TS

Les suites (1)
Vocabulaire usuel des suites
Rappels de 1$^{\text{ère}}$ et compléments

Revoir le cours de 1$^{\text{ère}}$.

I. Généralités

1°) Définition

Une **suite numérique** est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto u_n$
terme d'indice *n*

2°) Notation

$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (les parenthèses sont obligatoires)

Quand il n'y a pas de parenthèses, c'est pour définir le nombre.
Quand il y a des parenthèses, c'est pour définir la fonction.

Exemple : quand on dit « la suite (u_n) est croissante », on met des parenthèses.

Première compétence attendue : connaître la définition rigoureuse exacte d'une suite (celle-ci doit être sue parfaitement et peut être redemandée en contrôle).
« Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. »

3°) Différentes façons de définir une suite

Il y en a trois principales.

● **1$^{\text{ère}}$ façon : formule explicite donnant le terme général en fonction de *n*.**

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

● **2$^{\text{e}}$ façon : par son premier terme et une relation de récurrence** (c'est-à-dire une relation liant deux termes consécutifs)

(Nouvelle définition par rapport aux fonctions)

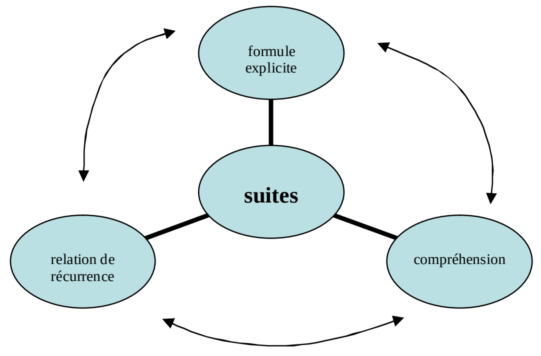
Exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 3 \end{cases}$

● **3$^{\text{e}}$ façon : par compréhension**

Exemple : $u_n = n$-ième décimale de π $(n \geqslant 1)$

$\pi = 3{,}1415926...$

$u_1 = 1$
$u_2 = 4$
$u_3 = 1$



II. Ensemble de définition d'une suite

1°) Remarque générale

Une suite peut être définie sur $\mathbb{N}$ ou seulement sur une partie de $\mathbb{N}$.

Déterminer l'ensemble de définition d'une suite définie par une formule explicite est en général facile.
En revanche, c'est souvent plus difficile dans le cas d'une suite définie par récurrence et nous n'avons pas encore tous les outils (raisonnement par récurrence).

2°) Exemples de suites définies par une formule explicite

① La suite *u* telle que $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$.

② La suite *u* telle que $u_n = \dfrac{1}{n}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$ ou à partir de l'indice 1.

③ La suite *u* telle que $u_n = \sqrt{n-2}$ est définie à partir de l'indice 2.

3°) Exemples de suites définies par récurrence

① $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 3 \end{cases}$

La suite *u* est définie de manière évidente sur $\mathbb{N}$ (pas de problème de définition).

② $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases}$

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ mais ce n'est pas aussi évident que dans le 1[er] exemple.

On peut faire un raisonnement de proche en proche (qui plus tard sera remplacé par un raisonnement par récurrence).

③ $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1} \end{cases}$

$u_1 = -2$; $u_2 = -1$

On ne peut pas calculer u_3.

La suite n'est pas définie à partir de l'indice 3 (suite finie).

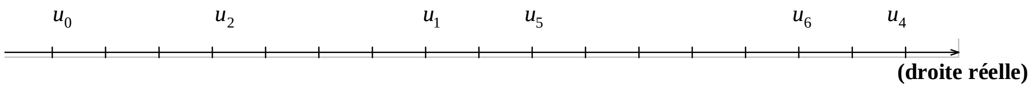
Lorsque qu'une suite u est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique, il peut y avoir un problème de définition suivant la valeur de u_0 et l'ensemble de définition de f.

4°) Propriété d'existence d'une suite définie par récurrence (admise sans démonstration)

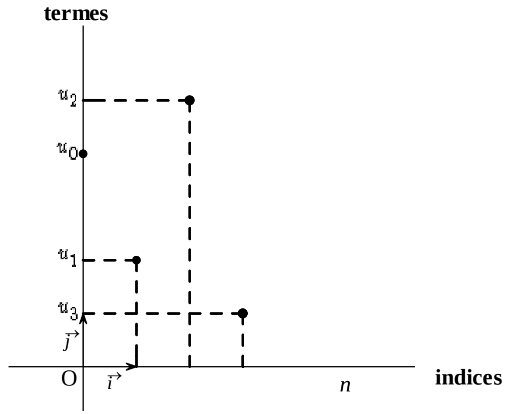
f est une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset D$ (on dit que D est **stable** par f).
Pour tout réel $a \in D$, la suite u définie par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$.

III. Représentations graphiques

1°) Représentation graphique sur un axe gradué



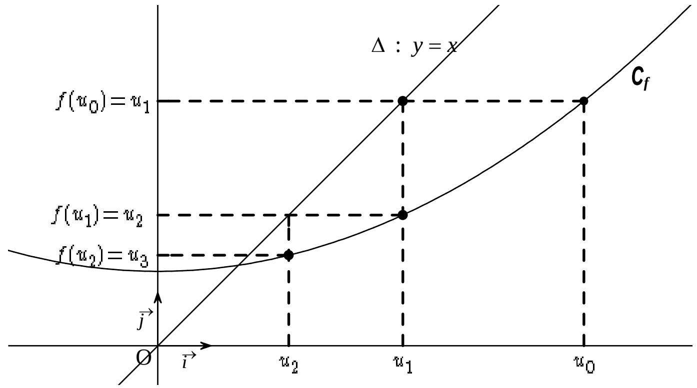
2°) Représentation graphique dans un repère du plan



La suite u est représentée par des points isolés (« **nuage de points** »).

3°) Lecture graphique des termes d'une suite récurrente d'ordre 1

$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$ (« 1[ère] bissectrice » du repère lorsque le repère est orthonormé).

Recette :

On place u_0 sur l'axe des abscisses.

On monte u_0 jusqu'à $\mathcal{C}_f$.

On obtient u_1 en ordonnée car $u_1 = f(u_0)$.

On rallonge jusqu'à Δ.

On redescend en abscisse ; on obtient la valeur de u_1.

On recommence avec u_1 et ainsi de suite.

Il s'agit d'une construction des termes d'une suite récurrente **sans calcul**.
Il faut bien noter qu'il n'y a aucun calcul pour faire le graphique.
Suivant les cas, on obtient une construction en « marche d'escalier » ou « en spirale » (« en escargot »).

IV. Sens de variation d'une suite

1°) Définitions

u est une suite.

On dit que u est **croissante** pour exprimer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \leqslant u_{n+1}$.
On dit que u est **strictement croissante** pour exprimer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n < u_{n+1}$.

On dit que u est **décroissante** pour exprimer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \geqslant u_{n+1}$.
On dit que u est **strictement décroissante** pour exprimer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n > u_{n+1}$.

On dit que u est **constante** pour exprimer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = u_{n+1}$.

On dit que u est stationnaire **à partir de l'indice** n_0 pour exprimer que : $\forall n \geqslant n_0 \;\; u_n = u_{n+1}$.

On dit que u est **monotone** pour exprimer qu'elle est soit croissante soit décroissante.
On dit que u est **strictement monotone** pour exprimer qu'elle est soit strictement croissante
soit strictement décroissante.

2°) N.B.

• On observera que les définitions d'une suite croissante, décroissante etc. font appel à des phrases quantifiées.

• Une suite peut être monotone à partir d'un certain indice.

3°) Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

	Principe	**Commentaires**
Méthode par comparaison directe	On compare u_n et u_{n+1} en utilisant les théorèmes de rangement.	Utilisation assez limitée ; pour les suites définies par une formule explicite simple.
Méthode par différence	On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.	
Méthode par quotient	Lorsque tous les termes sont **<u>strictement positifs</u>**, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors u est croissante. Si $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors u est décroissante.	Il faut d'abord vérifier que tous les termes sont de signe positif.
Méthode par étude de fonction	Lorsque $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, on peut étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire celui de u.	- Il faut connaître la fonction (fonction associée à la suite) - Pas pour les suites définies par récurrence (voir remarque dans le 5°))
Méthode pour les suites arithmétiques et les suites géométriques	On peut utiliser les règles particulières qui sont données dans le paragraphe suivant (par rapport à la raison).	
Méthode par récurrence	On pose $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ » ou $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1}$ »	- Voir plus tard le chapitre sur le raisonnement par récurrence. - Pratique pour les suites définies par récurrence.

4°) Bêtises à ne pas faire

• Pas de tableau de variation pour les suites

• Ne pas dire « (u_n) croissante sur $\mathbb{N}$ » mais « (u_n) croissante à partir de l'indice 0 ».

• Pas de dérivée de suite

• $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Le sens de variation de f **ne donne pas** celui de (u_n).

f croissante $\not\Rightarrow$ u croissante
f décroissante $\not\Rightarrow$ u décroissante

V. Suites arithmétiques et géométriques

1°) Tableau de formules

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Relation de récurrence (u_{n+1} / u_n)	$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ (r : **raison arithmétique** (nombre fixé))	$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$ (q : **raison géométrique** (nombre fixé))
Relation entre deux termes quelconques d'indices *n* et *p*	$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$ (en particulier pour $p=0$ et $p=1$ $u_n = u_0 + n \times r$ $u_n = u_1 + (n-1) \times r$)	$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$ $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Sommes de termes consécutifs Formules sommatoires	Somme des termes $= (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$ (nombre de termes $\times$ moyenne des termes extrêmes)	Somme des termes $= 1^{\text{er}}\ \text{terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ $(q \neq 1)$
Sens de variation (monotonie)	$r > 0$ suite strictement croissante $r < 0$ suite strictement décroissante $r = 0$ suite constante **Une suite arithmétique est toujours monotone.**	$u_0 > 0$: $\begin{cases} 0<q<1 & \text{suite strictement décroissante} \\ q>1 & \text{suite strictement croissante} \\ q<0 & \text{suite non monotone} \end{cases}$ $u_0 < 0$: $\begin{cases} 0<q<1 & \text{suite strictement croissante} \\ q>1 & \text{suite strictement décroissante} \\ q<0 & \text{suite non monotone} \end{cases}$ (contraire dans les deux premiers cas) Une suite géométrique de 1^{er} terme différent de 0 est monotone si et seulement si $q \geq 0$.

2°) Complément : nombre de termes d'une somme de termes consécutifs

$$\boxed{\underbrace{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n}_{(n-p+1)\ \text{termes}}}$$

Exemples :

$$\underbrace{u_3 + u_4 + \ldots + u_{20}}_{20-3+1=18\ \text{termes}}$$

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{(n+1)\ \text{termes}}$$

Applications :

si u est une SA :	si u est une SG de raison $q \neq 1$:
$\underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{(n+1)\ \text{termes}} = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$	$\underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{(n+1)\ \text{termes}} = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n\ \text{termes}} = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$	$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n\ \text{termes}} = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

3°) Reconnaître une SA ou une SG

● **$1^{\text{ère}}$ méthode**

$u_{n+1} = u_n + r$ ou $u_{n+1} - u_n = r$ $\rightarrow$ **SA** de raison r

$u_{n+1} = u_n \times q$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ $\rightarrow$ **SG** de raison q

La méthode par quotient nécessite d'avoir montré préalablement que tous les termes de la suite sont non nuls ce qui n'est pas toujours possible ou ce qui est parfois difficile.

● **2^{e} méthode**

$u_n = a + bn$ $\rightarrow$ **SA** de raison b

$u_n = a \times b^n$ $\rightarrow$ **SG** de raison b

3°) Identités algébriques : 2 formules sommatoires à connaître

Somme des *n* premiers entiers naturels (SA)	**Somme des puissances consécutives d'un même nombre différent de 1 (SG)**
$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

4°) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique (nuage de points) d'une SA sont alignés sur une même droite. Cette propriété caractérise les SA.

VI. Suites périodiques

1°) Définition

- On dit qu'une suite u est **périodique** lorsqu'il existe un entier $p \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n$.
- Le plus petit entier naturel p qui vérifie la propriété est appelé **la période** de la suite.

2°) Exemple

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n \times 1 = u_n$ **(**calcul sur les indices)

Ainsi la suite u est périodique de période 2.

VII. Suites majorées, minorées, bornées

1°) Définition

u est une suite.

- On dit que u est **majorée** pour exprimer qu'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$ (M est un **majorant** de la suite).
- On dit que u est **minorée** pour exprimer qu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$ (m est un **minorant** de la suite).
- On dit que u est **bornée** pour exprimer qu'il existe deux réels m et M tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

2°) Exercice

u est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \dfrac{2}{n}$.

Démontrer que u est bornée.

Méthode :

Il faut démontrer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.
Autrement dit, il faut encadrer u_n par deux nombres fixes.

Exploration numérique :

On peut chercher en calculant les premiers termes pour avoir une idée.

$u_1 = 3$, $u_2 = 2$, $u_3 = \dfrac{5}{3}$, $u_4 = \dfrac{3}{2}$, $u_5 = \dfrac{7}{5}$

u semble minorée par 1 et majorée par 3.

Démonstration :

- Minoration : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{2}{n} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \dfrac{2}{n} > 1$.

Donc u est minorée par 1.
(1 est un minorant de la suite u ; 0,5, 0, – 1, $-0,33$ sont aussi des minorants).

- Majoration : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geqslant 1$ (on aurait aussi pu écrire $n > 0$)

$\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ (passage à l'inverse dans une inégalité dont les deux membres sont de même signe)

$\dfrac{2}{n} \leqslant 2$

$1 + \dfrac{2}{n} \leqslant 3$

Donc u est majorée par 3 (3 est un majorant de la suite).

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 3$
Donc la suite u est bornée.

3°) Propriété (évidente)

- Toute suite croissante est **minorée** par son premier terme.
- Toute suite décroissante est **majorée** par son premier terme.

En effet :
si (u_n) est une suite croissante, on a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant ... \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$;
si (u_n) est une suite décroissante, on a : $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant ... \geqslant u_n \geqslant u_{n+1}$.

4°) Méthodes pour démontrer qu'une suite est minorée ou majorée

Pour démontrer qu'un nombre m est un minorant d'une suite u :

	Principe	Commentaires
Méthode par comparaison directe	On compare u_n et m en utilisant les théorèmes de rangement	- Utilisation lorsque la suite est définie par une formule explicite. - On utilise les théorèmes de rangement. - Pas toujours possible
Méthode par différence	On étudie le signe de la différence $u_n - m$ et on montre que cette différence est positive ou nulle pour tout entier naturel n.	Assez commode en pratique lorsque la suite est définie par une formule explicite.
Méthode par récurrence	On pose par exemple $P(n)$: « $u_n \geqslant m$ »	Commode lorsque la suite est définie par récurrence. Voir plus tard.
Méthode par minoration d'une somme	Voir plus tard	Utilisation pour une suite définie sous forme d'une somme

Les mêmes méthodes s'adaptent pour démontrer qu'un nombre M est un majorant d'une suite u.

5°) Remarque

Une suite dont tous les termes sont positifs ou nuls est minorée par 0.
Une suite dont tous les termes sont négatifs ou nuls est majorée par 0.

VIII. Bilan

1°) Qu'est-ce qu'étudier une suite ?

L'étude d'une suite peut consister à démontrer :
- qu'une suite est définie
- calculer explicitement le terme général
- étudier la monotonie
- étudier la convergence (voir plus tard)

2°) Outils d'étude d'une suite

- outils numériques
- outils graphiques

Avec utilisation de la calculatrice (voir Appendice) ou d'un tableur pour programmer le calcul des termes et faire des représentations graphiques.
Sur un tableur, on peut représenter un nuage de points.

IX. Factorielle d'un entier naturel

● Définition et notation

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle **« factorielle de *n* »** le produit de tous les entiers naturels de 1 à n.

On note ce nombre $n!$.

On a donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

● **Par convention,** on pose également : $\boxed{\begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{array}}$

Ces conventions permettent de faire les calculs.

● Exemple :

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

● Calculatrice :

On peut aussi utiliser la calculatrice.

Casio Graph 35+
Menu probabilité $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ $\boxed{\text{F1}}$.

TI 83 Plus
Aller dans MATH puis PRB et taper 4.
Attention : lorsque les valeurs de n sont trop grandes, on dépasse les capacités de la calculatrice.
Elle déclare qu'elle est « overflow ».

● Remarque :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$.

● Autre écriture :

$$n! = \prod_{k=1}^{k=n} k$$

symbole « Π » qui signifie « produit »