TS

Droites et plans de l'espace

Ce chapitre a pour objectif de reprendre contact avec l'espace.
Nous allons donc revoir les notions de base étudiées en seconde.
L'observation de droites et de plans dans un cube permet de dégager les règles de base d'incidence et de parallélisme qui sont rappelés dans ce chapitre.

I. Le « passage à l'illimité »

1°) Les solides

Au collège on s'est intéressé à l'étude de solides de l'espace.

On a vu au collège que les solides usuels tels que cube, pavé droit, prisme droit, pyramide possèdent tous des faces (polygonales) limitées par des arêtes.

D'autres solides, tels que la boule, le cylindre de révolution, le cône de révolution n'ont pas de faces (les bases d'un cylindre de révolution ou la base d'un cône de révolution, qui sont des disques, ne sont pas des faces).

Les solides qui possèdent des faces sont appelés des **polyèdres** (du grec *poly* : « plusieurs » et *hedron* : « face »).

Les cubes, les pavés droits, les prismes, les pyramides sont des polyèdres.
Les boules, les cylindres de révolution, les cônes de révolution ne sont pas des polyèdres.

On notera que la sphère n'est pas un solide ; c'est une surface.

Un solide assez peu étudié au collège est le parallélépipède quelconque. C'est un solide dont toutes les faces sont des parallélogrammes.

Figure

Dans un parallélépipède, les faces opposées sont parallèles.

2°) Droites et plans

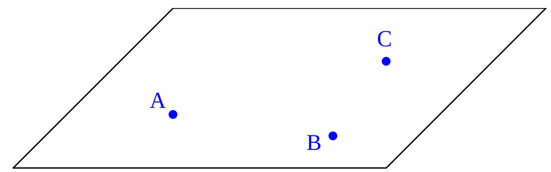
En seconde, on a vu que le prolongement des arêtes d'un cube (ou de tout autre polyèdre) permettait de définir des **droites**.
De même, on a vu que les faces d'un cube (ou de tout autre polyèdre) permettaient de définir des **plans**.

Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore…).

On retiendra que la géométrie dans l'espace fait intervenir des points, des droites et des plans.

3°) Caractérisation d'un plan

Trois points A, B, C de l'espace non alignés définissent un plan de l'espace et un seul.



Ce plan est noté (ABC) (ou (BAC) etc…).

4°) Définition

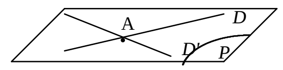
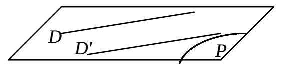
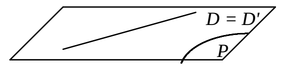
On dit que des points sont « coplanaires » pour exprimer qu'ils appartiennent à un même plan.

II. Position relative de deux droites de l'espace

1°) Différents cas possibles

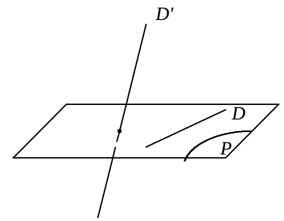
Deux droites D et D' de l'espace peuvent être :

• **coplanaires** (c'est-à-dire contenues ou incluses dans un même plan)

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">sécantes</td><td>strictement parallèles</td><td>confondues</td></tr>
<tr><td colspan="2">parallèles</td></tr>
</table>

ou

• **non coplanaires** (il n'existe aucun plan que les contienne toutes les deux)



2°) Définition

On dit que deux droites de l'espace sont parallèles pour exprimer :
• soit quelles sont coplanaire sans point commun ;
• soit qu'elles sont confondues.

3°) Remarque

Deux droites non coplanaires de l'espace ne sont pas parallèles.

Deux droites sécantes de l'espace sont coplanaires.

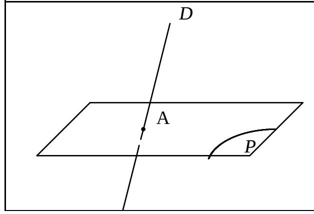
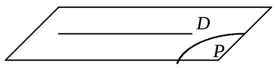
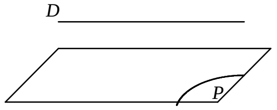
Deux droites parallèles de l'espace sont coplanaires.

Donc en résumé, **deux droites non coplanaires sont deux droites qui ne sont ni sécantes ni coplanaires**.

III. Position relative d'une droite et d'un plan

1°) Différents cas possibles

Une droite D et un plan P de l'espace peuvent être :

sécants	**parallèles**	
	 $D \subset P$	 strictement parallèles

2°) Définition

On dit qu'une droite de l'espace est parallèle à un plan pour exprimer

• soit qu'elle n'a aucun point commun avec ce plan

• soit qu'elle est incluse dans ce plan

3°) Remarques

• Une droite et un plan non parallèles sont sécants en un point.

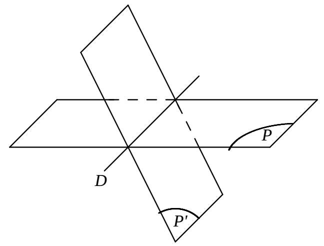
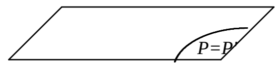
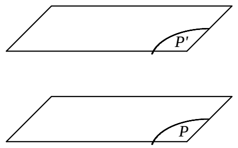
• Du point de vue du vocabulaire, on retiendra que l'on dit qu'un point appartient à une droite ou à un plan.
Mais qu'en revanche, on ne dit pas qu'une droite « appartient » à un plan (ou « fait partie » d'un plan).
On dit qu'elle est incluse dans ce plan ou qu'elle est contenue dans ce plan.

• On notera également que si un plan contient deux points distincts A et B, alors il contient la droite (AB).

IV. Position relative de deux plans de l'espace

1°) Différents cas possibles

Deux plans *P* et *P'* de l'espace peuvent être :

sécants (suivant une droite D)	**parallèles**	
		
	confondus	**strictement parallèles**

2°) Définition

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles pour exprimer

• soit qu'ils n'ont aucun point commun ;

• soit qu'ils ne sont pas confondus.

V. Un premier bilan de quelques notions

1°) Plans de l'espace

Un plan de l'espace peut être défini par :
• 3 points non alignés (noté avec parenthèses) ;
• 2 droites sécantes ;
• 2 droites strictement parallèles ;
• 1 droite et un point n'appartenant pas à cette droite.

2°) Règles d'incidence

• 2 droites sécantes de l'espace se coupent en point.
• 1 droite et un plan sécant se coupent en un point.
• 2 plans sécants se coupent suivant une droite.

3°) L’adjectif « coplanaire »

● **Points coplanaires :** points situés dans un même plan

● **Droites coplanaires :** droites | contenues dans un même plan
| incluses

Deux droites sont coplanaires lorsqu’elles sont sécantes ou parallèles.

VI. Théorèmes de parallélisme
(admis sans démonstration)

1°) Théorème 1

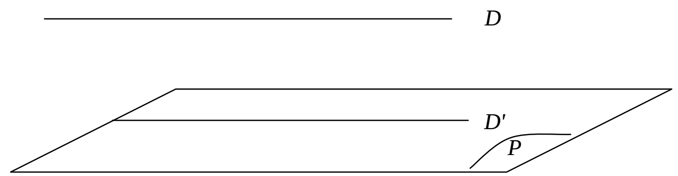
Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors leurs droites d’intersection sont parallèles.

(Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont parallèles).

2°) Théorème 2 (« théorème du toit »)

Si deux droites contenues dans deux plans sécants sont parallèles, alors elles sont parallèles à la droite d’intersection.

3°) Théorème 3



Si une droite est parallèle à une droite d’un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

(Ce théorème sert à démontrer qu’une droite est parallèle à un plan).

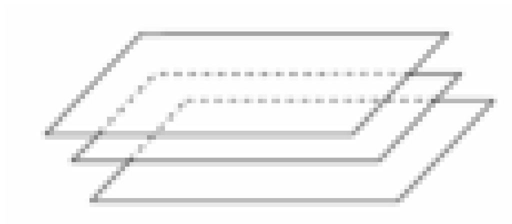
4°) Théorème 4

Si deux droites sécantes d’un plan sont parallèles à deux droites sécantes d’un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Attention : une droite ne suffit pas.

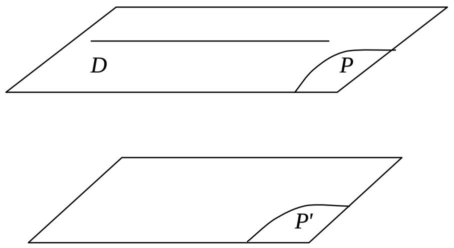
(Ce théorème sert à démontrer que deux plans sont parallèles.)

5°) Théorème 5



Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l’un est parallèle à l’autre.

6°) Théorème 6



Si deux plans sont parallèles, alors toute droite (de l'espace) incluse dans l'un (des plans) est parallèle à l'autre.

(Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est parallèle à un plan).

VII. Démonstrations dans l'espace

1°) Utilisation des théorèmes

• Démontrer que deux droites sont parallèles

Théorème 1
Théorème 2

• Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Théorème 3
Théorème 6

• Démontrer que deux plans sont parallèles

Théorème 4
Théorème 5

2°) Exemple de rédaction modèle

ABCD est un tétraèdre
$I \in]DA[$
P : plan passant par I parallèle à (ABC)
P coupe (BD) en J et (CD) en K.

Démontrer que (IJ) // (AB).

Théorème 1 (le citer)

$$\left.\begin{array}{l} P \,//\, (\mathrm{ABC}) \\ P \cap (\mathrm{ABD}) = (\mathrm{IJ}) \\ (\mathrm{ABC}) \cap (\mathrm{ABD}) = (\mathrm{AB}) \end{array}\right\} \text{donc (IJ) // (AB)}$$

3°) Remarque de vocabulaire

On ne dit pas qu'une droite « appartient » (ou « fait partie ») d'un plan.
On dit qu'elle est « incluse » ou « contenue » dans ce plan.

Notation : $D \subset P$

« est inclus dans »

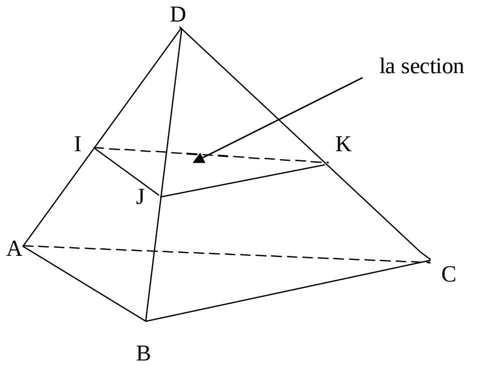
(à ne pas confondre avec $\in$: « appartient à », « est élément de »)

En revanche, on dit qu'un point appartient à une droite ou à un plan.

VIII. Exemples de sections planes de solides

1°) Exemple 1

ABCD est un tétraèdre.
$I \in]DA[$



Tracer la section du tétraèdre par le plan *P* passant par I et parallèle au plan (ABC) (le plan de section).

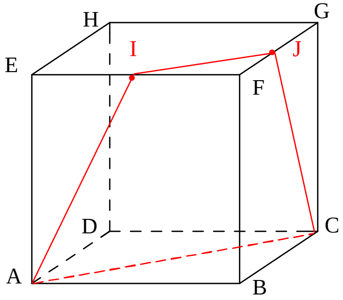
Théorème 1 :

(IJ) // (AB)
(JK) // (BC)
(IK) // (AC)

La section du tétraèdre par le plan *P* est le triangle IJK.

2°) Exemple 2

ABCDEFGH est un cube.
$I \in]EF[$



Tracer la section du cube par le plan (ACI).

Méthode par parallélisme

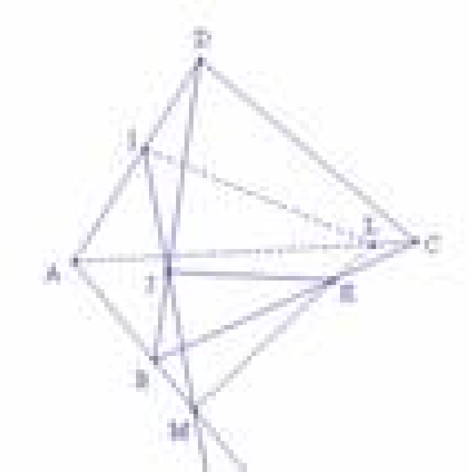
On trace la parallèle à (AC) passant par I.
On obtient ainsi le point J que l'on relie au point C.

La section du cube est le quadrilatère AIJC (trapèze isocèle).

L'utilisation d'un cube en plastique transparent (plexiglas) rempli de liquide coloré pour visualiser la section est particulièrement intéressante.

3°) Exemple 3

ABCD est un tétraèdre.
$I \in]DA[$
$J \in]BD[$
$(IJ) \nparallel (AB)$
$K \in]BC[$



Tracer la section du tétraèdre par le plan (IJK).

Méthode par tracé hors solide (méthode des points rouges)

M : prolongement de (IJ)
L : prolongement de (MK)

La section du tétraèdre par le plan (IJK) est le quadrilatère IJKL.

4°) Bilan

La section d'un polyèdre (solide qui possède des faces) par un plan est un polygone (sauf si c'est un point ou un segment).

Section d'un tétraèdre : 3 ou 4 sommets.

Section d'un cube : entre 3 et 6 sommets.

Remarque : Dans un cube, la méthode de tracé d'une section par la méthode de parallélisme utilise le fait que les plans définis par les faces opposées sont parallèles.

Un logiciel de géométrie dynamique tel que Geogebra 3D permet de faciliter l'étude des sections de solides.

On peut aussi utiliser des solides en plexiglas que l'on peut remplir de liquide coloré ou de semoule.

IX. Figures dans l'espace

1°) Règles de perspective parallèle

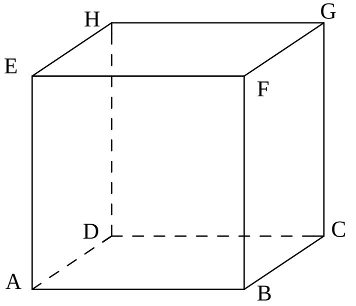
• Une droite est représentée par une droite et donc trois points alignés dans l'espace sont représentés par trois points alignés.

• Deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par deux droites parallèles.

• Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné et, plus généralement, la représentation conserve sur un segment les proportions de longueurs.

2°) Dispositions des points pour les cubes

Le cube est une figure de référence dans l'espace.
Un cube ABCDEFGH est représenté « posé » sur la face ABCD (dans un plan horizontal, perpendiculaire au plan frontal) avec ABFE pour face frontale (c'est-à-dire qui apparaît devant).



Les points A, B, C, D correspondent aux points E, F, G, H (on tourne dans le même sens).

Cette disposition reste valable pour un parallélépipède (en particulier, pour un parallélépipède rectangle ou pavé droit).

Mettre une figure.

3°) Un angle de fuite à éviter

Lorsque l'on représente un cube en perspective cavalière, on évite à tout prix un angle de fuite de 45 °.
C'est un angle de fuite pratique quand on travaille sur du papier quadrillé mais qui peut créer des problèmes de perspective (problème de chevauchement).
En effet, si l'on représente par exemple un cube ABCDEFGH en perspective cavalière avec un angle de fuite de 45° et la face ABFE en face frontale, les points A,D, F, G alignés (et de même le centre de la face ABFE).
De même, le centre de la face ABFE peut être - par malheur - sur le segment [DH] sur la représentation comme le montre la figure ci-dessous.

4°) Les fausses intersections dans l'espace

Lorsque deux droites de l'espace se coupent sur une figure en perspective mais pas dans la réalité, on parle de « fausse intersection » (au sens où l'on a des droites non coplanaires qui se coupent sur la figure mais pas dans la réalité c'est-à-dire dans l'espace).
D'où la nécessité de raisonner quand on a des tracés à faire dans l'espace (on doit s'imaginer ce qui se passe dans la réalité).

X. Solides de Platon

1°) Définition

On appelle les solides de Platon 5 solides particuliers :
- le cube (le plus connu)
- le tétraèdre régulier
- l'octaèdre régulier
- l'icosaèdre régulier
- le dodécaèdre régulier

Représentation en perspective

2°) Deux tableaux célèbres

• Portrait de Luca Pacioli - 1495 - Jacopo de Barbari

De la main droite, le mathématicien Luca Pacioli (1445 ; 1514) fait de la géométrie et de la main gauche, il fait de l'arithmétique. Entourant Pacioli, sont placés de nombreux objets mathématiques.

• Portrait de Johannes Neudorfer et son fils - 1561 - Nicolaus Neufchatel

Cette peinture montre Johannes Neudorfer enseignant les mathématiques à son fils. Neudorfer pointe sur un dodécaèdre qu'il tient dans sa main gauche.

3°) Patrons

Pour chacun d'eux on donne un patron possible.

4°) Propriétés

Il s'agit de polyèdres réguliers convexes.
Ils sont dits réguliers car pour chacun, leurs faces, leurs côtés et leurs angles sont identiques.
Par exemple le cube possède 6 faces carrées identiques, le tétraèdre possède 4 faces triangulaires équilatérales identiques, l'octaèdre en possède 8 et l'icosaèdre en possède 20. Reste le dodécaèdre qui possède 12 faces pentagonales régulières identiques.

On démontrer qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers convexes.

Ils sont tous inscrits dans une sphère.

5°) Interprétation

Ces 5 formes sont connues depuis la nuit des temps. Platon les associe aux 5 éléments : le cube à la terre, l'icosaèdre à l'eau, l'octaèdre à l'air, le tétraèdre au feu et le dodécaèdre à l'univers.

XI. Patrons

1°) Introduction

Au collège, on vu que la plupart des solides admettent un patron (pavé droit, pyramide et cône).
En revanche, on peut démontrer que la boule (la sphère) n'admet pas de patron.

2°) Théorème (admis dans démonstration)

Tout polyèdre admet un patron

Voir le livre *How to fold it*, de Joseph O'Rourke.

3°) Maquette d'un tétraèdre régulier à l'aide d'une feuille de papier

On peut réaliser un tétraèdre régulier par pliage d'une feuille de papier A4.