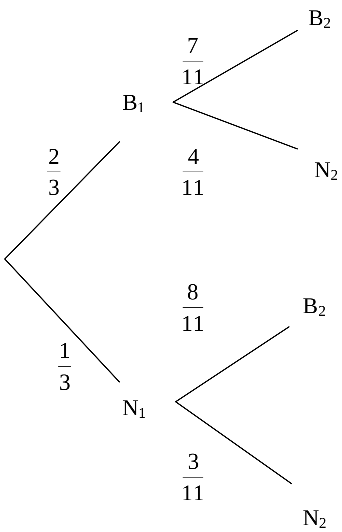
b) **Calculons l'espérance de G.**

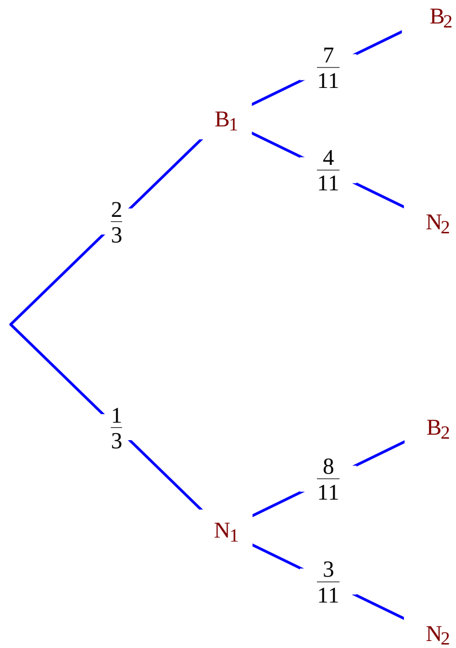
$$\begin{aligned}\text{E}(\text{G}) &= -20\times\frac{1}{9}-5\times\frac{4}{9}+10\times\frac{4}{9}\\ &= 0\end{aligned}$$

L'espérance de G est nulle : le jeu est équitable.

En effet, l'espérance de G est le gain moyen si on joue un très grand nombre de parties.

2°) **Tirage sans remise**





$$\begin{aligned}P(\text{G}=10) &= P(\text{B}_1\cap\text{B}_2)\\ &= P(\text{B}_1)\times P_{\text{B}_1}(\text{B}_2)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\\ &= \frac{14}{33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{G}=-5) &= P(\text{B}_1\cap\text{N}_2)+P(\text{N}_1\cap\text{B}_2)\\ &= P(\text{B}_1)\times P_{\text{B}_1}(\text{N}_2)+P(\text{N}_1)\times P_{\text{N}_1}(\text{B}_2)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{11}\\ &= \frac{16}{33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{G}=-20) &= P(\text{N}_1\cap\text{N}_2)\\ &= P(\text{N}_1)\times P_{\text{N}_1}(\text{N}_2)\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{11}\\ &= \frac{1}{11}\end{aligned}$$

$$P(\text{B}_1\cap\text{B}_2)=P(\text{B}_1)\times P_{\text{B}_1}(\text{B}_2)=\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$$

g_i	-20	-5	10	Total
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$	1

$$E(G) = -\frac{20}{11} - 5\times\frac{16}{33} + 10\times\frac{14}{33} = 0$$

On en déduit que le jeu est équitable.

3°) Avec remise : $V(G) = 100$ et $\sigma(G) = 10$

Sans remise : $V(G) = \frac{1000}{11}$ et $\sigma(G) = 9{,}53462589...$

Avec remise :

$$V(G) = \sum_{i=1}^{i=3} (g_i)^2 \times P(G = g_i) - [E(G)]^2$$
$$= 10^2 \times \frac{4}{9} + (-5)^2 \times \frac{4}{9} + (-20)^2 \times \frac{1}{9}$$
$$= 100$$

$$\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = 10$$

Sans remise :

$$V(G) = \sum_{i=1}^{i=3} (g_i)^2 \times P(G = g_i) - [E(G)]^2$$
$$= 10^2 \times \frac{14}{33} + (-5)^2 \times \frac{16}{33} + (-20)^2 \times \frac{3}{33}$$
$$= \frac{1000}{11}$$

$$\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = 10\sqrt{\frac{10}{11}}$$

L'écart-type de G est plus faible lorsqu'il y a remise que lorsqu'il n'y a pas remise.

$\boxed{10}$

Partie A

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$$

$G(t) = \int_0^t g(x)\ dx = \int_0^t x\,e^{-x}\ dx = 1 - e^{-t} - te^{-t} = 1 - (t+1)e^{-t}$ après une intégration par parties.

$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 1$

$F(t)$ est l'aire du domaine sous la courbe $\mathcal{C}$ limité par l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$ et

$\lim_{t\to+\infty} F(t)$ est l'aire du domaine "illimité" situé sous la courbe $\mathcal{C}$.

De même, $\lim_{t\to+\infty} G(t)$ est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}'$.

Partie B

1°) f et g sont des densités de probabilités car :

- f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

- f et g sont positives sur $\mathbb{R}^+$

- les aires sous leurs courbes sont égales à 1 ($\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\ dx = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(x)\ dx = 1$)

La densité de la seconde loi étant de la forme $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = 1$, on reconnaît la loi d'une durée de vie sans vieillissement (loi exponentielle) qui modélise – par exemple – la désintégration des noyaux d'une substance radioactive.

2°)

Probabilité qu'un dossier soit traité	à la MIAF	à la FMG
en moins d'une heure	$P(0 \le X < 1) = P([0\,;1[)$ $= P([0\,;1])$ $= F(1)$ $= 1 - \frac{1}{e}$ soit environ 0,63	$P(0 \le Y < 1) = P([0\,;1[)$ $= P([0\,;1])$ $= G(1)$ $= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e}$ $= 1 - \frac{2}{e}$ soit environ 0,26
en plus de 2 h	$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$ $= 1 - P([0\,;2])$ $= 1 - F(2)$ $= \frac{1}{e^2}$ soit environ 0,14	$P(Y > 2) = 1 - P(Y \le 2)$ $= 1 - P([0\,;2])$ $= 1 - G(2)$ $= \frac{3}{e^2}$ soit environ 0.41
en au moins une demi-journée	$P(X \geqslant 3{,}5) = 1 - P(X < 3{,}5)$ $= 1 - P([0\,;3{,}5])$ $= 1 - F(3{,}5)$ $= \frac{1}{e^{3.5}}$ soit environ 0,03	$P(Y \geqslant 3{,}5) = 1 - P(Y < 3{,}5)$ $= 1 - P([0\,;3{,}5])$ $= 1 - G(3{,}5)$ $= 4.5 \times \frac{1}{e^{3.5}}$ soit environ 0,14
en 3 heures	$P(X = 3) = 0$	$P(Y = 3) = 0$
en 1 h 30 à 5mn près	$P(\frac{17}{12} \le X \le \frac{19}{12}) = P([\frac{17}{12}\,;\frac{19}{12}])$ $= F(\frac{19}{12}) - F(\frac{17}{12})$ $= e^{-\frac{17}{12}} - e^{-\frac{19}{12}}$ soit environ 0,04	$P(\frac{17}{12} \le Y \le \frac{19}{12}) = P([\frac{17}{12}\,;\frac{19}{12}])$ $= G(\frac{19}{12}) - G(\frac{17}{12})$ $= \frac{29}{12} e^{-\frac{17}{12}} - \frac{31}{12} e^{-\frac{19}{12}}$ soit environ 0,06

On peut alors dire, par exemple, …

- qu'un dossier est traité en moins d'une heure, dans 63 % des cas à la MIAF et seulement dans 26 % des cas à la FMG
- qu'il y a environ 4 fois plus de chances qu'un dossier soit traité en au moins une demi-journée, à la FMG qu'à la MIAF
- que les chances de voir un dossier traité à la MIAF en moins d'une demi-journée sont d'environ 97 %.

3°) a) $P((X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$ si et seulement si $F(m) = 1 - F(m)$ soit $2F(m) = 1$ soit $m = \ln 2$; soit environ 0,69 h c'est-à-dire 41 min environ.
En faisant une analogie entre probabilité et statistique, m peut être considéré comme la médiane de la variable aléatoire X (il y a autant de chances que le dossier soit traité par la MIAF en moins de 41 min qu'en plus de 41 min).

11

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1°) **2 versions au choix :**

• À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0\,;1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

• Démontrer que la fonction $h : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de f_1 ; calculer I_1.

2°) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

b) Étudier la monotonie de la suite (I_n).

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3°) Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a) Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire le signe de g sur $[0\,;+\infty[$. Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif ou nul, on a $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$.

c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Solution :

f_n : fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1°) **Calculons I_1.**

• **Méthode par intégration par parties**

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \ln(1 + x^1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$$

$u(x)=\ln(1+x)$ $\quad u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$v'(x)=1$ $\quad v(x)=x$

$$I_1=\left[\ln(1+x)\times x\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\times x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\ln(1+1)\times 1-\ln(1+0)\times 0-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$=\ln 2-\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x$ (on utilise l'égalité suivante : pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$).

$$=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$=\ln 2-\left[1-\ln(1+1)-0+\ln(1+0)\right]$$

$$=\ln 2-(1-\ln 2+\ln 1)$$

$$=2\ln 2-1$$

• **Démontrons que la fonction $h : x\mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de f_1.**

Pour cela, on dérive la fonction h (c'est la seule méthode possible) ;

$$\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad h'(x)=1\times\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1$$

$$=f_1(x)$$

On en déduit que h est une primitive de f_1.

Calculons I_1.

À faire

2°)

a) **Démontrons que $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad 0\leqslant I_n\leqslant\ln 2$.**

Nous allons commencer par encadrer la fonction qui intervient dans l'intégrale, c'est-à-dire f_n.

Procédons par encadrements successifs.

On part de $0\leqslant x\leqslant 1$.

On a successivement :

$0\leqslant x^n\leqslant 1$

$1\leqslant x^n+1\leqslant 2$

$\ln 1\leqslant \ln\left(x^n+1\right)\leqslant \ln 2$

Donc $\forall\, x\in[0\,;1]\quad 0\leqslant\ln\left(x^n+1\right)\leqslant\ln 2$.

Par « croissance de l'intégrale » (conservation de l'ordre), on peut écrire :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\ln 2\,\mathrm{d}x.$$

$$0\times(1-0)\leqslant\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\leqslant\ln 2\times(1-0)$$

Donc $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\leqslant\ln 2$ (car l'intégrale d'une fonction constante est égale à la constante que multiplie la différence des bornes).

Donc $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\leqslant\ln 2$.

b) **Étudions la monotonie de la suite $\left(I_n\right)$.**

Soit x un réel tel que $0\leqslant x\leqslant 1$.

On a donc : $x^{n+1}\leqslant x^n$ (exemple : $0,5^2=0,25$ et $0,5^3=0,125$).

On a successivement :

$1+x^{n+1}\leqslant 1+x^n$

$\ln\left(1+x^{n+1}\right)\leqslant\ln\left(1+x^n\right)$

$\forall\, x\in[0\,;1]\quad 0\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$

Donc $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On a donc $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

c) **Déduisons-en que la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.**

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0.

Elle est donc convergente.

3°) $g(x)=\ln(1+x)-x$ définie sur $[0\,;+\infty[$

a) **Étudions le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.**

g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1$ (formule : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$)

$$=\frac{1-(1+x)}{1+x}$$
$$=-\frac{x}{1+x}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
SGN de $-x$	0 $\qquad$ $-$
SGN de $1+x$	$+$
SGN de $g'(x)$	0 $\qquad$ $-$
Variations de g	0 ↘

b)

• **Déduisons-en le signe de g sur $[0\,;+\infty[$.**

$$g(0)=\ln(1+x)-x$$
$$=\ln 1$$
$$=0$$

Or g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad g(x)\leqslant 0$.

• **Démontrons alors que $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad \ln\left(1+x^n\right)\leqslant x^n$.**

$\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad g(x)\leqslant 0$

$$\ln(1+x)-x\leqslant 0$$
$$\ln(1+x)\leqslant x$$

Donc : $\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad \ln\left(1+x^n\right)\leqslant x^n$ (n : entier naturel)

c) **Déduisons-en la limite de la suite (I_n).**

On a démontré que : $\forall\, x\in[0\,;+\infty[\quad \ln\left(1+x^n\right)\leqslant x^n$.

Donc par « croissance » de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

Par suite, $I_n\leqslant\left[\dfrac{x^n}{n+1}\right]_0^1$ soit $I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad 0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

12

1°)

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

Or A et B sont indépendants, on a : $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

D'où $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$

$$=0,5+0,2-(0,5\times 0,2)$$
$$=0,6$$

2°)

On définit les événements :

R : « le cahier a une reliure à spirales »

G : « le cahier a des grands carreaux ».

On a : $P(\mathrm{R/G})=\dfrac{2}{5}$

$$P(\mathrm{G})=\frac{3}{4}$$
$$P(\mathrm{R})=\frac{1}{2}$$

On a : $P(\mathrm{G/R})=\dfrac{P(\mathrm{R}\cap\mathrm{G})}{P(\mathrm{R})}$

Or $P(\mathrm{R}\cap\mathrm{G})=P(\mathrm{R/G})\times P(\mathrm{G})$

Donc $P(\mathrm{G/R})=\dfrac{P(\mathrm{R/G})\times P(\mathrm{G})}{P(\mathrm{R})}$

$$= \frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

Remarques :

• Il n'est pas possible de faire d'arbre au départ.

• On pourrait calculer d'abord séparément $P(\mathrm{R}\cap\mathrm{G})$ (qui vaut 0,3) avant de calculer $P(\mathrm{G}/\mathrm{R})$.

3°)

L'épreuve qui consiste à choisir un stylo au hasard est une épreuve de Bernoulli qui conduit

- soit à un succès S : « le stylo est vert » $\left(P(\mathrm{S}) = 0,25\right)$

- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « le stylo n'est pas vert » $\left(P(\overline{\mathrm{S}}) = 0,75\right)$

On répète cette épreuve trois fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à lissue des trois prélèvements.

X suit la loi binomiale **B**(3 ; 0,25).

$$P(\mathrm{X}\geqslant 1) = 1 - P(\mathrm{X}=0)$$
$$= 1 - \binom{3}{0}\times(0,25)^0\times(0,75)^3$$

$P(\mathrm{X}\geqslant 1)\approx 0,578$ (valeur arrondie au millième)

4°)

$$P(\mathrm{X}=2) = \binom{3}{2}\times(0,25)^2\times(0,75)^1$$

$P(\mathrm{X}=2)\approx 0,141$ (valeur arrondie au millième)

$\boxed{13}$

Solution rapide :

1°) a) On a $f(1) = \frac{1}{1^2+1}\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{A}\left(1\,;\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$.

De manière évidente, $\mathrm{H}(1\,;0)$.

Le triangle OAH est rectangle en H donc $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{OAH}} = \frac{\mathrm{OH}\times\mathrm{AH}}{2} = \frac{1\times\frac{1}{2\mathrm{e}}}{2} = \frac{1}{4\mathrm{e}}$ u.a.

b) Avec la calculatrice, on trouve $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}192329406...$.

On vérifie que le résultat obtenu avec la calculatrice que le résultat obtenu est bien cohérent avec la minoration du 1°) a).

Solution rédigée et détaillée :

1°) a) **Démontrons que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.**

$$f(1) = \frac{1}{1+1}\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

A est sur la courbe $\mathcal{C}$ ($\mathrm{A}\in\mathcal{C}$) donc $\mathrm{A}\left(1\,;\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$.

H(1 ; 0)

Graphiquement par comparaison d'aire, on a : $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{OAH}}$.

Or $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{OAH}} = \frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{AH}}{2} = \frac{1^2\times\frac{1}{2\mathrm{e}}}{2} = \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

Autre façon :

(OA) : $y = \frac{1}{2\mathrm{e}}x$

On sait que $\forall\, x\in\mathrm{I}\quad f(x)\geqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}x$.

Donc par croissance de l'intégrale, on a : $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{1}{2\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x$.

Or : $\int_0^1 \frac{1}{2\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4\mathrm{e}}\right]_0^1 = \frac{1}{4\mathrm{e}}$

Donc on a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

b) **Donnons une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec une calculatrice.**

On peut utiliser le moyen suivant sur calculatrice TI :
trace → seconde → calc → 7 → lower : 0 → upper : 1 → ON

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}1923...$

2°) a) **Démontrons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.**

On pose $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

$$\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x) - g(x) = \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$$
$$= \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \left(\frac{2x - (x^2+1)}{2(x^2+1)}\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \frac{2x - x^2 - 1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{e}^{-x}$$
$$= -\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\,\mathrm{e}^{-x}$$

Donc $\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x) - g(x) \leqslant 0$.

D'où $\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

b) **Déduisons-en que pour tout réel a positif ou nul, on a : $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{2}$.**

On a : $\forall\, x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$.

Donc $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right]_0^a$ soit $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^0}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2}$.

On en conclut : $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{2}$.

14

1°) On prend une pièce au hasard, on la lance.

a) **Calculons la probabilité d'obtenir pile.**

E : « la pièce est équilibrée »
A : « obtenir pile »

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{E}})$$
$$= P_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{E}) + P_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{A}) \times P(\overline{\mathrm{E}})$$
$$= \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{4}$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{5}{10}$$
$$= 0{,}5$$

b) **Calculons la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu pile.**

$$P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{E}}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{E}})}{P(\mathrm{A})}$$
$$= \frac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{10} \times 2$$
$$= \frac{3}{5}$$

2°) On prend une pièce truquée au hasard et on la lance 4 fois.

X : nombre de piles obtenus à l'issue des 4 lancers

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (4 ; 0,75).

Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois pile ?
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

P (« obtenir 4 fois pile ») = *P* (X = 4)

$$= \binom{4}{4} \times (0{,}75)^4 \times (0{,}25)^0$$

= 0,316 406 25

15

Partie A

$f : x \mapsto x - \ln(x^2+1)$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$ (1).**

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x\\ &\Leftrightarrow -\ln(x^2+1) = 0\\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \ln 1\\ &\Leftrightarrow x^2+1 = 1\\ &\Leftrightarrow x^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

2°)

• Étudions le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 1].

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$ (formule : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$)

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

x	0	1
SGN de $(x-1)^2$	+	0
SGN de x^2+1	+	
SGN de $f'(x)$	+	0
Variations de f	0 ↗	$1 - \ln 2$

$f(1) = 1 - \ln 2$

$f(0) = 0$

• Démontrons que si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

On n'a pas à le démontrer par le calcul. On le démontre par le sens de variation.

f est croissante sur [0 ; 1] donc

$\forall x \in [0 ; 1]$ $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \ln 2$

Or $1 - \ln 2 \leqslant 1$ (car $1 - \ln 2 = 0{,}30685281944\ldots$)

Donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On en déduit que $\forall x \in [0 ; 1]$ $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Partie B

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n{}^2+1) \end{cases}$$

1°) **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \in [0 ; 1]$.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n \in [0 ; 1]$ ».

Initialisation :

Vérifions que *P*(0) est vraie.
Par hypothèse, $u_0 = 1$ (définition de la suite) donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
D'où *P*(0) est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

On a : $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.

D'après la partie A, $0 \leqslant f\left(u_k\right) \leqslant 1$.

D'où $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$ (car $u_{k+1} = u_k - \ln\left({u_k}^2+1\right)$ d'où $u_{k+1} = f\left(u_k\right)$).

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2°) **Étudions le sens de variation de la suite (u_n).**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n - \ln\left({u_n}^2+1\right) - u_n$$
$$= -\ln\left({u_n}^2+1\right)$$

Or ${u_n}^2 \geqslant 0$ donc ${u_n}^2+1 \geqslant 1$ d'où $\ln\left({u_n}^2+1\right) \geqslant 0$ donc $-\ln\left({u_n}^2+1\right) \leqslant 0$

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

3°) **Démontrons que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et déterminons sa limite.**

La suite (u_n) est décroissante et minorée.
Par conséquent, elle converge.

Soit l sa limite.
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc l vérifie $f\left(l\right) = l$.
D'après la partie A, on peut dire que $l = 0$.
Donc on en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{17}$ **Nombres complexes et géométrie**

$z_A = -2i \qquad z_B = -\sqrt{3} + i \qquad z_C = \sqrt{3} + i$

On peut faire un graphique pour s'aider.

1°) a) **Écrivons z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.**

$$z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} z_B &= -\sqrt{3} + i \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \times \sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_C &= \sqrt{3} + i \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \times \sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Détail de la démarche :

$$z_A = -2i$$

Notons θ_1 un argument de z_1.

$|\, z_A \,| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

(calcul maladroit ; on doit être capable d'écrire tout de suite $|\, z_A \,| = 2$)

$$\begin{cases} 2\cos\theta_1 = 0 \\ 2\sin\theta_1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = 0 \\ \sin\theta_1 = -1 \end{cases}$$

D'où $\theta_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$$z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_B = -\sqrt{3} + i$$

Notons θ_2 un argument de z_1.

$|\, z_B \,| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2$

$$\begin{cases} 2\cos\theta_2 = -\sqrt{3} \\ 2\sin\theta_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $\theta_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$$z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C = \sqrt{3} + i$$

b) **Déduisons-en le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.**

D'après les formes exponentielles déterminées à la question précédente, $OA = OB = OC = 2$.

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle G de centre O et de rayon 2.

c) **Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.**

2°) a) **Écrivons le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.**

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$= \frac{\left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2}$$

$$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) **Déduisons-en la nature du triangle ABC.**

D'après la question précédente, $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Par suite, $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

On en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

3°) $r = R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$

a) **Calculons l'affixe de $O' = r(O)$.**

$$z_{O'} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_O - z_A\right) + z_A$$

$$= 2i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2i$$

$$= i - \sqrt{3} - 2i$$

$$= -\sqrt{3} - i$$

b) **Démontrons que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.**

On a : $\dfrac{z_C + z_{O'}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{2} = 0 = z_O$.

On en déduit que O est le milieu du segment $[O'C]$ et on peut donc affirmer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c) **Traçons l'image Γ′ du cercle Γ par la rotation *r*.**

Γ' est le cercle de centre O' et de rayon 2.

d) **Justifions que les cercles Γ et Γ′ se coupent en A et B.**

$$O'A = \left|z_A - z_{O'}\right| = \left|-2i + \sqrt{3} + i\right| = \left|\sqrt{3} - i\right| = 2$$

Donc $A \in \Gamma'$.

De plus, $A \in \Gamma$.

On en déduit que Γ et Γ′ se coupent en A.

$$O'B = \left|z_B - z_{O'}\right| = \left|-\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i\right| = \left|2i\right| = 2$$

Donc $B \in \Gamma$ et $B \in \Gamma'$.

On en déduit que Γ et Γ′ se coupent en A et B.

4°)

a) **Déterminons l'ensemble *E* des points M d'affixe *z* tels que $|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|$.**

On doit interpréter de manière géoémtrique les modules.
Pour cela, on utilise les points introduits précédemment dans l'énoncé.

On évite à tout prix de repasser à la forme algébrique de l'affixe (c'est-à-dire que l'on ne pose pas $z = x + iy$).
Si on le faisait, cela conduit à beaucoup de calculs.

Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe *z*.

$$M \in E \Leftrightarrow |z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 0| = \left|z - \left(-\sqrt{3} - i\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|z - z_O\right| = \left|z - z_{O'}\right|$$

$$\Leftrightarrow OM = O'M$$

E est donc la médiatrice du segment $[OO']$.

b) **Démontrons que les points A et B appartiennent à *E*.**

D'après la question 1°) c), on sait que $\text{OA} = \text{OB} = 2$.

D'après la question 3°) d), on sait que A et B appartiennent à Γ' donc $\text{O'A} = \text{O'B} = 2$.

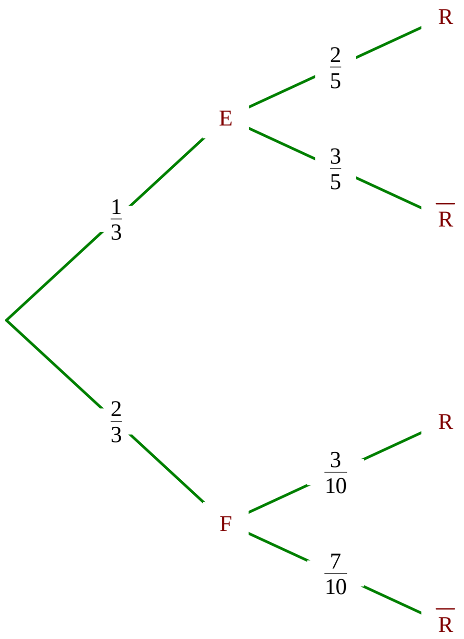
On a donc : $\text{OA} = \text{O'A}$ et $\text{OB} = \text{O'B}$ donc A et B sont équidistants de O et O'.

Or si in point est équidisant de deux points distincts, alors il est situé sur la médiatrice du segment joignant ces deux points.

Par conséquent, les points A et B appartiennent à la médiatrice de $[\text{OO}']$ c'est-à-dire à E.

On utilise les questions précédentes de manière à répondre dans effectuer de nouveau calcul.

$\boxed{\textbf{18}}$ **Probabilités conditionnelles**



E : « Frédéric emprunte le chemin A »

F : « Frédéric emprunte le chemin B »

R : « Frédéric arrive en retard au lycée »

$P(\text{E}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{R/E}) = \frac{2}{5}$

$P(\text{R/F}) = \frac{3}{10}$

1°)

$$\begin{aligned} P\left(\overline{\text{R}} \cap \text{E}\right) &= P(\text{E}) \times P\left(\overline{\text{R}}/\text{E}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2°)

E et F constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{\text{R}}\right) &= P\left(\overline{\text{R}} \cap \text{E}\right) + P\left(\overline{\text{R}} \cap \text{F}\right) \\ &= P(\text{E}) \times P\left(\overline{\text{R}}/\text{E}\right) + P(\text{F}) \times P\left(\overline{\text{R}}/\text{F}\right) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{7}{15} \\ &= \frac{3+7}{15} \\ &= \frac{10}{15} \\ &= \frac{2 \times 5}{3 \times 5} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3°)

$$P\left(\text{F}/\overline{\text{R}}\right) = \frac{P\left(\overline{\text{R}} \cap \text{F}\right)}{P\left(\overline{\text{R}}\right)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{7}{5 \times \cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{7}{10}$$

19 Étude d'une suite récurrente d'ordre 2

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \end{cases}$$

1°) **Calculons les cinq premiers termes de la suite.**

$u_2 = u_{0+2}$ $= \frac{1}{2}(0+1)$ $= \frac{1}{2}(u_0+u_1)$ $= \frac{1}{2}\times 1$ $=1$	$u_3 = \frac{1}{2}(u_1+u_2)$ $= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$ $= \frac{3}{4}$	$u_4 = \frac{1}{2}(u_2+u_3)$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$ $= \frac{1}{2}\times\frac{5}{4}$ $= \frac{5}{8}$	$u_5 = \frac{1}{2}(u_3+u_4)$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right)$ $= \frac{1}{2}\times\frac{11}{8}$ $= \frac{11}{16}$

2°) $v_n = u_{n+1} - u_n$

Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \\ &= -\frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

Exprimons v_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $v_0 = u_1 - u_0$
$= 1 - 1$
$= 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°)

Écrivons les unes en dessous des autres les égalités $v_p = u_{p+1} - u_p$ pour p allant de 0 à $n-1$ et déterminons l'expression de u_n en fonction de *n*.

$v_0 = u_1 - u_0$
$v_1 = u_2 - u_1$
$v_2 = u_3 - u_2$

….

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = u_n - u_0$ (addition membre à membre)

La somme de gauche peut se calculer grâce à la formule sommatoire de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$v_0 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = u_n - 0$$

D'où $u_n = \dfrac{1 \times \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

4°) **Déterminer la limite de (u_n).**

On reprend l'expression de u_n déterminée à l'expression précédente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = 0$

Par limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

20

1°) On suppose, tout d'abord, qu'Amélie ne rencontre que deux feux.

a) Déterminer $P_{E_1}(E_2)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2)$.

b) Construire un arbre pondéré pour décrire cette expérience aléatoire et calculer $P(E_2)$.

2°) On se place maintenant dans le cas général.

a) Donnons les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20}$$

$$P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{9}{20}$$

b) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$.**

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(E_{n+1})\\
&= P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \overline{E_n})\\
&= P_{E_n}(E_{n+1}) \times P(E_n) + P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times P(\overline{E_n})\\
&= \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n
\end{aligned}$$

c) **Déduisons-en l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.**

On a : $q_n = 1 - p_n$

Donc

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}(1-p_n)\\
&= \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}(1-p_n)\\
&= -\frac{8}{20}p_n + \frac{9}{20}\\
&= -\frac{2}{5}p_n + \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

3°) $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad u_n = 28p_n - 9$

a) **Démontrons que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison**.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 28p_{n+1} - 9\\
&= 28 \times \left(-\frac{2}{5}p_n + \frac{9}{20}\right) - 9\\
&= -\frac{2 \times 28}{5}p_n + \frac{9 \times 7}{5} - 9\\
&= -\frac{56}{5}p_n + \frac{18}{5}\\
&= -\frac{2}{5}(28p_n - 9)\\
&= -\frac{2}{5}u_n
\end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{5}$.

b) **Exprimons u_n, puis p_n en fonction de n.**

u_n en fonction de n :

$$u_n = u_1 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= 28p_1 - 9\\
&= 28 \times \frac{1}{8} - 9\\
&= \frac{7}{2} - 9\\
&= -\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

p_n en fonction de n :

$$28p_n = u_n + 9$$

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{u_n + 9}{28}\\
&= \frac{-\frac{11}{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 9}{28}\\
&= -\frac{11}{56} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{28}
\end{aligned}$$

c) **Déterminons la limite, si elle existe, de p_n quand n tend vers + ∞.**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}=0 \quad \text{car } -1<-\frac{2}{5}<1$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n=\frac{9}{28}$.

Interprétation de ce résultat :

4°) On suppose que les feux s'allument indépendamment les uns des autres avec une probabilité d'être rouge ou orange égale à $\frac{1}{8}$.

Amélie rencontre 5 feux, quelle est la probabilité qu'elle rencontre au moins un feu vert ?

On note X le nombre de feux verts rencontrés.

X suit la loi binomiale **B** (5 ; $\frac{7}{8}$).

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X}\geqslant 1) &= 1-P(\mathrm{X}=0)\\ &=1-\binom{5}{0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^0\times\left(\frac{1}{8}\right)^5\\ &=1-\left(\frac{1}{8}\right)^5\\ &=\frac{32\,767}{32\,768}\end{aligned}$$

$P(\mathrm{X}\geqslant 1)\approx 0{,}99$

$\boxed{21}$ **Étude d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre**

$f_k : x \mapsto \ln x - kx^2+1$ définie sur]0 ; +∞[

Partie A

1°) **Déterminer la limite de la fonction f_k en 0^+.**

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty\\&\lim_{x\to0^+}\left(-kx^2+1\right)=1\end{aligned}\right\} \text{donc par limite d'une somme } \lim_{x\to0^+} f_k(x)=-\infty.$$

2°) **Déterminons la limite de la fonction f_k en + ∞.**

On est en présence d'une forme indéterminée ; on effectue donc une réécriture.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f_k(x)=\left(\frac{\ln x}{x}-k\right)x^2+1$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (limite de référence).

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-k\right)=-k\\&\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty\end{aligned}\right\} \text{donc par limite d'un produit } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-k\right)x^2=-\infty.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_k(x)=-\infty$

3°) **Calculons $f'_k(x)$.**

$$\begin{aligned}\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[\qquad f'_k(x)&=\frac{1}{x}-2kx\\&=\frac{1-2kx^2}{x}\\&=\frac{\left(1-x\sqrt{2k}\right)\left(1+x\sqrt{2k}\right)}{x}\end{aligned}$$

4°) **Dressons le tableau de variations de la fonction f_k.**

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
SGN de $1-x\sqrt{2k}$		$+$	0	$-$	
SGN de $1+x\sqrt{2k}$		$+$		$+$	
SGN de x	0	$+$		$+$	
SGN de $f_k'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f_k	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	↘	$-\infty$

Calculons la valeur du maximum de f_k.

$$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2k}}-k\times\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)^2+1$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{2k}}-k\times\frac{1}{2k}+1$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2}+1$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(2k)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1-\ln(2k)}{2}$$

Partie B

1°) **Déterminons la valeur du nombre réel k correspondant à la courbe $\mathcal{C}_k$ tracée sur le graphique.**

1ère méthode :

$$\mathrm{A}\in\mathcal{C}_k \Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln 1-k\times1^2+1=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

2e méthode : moins bonne, car rien ne nous permet d'affirmer avec exactitude ce qui va suivre

D'après la courbe donnée, la fonction f_k admet un maximum global pour $x=1$.

D'après la partie A, on a donc $\dfrac{1}{\sqrt{2k}}=1$ d'où $\dfrac{1}{2k}=1$ soit $k=\dfrac{1}{2}$

2°) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\ \mathrm{d}x=\frac{\ln 2-1}{2}$

On utilise une intégration par parties ou une primitive de la fonction ln si on en connaît une $x\ln x-x$.

3°) Calculons, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_k$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=1$.

Question supplémentaire possible :

Démontrer que pour tout réel $k>0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

22

$10v'(t)+v(t)=30$ (E)

1°) **Exprimons *v*(*t*) en fonction de *t*.**

$$(\text{E}) \Leftrightarrow v'(t)=\frac{30-v(t)}{10}$$

$$\Leftrightarrow v'(t)=3-\frac{1}{10}v(t)$$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=-\frac{1}{10}$ et b = 3.

On en déduit que $v(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}+30$ ($k \in \mathbb{R}$).

Or $v(0)=0$ d'après l'énoncé donc $k\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\times 0}+30=0$ soit $k+30=0$ d'où k = – 30.

On en déduit que $v(t)=30\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}\right)$.

2°) a) **Déterminons le sens de variation de la fonction *v* sur l'intervalle [0 ; + ∞[.**

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[\quad v'(t)=3\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}$

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[\quad v'(t)>0$

Donc la fonction *v* est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

b) **Déterminons la limite de la fonction *v* en + ∞.**

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=30$

3°) On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.

$$v'(t)<0{,}1 \Leftrightarrow 3\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}<0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}<\frac{0{,}1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}<\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}\right)<\ln\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{10}t<\ln\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{10}t<-\ln 30$$

$$\Leftrightarrow t>10\ln 30$$

La plus petite valeur de *t* à la seconde près à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée est 35.

4°) **Calculons la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.**

$$d=\int_0^{35} v(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^{35} 30\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}\right)\ \mathrm{d}t=\left[30\left(t+10\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}\right)\right]_0^{35}$$

24

$$P(\mathrm{X}\leqslant k)=\int_0^k 0{,}01\ \mathrm{e}^{-0{,}01x}\ \mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}01x}\right]_0^k=1-\mathrm{e}^{-0{,}01k}$$

1°) $P(\mathrm{X}\leqslant 50)=1-\mathrm{e}^{-0{,}01\times 50}=1-\mathrm{e}^{-0{,}5}$

Avec la calculatrice, on trouve $P(\mathrm{X}\leqslant 50)\approx 0{,}39$

2°) $P(\mathrm{X}\leqslant 60\ /\ \mathrm{X}>50)=\dfrac{P(50<\mathrm{X}\leq 60)}{P(\mathrm{X}>50)}$

3. $P(Z\leqslant k)=\int_0^k 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}01x}\right]_0^k$ donc $P(Z\leqslant k)=1-\mathrm{e}^{-0{,}01k}$.

a. $P(Z\leqslant 50)=1-\mathrm{e}^{-0{,}01\times 50}=1-\mathrm{e}^{-0{,}5}$ donc $P(Z\leqslant 50)\approx 0{,}39$.

b. $P(Z\leqslant 60/Z>50)=\dfrac{P(50<Z\leqslant 60)}{P(Z>50)}$.

$P(50<Z\leqslant 60)=\int_{50}^{60} 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}01x}\right]_{50}^{60}=\mathrm{e}^{-0{,}5}-\mathrm{e}^{-0{,}6}$.

$P(Z\leqslant 50)=1-\mathrm{e}^{-0{,}5}$ donc $P(Z>50)=1-P(Z\leqslant 50)=\mathrm{e}^{-0{,}5}$, donc

$P(Z\leqslant 60/Z>50)=\dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}5}-\mathrm{e}^{-0{,}6}}{\mathrm{e}^{-0{,}5}}=1-\mathrm{e}^{-0{,}1}$.