TS

Probabilités conditionnelles

Plan du chapitre :

I. Exemples introductifs

II. Définition et conséquences immédiates

III. Probabilités totales

IV. Événements indépendants

V. Retour sur la notion de système complet d'événements

VI. Quelques aspects des probabilités conditionnelles

I. Exemples introductifs

1°) Exemple 1

On considère un jeu de 32 cartes.
On rappelle qu'il y a huit hauteurs (7, 8, 9, 10, V, D, R, As) et 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique).
On tire une carte au hasard.

• Probabilité de tirer une figure sachant que la carte est un cœur :

.

$$\boxed{P(\text{B/A}) = \frac{3}{8}}$$

A : « tirer un cœur »
B : « tirer une figure »
(Il y a 8 cœurs parmi lesquels 3 sont des figures.)

• Probabilité de tirer un coeur sachant que la carte est une figure :

$$\boxed{P(\text{A/B}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$$

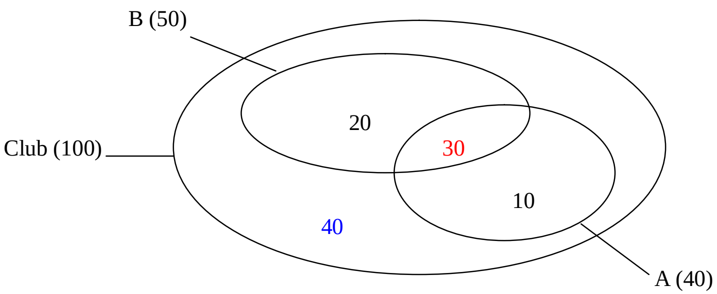
(Il y a 12 figures parmi lesquels 3 sont des cœurs.)

2°) Exemple 2

Dans un club de sport qui compte 100 adhérents,
- 40 font de l'athlétisme ;
- 50 font du basket ;
- 30 font les 2.

On choisit un adhérent au hasard (il y a donc **équiprobabilité**).

A : « l'adhérent fait de l'athlétisme »
B : « l'adhérent fait du basket »



N.B. : Il y a 40 adhérents qui ne font ni athlétisme ni basket.

• Calculs de probabilités simples

$P(\mathrm{A}) = \dfrac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 0{,}4$

$P(\mathrm{B}) = \dfrac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 0{,}5$

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 0{,}3$

• Calculs de probabilités conditionnelles

Probabilité de choisir un adhérent qui fait du basket sachant qu'il fait de l'athlétisme :

$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{3\cancel{0}}{4\cancel{0}} = \dfrac{3}{4}$ (on sait que l'adhérent fait de l'athlétisme et on cherche la probabilité qu'il fasse aussi du basket)

Probabilité de choisir un adhérent qui fait de l'athlétisme sachant qu'il fait du basket :

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{3\cancel{0}}{5\cancel{0}} = \dfrac{3}{5}$

• Lien entre probabilités conditionnelles et probabilités simples

$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$

Bien faire la distinction entre le « sachant que » et le « et ».

II. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition

P est une probabilité sur un univers Ω.
A et B sont deux événements tels que $P(\mathrm{A}) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle de B sachant A** est donnée par la formule $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$.

2°) Autre notation (au programme)

On peut noter $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ au lieu de $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$.
Plutôt que de lire « probabilité de B sachant A », on devrait plutôt lire « probabilité de B conditionné par A ».

3°) Interprétation

$P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que B soit réalisé sachant que A est réalisé.

Démonstration :

• D'une part, on a : $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \geqslant 0$ par définition d'une probabilité conditionnelle.
• D'autre part, on a : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et par conséquent $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leqslant P(\mathrm{A})$ ce qui donne immédiatement en divisant les deux membres de cette inégalité par $P(\mathrm{A})$ qui est strictement positif, on obtient : $\dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \leqslant 1$ soit $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \leqslant 1$.

4°) Mise en garde

• **Attention à l'ordre :** $P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \neq P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$

$$\underset{\dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}}{\downarrow} \qquad \underset{\dfrac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}}{\downarrow}$$

• **A/B et B/A ne sont pas des événements** (ce qui explique que la notation $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ soit meilleure).

5°) Formule des probabilités composées

A et B sont deux événements quelconques.

• Si $P(\mathrm{A}) \neq 0$, alors $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$
• Si $P(\mathrm{B}) \neq 0$, alors $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$

Démonstration :

$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$ donc $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$.

6°) Calcul pratique de $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$

Deux méthodes :

- soit par l'intuition (exemples 1 et 2 du **I**)
- soit par la définition $\dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$

Dans certaines situations, il n'y a pas de calcul à faire, il s'agit juste retraduction de l'énoncé (cf. **VI. 2°**).

Plusieurs aspects du « sachant que » :

• Le **« sachant que »** peut traduire :
- un lien de causalité ;
- une relation du type « parmi … ».

• Nous y reviendrons dans le paragraphe **VI. 2°)** lors du décryptage d'énoncés (traduction de données en probabilités conditionnelles).

III. Probabilités totales

1°) Exemple

∗ Données

Un atelier fabrique des pièces à l'aide de deux machines.

Hypothèse 1 $\begin{cases} 60\ \%\text{ de la production sort de la } 1^{\text{ère}}\text{ machine} \\ 40\ \%\text{ de la production sort de la } 2^{\text{e}}\text{ machine} \end{cases}$

On constate que :

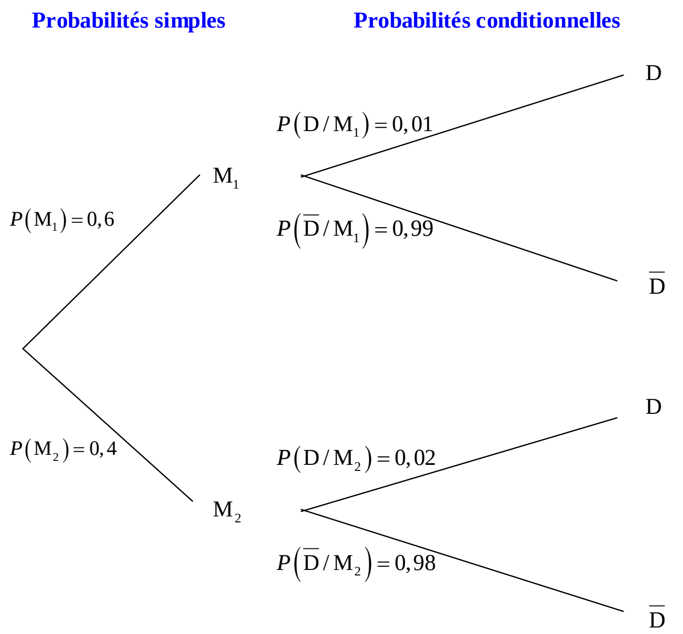
Hypothèse 2 $\begin{cases} 1\ \%\text{ des pièces provenant de la } 1^{\text{ère}}\text{ machine sont défectueuses} \\ 2\ \%\text{ des pièces provenant de la } 2^{\text{e}}\text{ machine sont défectueuses} \end{cases}$

∗ Expérience et événements considérés

On choisit une pièce au hasard (loi d'équiprobabilité).

M_1 : « la pièce provient de la $1^{\text{ère}}$ machine »
M_2 : « la pièce provient de la 2^{e} machine »
D : « la pièce est défectueuse »

∗ Arbre de probabilité



N.B. : La 2^{e} partie est indépendante de la $1^{\text{ère}}$.

On observera que la somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1 (« Loi des nœuds »).

∗ Calculs de probabilités

• **Probabilité que la pièce soit défectueuse <u>et</u> sorte de la $1^{\text{ère}}$ machine :**

$$\begin{aligned} P(D\cap M_1) &= P(M_1)\times P(D/M_1) \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\ &= 0,6\times 0,01 \\ &= 0,006 \end{aligned}$$

(Cette règle de multiplication s'appelle la **« loi des chemins »**).

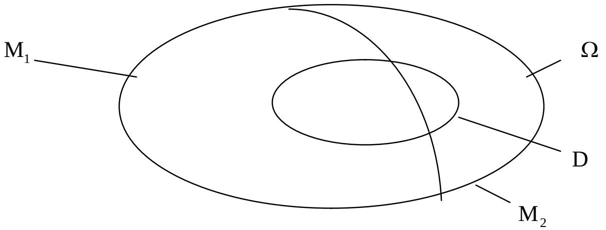
• **Probabilité que la pièce soit défectueuse <u>et</u> sorte de la 2^{e} machine :**

$$\begin{aligned} P(D\cap M_2) &= P(M_2)\times P(D/M_2) \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\ &= 0,4\times 0,02 \\ &= 0,008 \end{aligned}$$

• **Probabilité que la pièce soit défectueuse (toutes machines confondues) :**

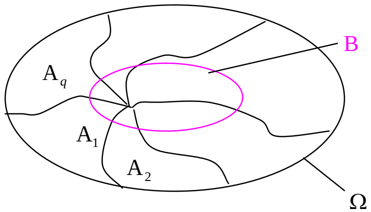
M_1 et M_2 constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales (voir le 3°)) :

$$\begin{aligned} P(D) &= P\left(D \cap (M_1 \cup M_2)\right) \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) \\ &= 0{,}006 + 0{,}008 \\ &= 0{,}014 \end{aligned}$$



2°) Définition

On dit que des événements A_1, A_2… A_q forment un **système complet d'événements** lorsqu'ils vérifient les 2 conditions suivantes :
• Leur réunion est égale à Ω ;
• Ils sont deux à deux incompatibles.



3°) Formules des probabilités totales

Si A_1, A_2… A_q forment un système complet d'événements de Ω, alors pour tout événement B de Ω on a :
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_q)$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=q} P(B \cap A_i)$$

4°) Cas particulier

Si $\forall i \in \{1, \ldots, q\}$ $P(A_i) \neq 0$, la formule des probabilités totales s'écrit :
$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + \ldots + P(A_q) \times P(B/A_q)$.

5°) Application pratique

L'application de la formule des probabilités totales est facilitée en pratique par l'utilisation d'arbres de probabilités comme dans l'exemple donné au 1°).

Nous avions dit en 1ère S que nous abandonnions les arbres de probabilité pour le chapitre sur le schéma de Bernoulli (2). Nous allons les reprendre néanmoins dans ce chapitre car ils sont extrêmement pratiques.

IV. Événements indépendants

1°) Définition

P est une probabilité sur un univers Ω.
On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour *P*** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

2°) Autre écriture

• Lorsque $P(A) \neq 0$, la condition d'indépendance s'écrit $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ soit $P(B/A) = P(B)$.

• Lorsque $P(B) \neq 0$, la condition d'indépendance s'écrit $P(A/B) = P(A)$.

N.B. : C'est l'un des rares cas où l'on écrira qu'une probabilité simple est égale à une probabilité conditionnelle.

3°) Interprétation

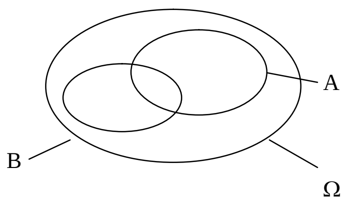
A et B sont indépendants au sens des probabilités signifie que la réalisation de l'un des événements A ou B n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'autre.

4°) Exemple d'événements indépendants

On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes.
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
A : « tirer un roi » ;
B : « tirer un pique ».

A et B sont-ils indépendants pour *P* ?

On ne peut pas le deviner : il faut faire le calcul.



(schéma qui ne sert pas à grand-chose dans la situation présente)

$P(\mathrm{A})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$P(\mathrm{B})=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{32}$

$P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

On a donc : $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

D'où A et B sont indépendants pour *P*.

N.B. : Le résultat reste valable pour un jeu de 52 cartes.

5°) Événements non indépendants

Il s'agit de deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

Exemple d'événements non indépendants : voir exercices.

6°) Exemples d'exercices

• On considère deux événements indépendants A et B. On donne $P(\mathrm{A})$ et P (B).
On demande $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

• On considère deux événements indépendants A et B. On donne $P(\mathrm{A})$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.
On demande $P(\mathrm{B})$.

• On demande de démontrer que deux événements sont ou ne sont pas indépendants pour une probabilité *P*.

7°) Mise en garde

Il n'est pas possible de dire ce que sont « concrètement » des événements indépendance. La notion d'indépendance de deux événements pour une probabilité *P* est une propriété de calcul.

« **Indépendants** » ne veut pas dire « **incompatibles** » ($\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$, indépendant de la probabilité).

Se méfier de l'intuition.

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$ vrai que pour des <u>événements indépendants</u>.

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ <u>toujours vrai.</u>

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$ vrai que pour des <u>événements incompatibles</u> ($\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$).

A et B sont des événements non indépendants signifie $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\neq P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

On notera que si A et B sont des événements indépendants, alors $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ peut se calculer en fonction de $P(\mathrm{A})$ et $P(\mathrm{B})$:

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$$

8°) Indépendance et événements contraires

• Propriété

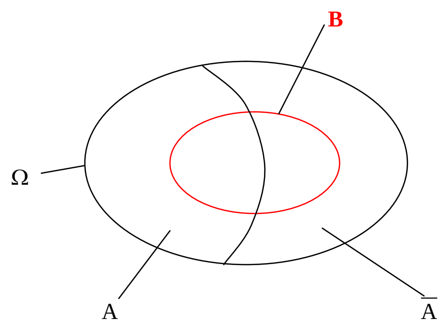
Si deux événements A et B sont indépendants, alors : ① $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants ; ② A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants ; ③ $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

• Démonstration

① On sait que A et B sont indépendants pour *P*.

Le but est de démontrer que $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants pour *P*.

A et $\overline{\mathrm{A}}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$.



Par suite, on a :

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}\cap B\right) &= P(B)-P(A\cap B) \quad \text{(formule des probabilités totales)}\\
&= P(B)-P(A)\times P(B) \quad \text{(indépendance des événements A et B)}\\
&= P(B)\left(1-P(A)\right)\\
&= P(B)\times P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}
$$

Donc les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Autre démonstration possible en supposant que $P(B)\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}/B\right) &= 1-P(A/B)\\
&= 1-P(A) \qquad \text{(car les événements A et B sont indépendants donc } P(A/B)=P(A)\text{)}\\
&= P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}
$$

Donc les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

② On applique le résultat du ① en échangeant les rôles de A et B.

③ On applique le résultat du ① : $\overline{A}$ et B sont indépendants puis on applique le résultat du ② : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Pour ② et ③, On fait une démonstration sans calcul.

On a démontré que « A et B indépendants » entraînent « $\overline{A}$ et B indépendants ».
Par voie de conséquence, en faisant jouer à A le rôle de B, $\overline{B}$ et A sont indépendants.
Donc $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants.

V. Retour sur la notion de système complet d'événements

1°) Qu'appelle-t-on système complet d'événements ?

« Il s'agit d'événements non vides (différents de l'événement impossible) qui englobent la totalité des cas. »

Traduction mathématique :

On dit que des événements A, B, C… forment un **système complet d'événements** (SCE) lorsque :
- ils sont tous non vides (aucun n'est l'événement impossible) ;
- ils sont deux à deux disjoints (ils n'ont aucun résultat en commun) ;
- leur réunion est égale à l'univers Ω.

2°) Exemple

Une urne contient 5 boules rouges, 2 boules bleues et 3 boules jaunes.
On tire une boule au hasard dans l'urne.

Les événements

A : « tirer une boule rouge » ;
B : « tirer une boule bleue » ;
C : « tirer une boule jaune »

forment un système complet d'événements.

3°) Autre exemple : un événement et son contraire

On considère une urne contenant 8 boules blanches et 3 boules noires.

Les événements A : « obtenir une boule blanche » et B : « obtenir une boule noire » sont deux événements contraires ($B=\overline{A}$) qui forment un système complet d'événements.

4°) Remarque

Cette année, la plupart du temps, nous n'aurons que des SCE formés de 2 ou 3 événements.

VI. Quelques aspects des probabilités conditionnelles

1°) Exemple 1

On lance un dé cubique non truqué. On obtient un numéro pair.
Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le numéro 6 ?

On peut reformuler cela en probabilité conditionnelle.
La probabilité d'obtenir le numéro 6 **sachant que** l'on a obtenu un numéro pair est égale à $\frac{1}{3}$.

2°) Exemple 2

Il s'agit du cas d'une population partagée en sous-populations.

Une étude statistique faite dans une région a montré que 53 % des personnes pratiquant un sport sont des hommes, parmi lesquels 31 % sont adhérents à un club sportif, et que parmi les femmes pratiquant un sport, 22 % sont adhérentes à un club sportif.

On rencontre au hasard une personne de la région pratiquant un sport.
On désigne par H l'événement « La personne est un homme »,
par F l'événement « La personne est une femme »,
par A l'événement « La personne est adhérente à un club sportif ».

Traduire les données en termes de probabilités.

On a :

$P(\mathrm{H}) = 0,53$

$P(\mathrm{A/H}) = 0,31$

$P(\mathrm{A/F}) = 0,22$

3°) Mise en garde

Attention : une partie du chapitre consiste à faire la différence entre le « sachant » et le « et », qui n'apparaissent pas toujours dans le langage courant.

Dans l'exercice sur les pièces défectueuses, la probabilité que la pièce soit défectueuse est égale à :

- la probabilité que la pièce soit défectueuse et sorte de la $1^{\text{ère}}$ machine
+
- la probabilité que la pièce soit défectueuse et sorte de la 2^{e} machine

Solution fausse :

La probabilité que la pièce soit défectueuse est égale à :

- la probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle sort de la $1^{\text{ère}}$ machine
+
- la probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle sort de la 2^{e} machine.

D'une manière générale, on ne peut pas additionner deux probabilités conditionnelles (la somme de deux probabilités conditionnelles n'est pas égale à une probabilité simple).