1$^{\text{ère}}$ S

Les angles orientés (2)

Plan du chapitre :

I. Mesure principale d'un angle orienté

II. Le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct

III. Images sur le cercle trigonométrique des valeurs remarquables

IV. Déplacements sur le cercle trigonométrique ; pratique du cercle trigonométrique

V. Orientation d'une figure (angles orientés et configurations)

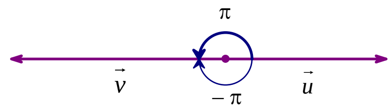
Dans tout le chapitre, le plan est orienté.

I. Mesure principale d'un angle orienté

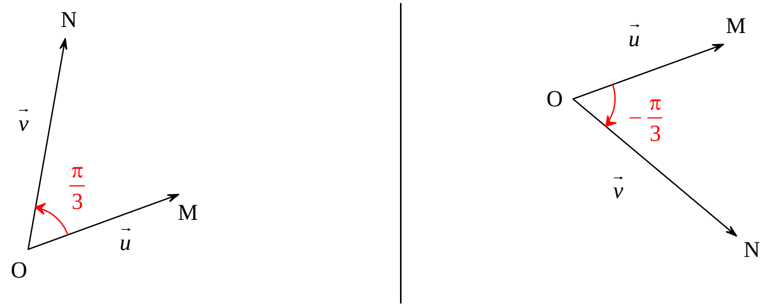
1°) Définition

La **mesure principale** en radians d'un angle orienté de vecteur est la mesure en radians de l'angle orienté comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

On exclut $-\pi$ de l'intervalle afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la définition de la mesure principale d'un angle plat (la mesure d'un angle plat est π).



2°) Interprétation



On considère trois points O, M, N tels que $O \neq M$ et $O \neq N$.

On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{MON}$.

- Lorsque $\theta = 0$, la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est 0.

- Lorsque $\theta = \pi$, la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est π.

- Lorsque $0 < \theta < \pi$, la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est égale à θ affecté d'un signe + ou – déterminé en imaginant une demi-droite [Ot) qui se déplace dans le secteur angulaire [$\widehat{MON}$] en passant de la position [OM) à la position [ON).
On regarde le sens du déplacement de cette demi-droite.

Si le déplacement s'effectue dans le sens positif, on met le signe +.
La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est égale à + θ.

Si le déplacement s'effectue dans le sens négatif, on met le signe –.
La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est égale à – θ.

Dans les deux cas, la valeur absolue de la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est égale θ.

De manière simple, on peut dire que la mesure principale en radians correspond à l'angle saillant.

Sur les figures, on fera le plus souvent apparaître les mesures principales en radians des angles orientés (mesures les plus parlantes) en utilisant le codage adéquat.

3°) Méthode pratique pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté

• Exemple 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{25\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.
On encadre 25 (au numérateur) par deux multiples entiers de 4 (dénominateur).
$4\times 6<25<4\times 7$

On va utiliser 4 × 6 car 6 est pair pour décomposer 25.

$$\begin{aligned}\frac{25\pi}{4}&=\frac{\pi+24\pi}{4}\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{24\pi}{4}\\&=\frac{\pi}{4}+6\pi\\&=\frac{\pi}{4}+3\times 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]\\ 3\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

• Exemple 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{11\pi}{3}$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On encadre 11 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$3\times 3<11<3\times 4$

On va utiliser 3 × 4 car 4 est pair pour décomposer 11.

$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{3}&=\frac{12\pi-\pi}{3}\\&=2\times 2\pi-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]\\ 2\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

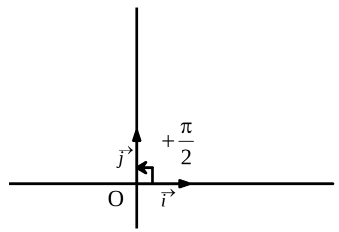
II. Le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct

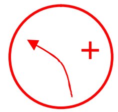
1°) Définition d'un repère orthonormé direct

On dit qu'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **orthonormé direct** pour exprimer qu'il vérifie les 2 conditions :

C_1 : $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ (pour l'unité de longueur choisie)
On dit que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **normés** ou **unitaires**.

C_2 : $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un angle droit direct)



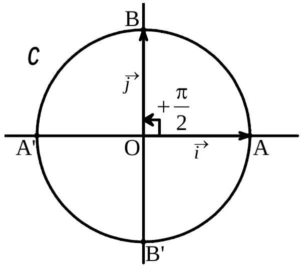


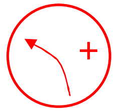
On dit qu'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan est **orthonormé indirect** pour exprimer qu'il vérifie les 2 conditions :

$\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ et $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ (l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un angle droit indirect).

2°) Définition du cercle trigonométrique attaché au repère

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.





$\mathrm{A}(1\,;0)$ $\quad$ $\mathrm{B}(0\,;1)$ $\quad$ $\mathrm{A'}(-1\,;0)$ $\quad$ $\mathrm{B'}(0\,;-1)$

Dans la suite du cours, nous allons apprendre à :

- repérer un point sur le cercle trigonométrique ;

- tourner sur le cercle trigonométrique.

3°) Définition de l'image d'un réel *x* sur le cercle trigonométrique

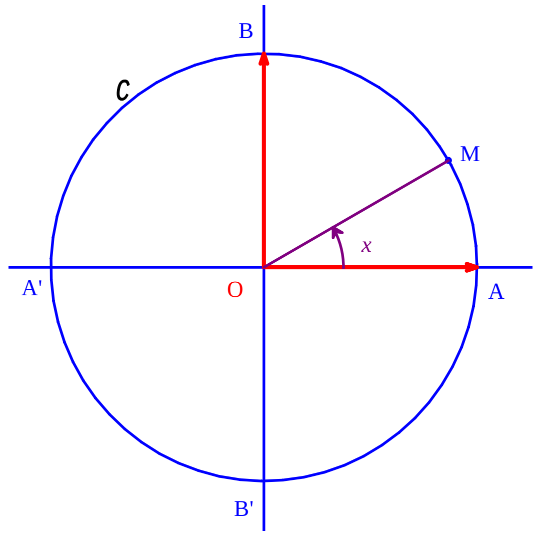
• Pour tout réel x, il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

• On dit que M est **l'image** de x sur le cercle trigonométrique.

M est l'image de x sur le cercle trigonométrique signifie que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=x$.

On a donc une application : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{C} \\ x \mapsto \mathrm{M}(x) \end{array}$.

On retiendra que l'on prend le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ pour premier vecteur de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ (on prend $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ pour « vecteur de base »).



4°) Exemples

• A est l'image de 0 sur le cercle trigonométrique car $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$.

• B est l'image de $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique car $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

• A' est l'image de π (et de $-\pi$) sur le cercle trigonométrique car $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)=\pi$.

• B' est l'image de $-\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique car $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

On retiendra que les angles orientés ont tous le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ comme premier vecteur.

5°) Condition nécessaire et suffisante pour que deux réels aient la même image sur le cercle trigonométrique

Deux réels x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x-y$ est un multiple entier de 2π (c'est-à-dire $x-y=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$).

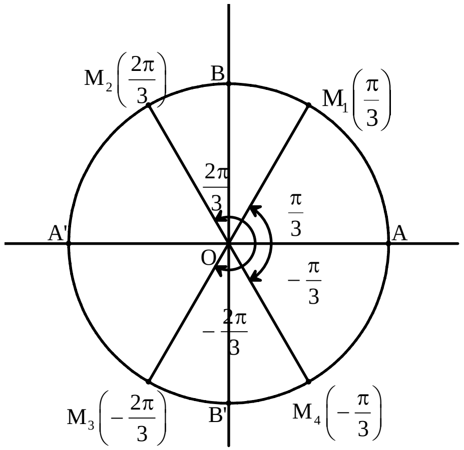
Cette condition peut aussi s'écrire $x=y+2k\pi$.

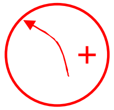
Autre formulation :

Soit x et y deux réels.
On note M et N leurs images sur le cercle trigonométrique.
M et N sont confondus si et seulement si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

III. Images sur le cercle trigonométrique des valeurs remarquables

1°) Images de $\frac{\pi}{3}$ et valeurs associées





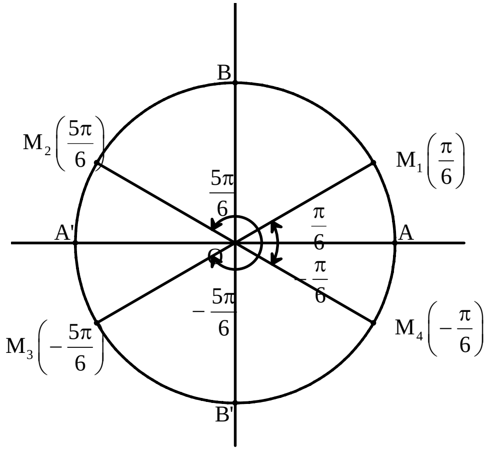
$\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$ = l'un des angles d'un triangle équilatéral

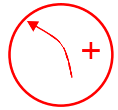
Pour commencer, on met la pointe sèche du compas en A et on prend un écart de longueur 1 = rayon du cercle trigonométrique.
On garde cet écart de compas. On reporte au compas (principe de construction d'une rosace ou d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle).

Le triangle OAM_1 est un triangle dont les 3 côtés ont pour longueur 1 (1-1-1 à marquer sur les segments).
On en déduit que c'est un triangle équilatéral (triangle équilatéral de côté 1).

On peut également s'intéresser aux déplacements sur le cercle trigonométrique associés à ces valeurs en partant du point A dans un sens ou dans l'autre.

2°) Images de $\frac{\pi}{6}$ et valeurs associées



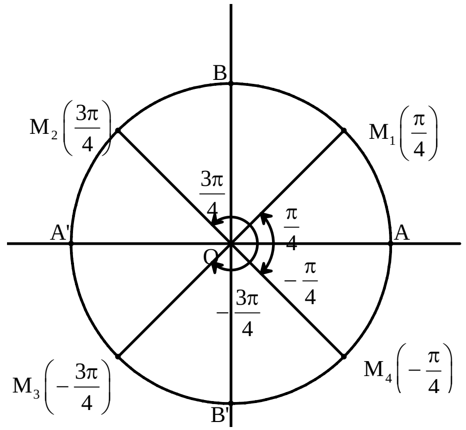


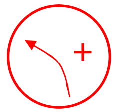
$\frac{\pi}{6}$ rad $= 30° =$ l'un des angles d'un demi-triangle équilatéral

$= 90° - 30° =$ complémentaire de l'un des angles d'un demi-triangle équilatéral

Pour commencer, on met la pointe sèche du compas en B.
On reporte le rayon au compas.

3°) Images de $\frac{\pi}{4}$ et valeurs associées





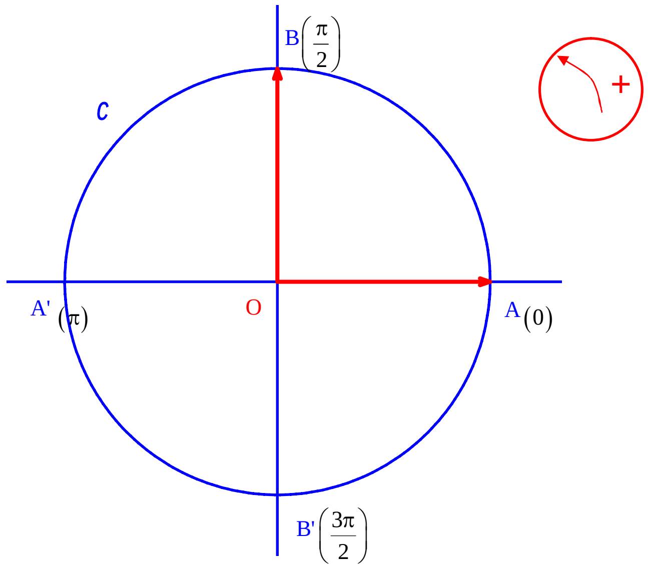
$\frac{\pi}{4}$ rad $= 45° =$ la moitié d'un angle droit

On utilise la construction de la bissectrice d'un angle (compas ou carreaux).

IV. Déplacements sur le cercle trigonométrique ; pratique du cercle trigonométrique

1°) Déplacements associés aux valeurs remarquables $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π etc.

On part du point A (associé au réel 0).



• On tourne dans le **sens positif** en effectuant des quarts de cercle.

On rencontre successivement :

- le point B image de $\frac{\pi}{2}$
- le point A' image de π
- le point B' image de $\frac{3\pi}{2}$
- le point A image de 2π

etc

• On tourne dans le **sens négatif** en effectuant des quarts de cercle.

On rencontre successivement :

- le point B' image de $-\frac{\pi}{2}$
- le point A' image de $-\pi$
- le point B image de $-\frac{3\pi}{2}$
- le point A image de -2π

etc.

Par cette méthode, on obtient tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$.

Dans le premier cas, on obtient tous les multiples entiers positifs de $\frac{\pi}{2}$: $1\times\frac{\pi}{2}$, $2\times\frac{\pi}{2}$, $3\times\frac{\pi}{2}$, $4\times\frac{\pi}{2}$… (qui correspondent d'ailleurs à des longueurs de déplacements).

Dans le deuxième cas, on obtient tous les multiples entiers négatifs de $\frac{\pi}{2}$: $-1\times\frac{\pi}{2}$, $-2\times\frac{\pi}{2}$, $-3\times\frac{\pi}{2}$, $-4\times\frac{\pi}{2}$…

La même méthode s'applique pour trouver tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.

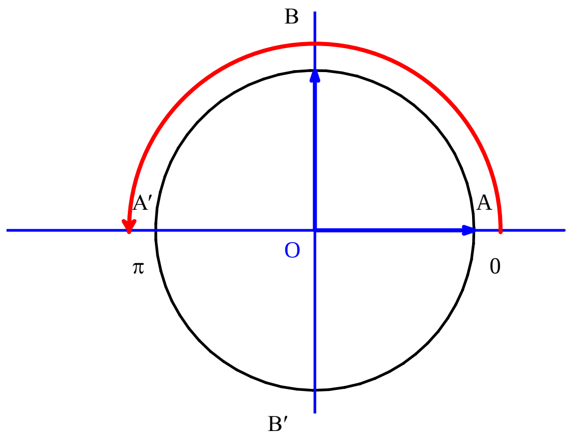
2°) Parcours sur le cercle trigonométrique

x est un réel.

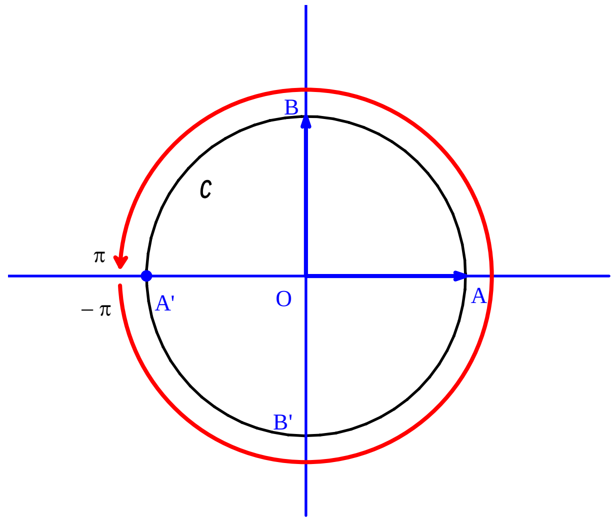
M est l'image de x sur le cercle trigonométrique.

On a donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=x$.

• **Déplacement sur le cercle de 0 à π :** geste physique et geste mental associé.
Lorsque x va de 0 à π, le point M va de A à A'.

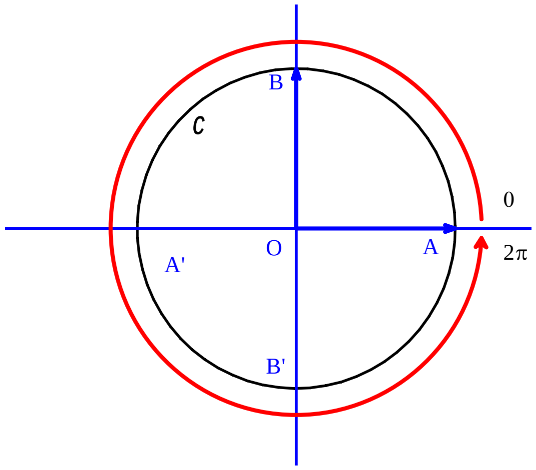


• **Déplacement sur le cercle de $-\pi$ à π :** geste physique et geste mental associé.
Parcourir le cercle trigonométrique de $-\pi$ à π :

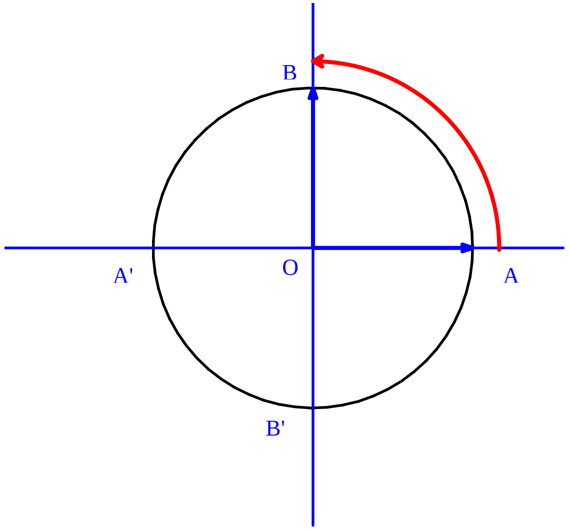


Il est important de faire la figure correspondante.

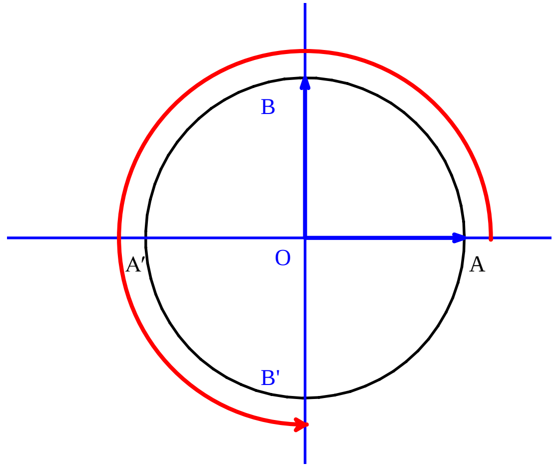
• **Déplacement sur le cercle de 0 à 2π :**



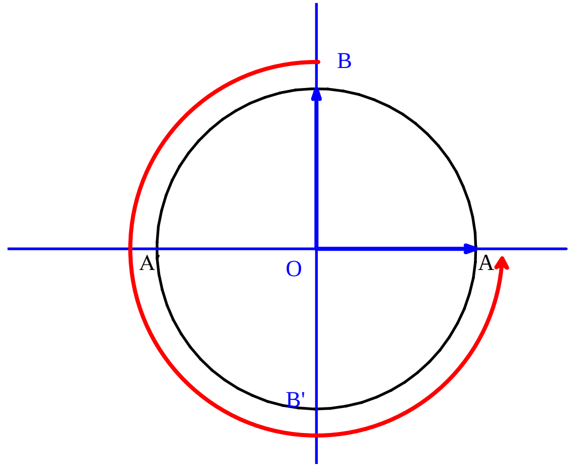
• **Déplacement sur le cercle de 0 à $\frac{\pi}{2}$:**



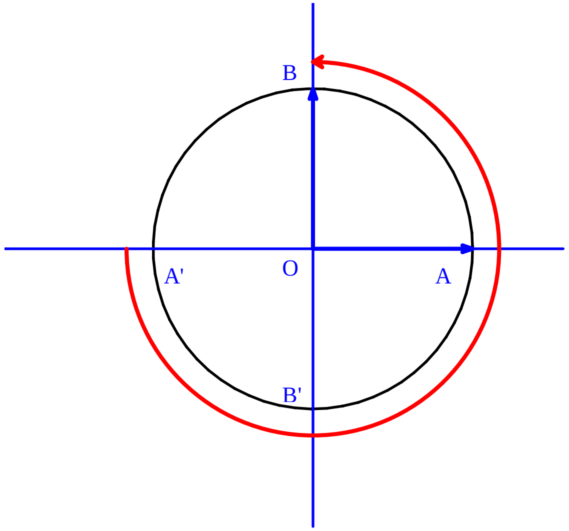
• **Déplacement sur le cercle de 0 à $\frac{3\pi}{2}$:**



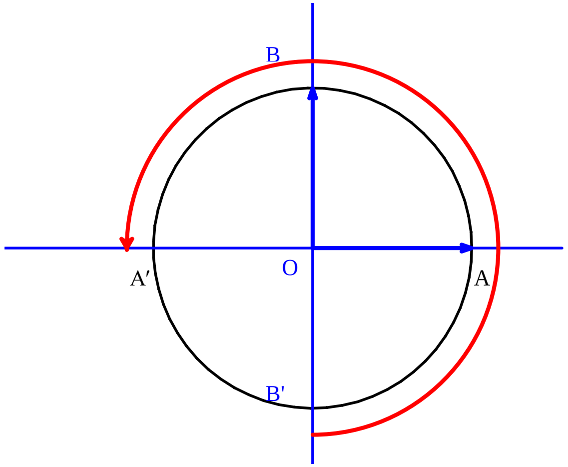
• **Déplacement sur le cercle de $\frac{\pi}{2}$ à 2π :**



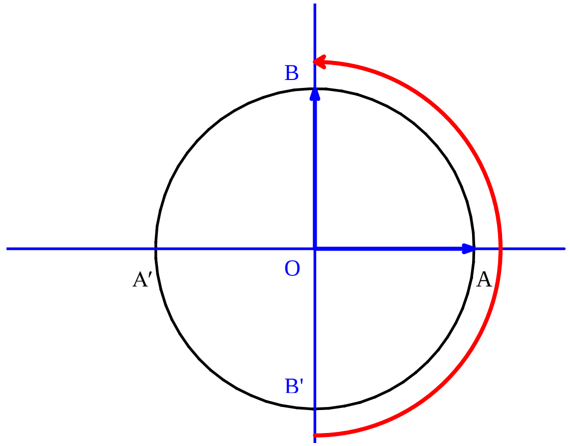
• **Déplacement sur le cercle de $-\pi$ à $\frac{\pi}{2}$:**



• **Déplacement sur le cercle de $-\frac{\pi}{2}$ à π :**



• **Déplacement sur le cercle de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$:**



• **Déplacement sur le cercle de π à $\frac{\pi}{2}$:**

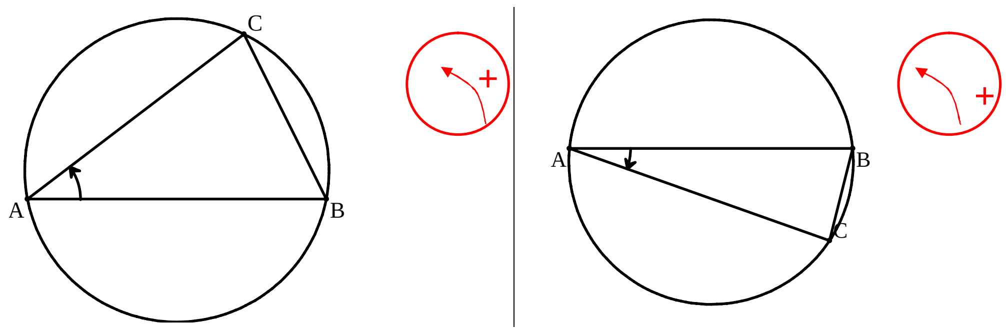
Si l'on se déplace de π à $\frac{\pi}{2}$, on va de A' à B dans le sens négatif.

V. Orientation d'une figure (angles orientés et configurations)

1°) Orientation d'un triangle

• On dit qu'un triangle ABC (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **direct** pour exprimer que la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est **positive**.

• On dit qu'un triangle ABC (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **indirect** pour exprimer que la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est **négative**.



Le fait qu'un triangle soit direct ou indirect est lié à la manière (plus précisément, à l'ordre) dont on nomme (énumère) les sommets. Un triangle peut être direct ou indirect suivant la manière dont on nomme les points.

Question : comment sait-on qu'un triangle est direct ou indirect ?

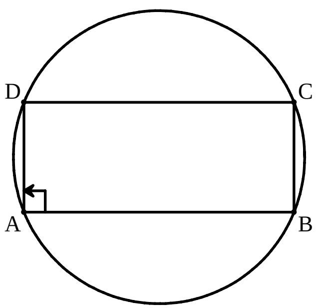
→ Supposons que l'on donne un triangle soit tracé sur une figure.
On demande ensuite si le triangle … (ordre des points choisi) est direct ou indirect.

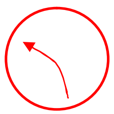
→ On imagine dans sa tête le cercle circonscrit au triangle puis on énumère le sommets en choisissant l'ordre des points donné pour nommer le triangle et en utilisant éventuellement le doigt.
On regarde dans quel sens on a tourné.
Si l'on a tourné dans le sens trigonométrique, le triangle … est direct.
Si l'on a tourné dans le sens anti-trigonométrique, le triangle … est indirect.

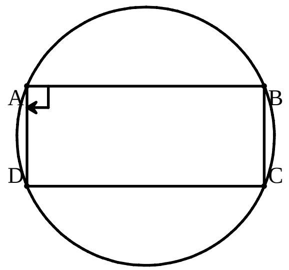
2°) Orientation d'un rectangle

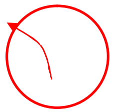
• On dit qu'un rectangle ABCD (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **direct** pour exprimer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

• On dit qu'un rectangle ABCD (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **indirect** pour exprimer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

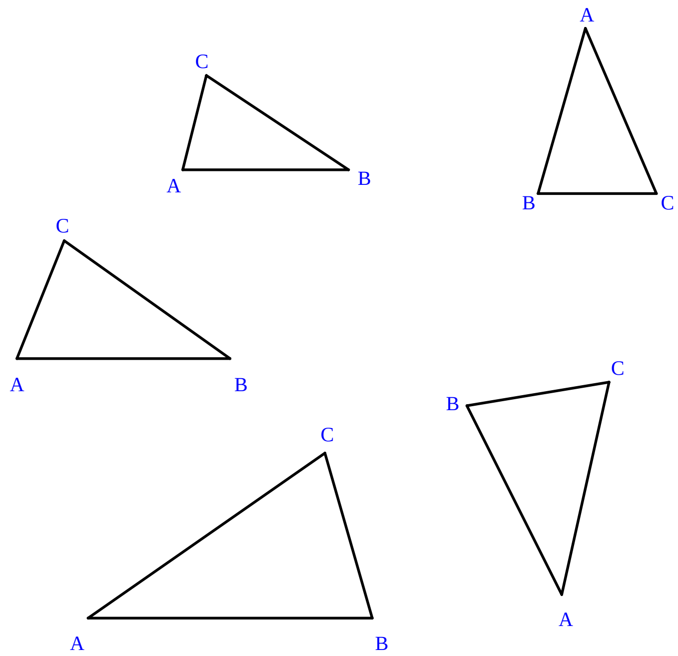








Fiche sur triangles directs et indirects



Pour chaque triangle ABC, dire s'il est direct ou indirect.