TS

Exercices sur la géométrie dans l'espace (niveau 1)

Dans tous les exercices, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Aucune représentation en perspective n'est demandée dans ces exercices sauf pour l'exercice $\boxed{7}$.

Série 1

$\boxed{1}$ Calculer dans chacun des cas suivants le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants :

a) $\vec{u}\,(-3\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}\,(2\,;0\,;5)$; b) $\vec{u}\,(1\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}\,(2\,;3\,;-2)$; c) $\vec{u}\,(7;-1\,;2)$ et $\vec{v}\,(-3\,;-11\,;5)$

Vérifier avec la calculatrice Numworks.
On est dans l'espace « Calculs ».
On ouvre la boîte à outils puis on va dans la rubrique « Matrices et vecteurs » puis « Vecteurs ».
dot(U,V) Produit scalaire
On rentre les vecteurs avec les matrices lignes ou colonnes de leurs coordonnées.
Par exemple, dans le cas de la question a), l'affichage à l'écran pour calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doit être : $\mathrm{dot}\left(\begin{bmatrix}-3 & -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\end{bmatrix}\right)$ ou : $\mathrm{dot}\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\5\end{bmatrix}\right)$.

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis Vecteurs

dot(U,V) Produit scalaire

On rentre les deux vecteurs avec les matrices colonnes de leurs coordonnées.

$\boxed{2}$ On donne les points $\mathrm{A}(0\,;-1\,;-1)$, $\mathrm{B}(5\,;2\,;-1)$, $\mathrm{C}(3\,;3\,;3)$, $\mathrm{D}(1\,;0\,;-2)$.

Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

$\boxed{3}$ On considère les points $\mathrm{A}(2\,;2\,;1)$, $\mathrm{B}(5\,;-1\,;3)$, $\mathrm{C}(0\,;4\,;-3)$.

Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\boxed{4}$ On considère les points $\mathrm{A}(2\,;-3\,;4)$, $\mathrm{B}(1\,;2\,;-11)$, $\mathrm{C}(-8\,;3\,;4)$, $\mathrm{D}(-3\,;10\,;6)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

$\boxed{5}$ Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$:

a) $\vec{u}\,(1\,;2\,;2)$ b) $\vec{u}\,(-2\,;-3\,;6)$ c) $\vec{u}\,(9\,;12\,;-8)$

Vérifier avec la calculatrice Numworks :
On est dans l'espace « Calculs ».
On ouvre la boîte à outils puis on va dans la rubrique « Matrices et vecteurs » puis « Vecteurs ».
$\|\mathrm{U}\|$ Norme
On rentre le vecteur avec la matrice ligne ou colonne de ses coordonnées.

Par exemple, dans le cas de la question a), l'affichage à l'écran pour calculer la norme de $\vec{u}$ doit être :

$\left\|\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}\right\|$ ou $\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\|$.

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils → rubrique « Matrices et vecteurs » puis « Vecteurs »

$\boxed{6}$ On considère les points $\mathrm{A}(0\,;1\,;1)$ et $\mathrm{B}(1\,;-1\,;0)$.

Déterminer la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

$\boxed{7}$ Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

Faire une figure assez grande.

On pose $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\vec{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

En utilisant le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

$\boxed{8}$ On considère les points $\mathrm{A}(2\,;1\,;3)$, $\mathrm{B}(1\,;0\,;-1)$, $\mathrm{C}(4\,;0\,;0)$, $\mathrm{D}(0\,;4\,;0)$ et $\mathrm{E}(1\,;-1\,;1)$.

1°) Démontrer que les points C, D, E ne sont pas alignés.

2°) Démontrer que $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CDE})$.

$\boxed{9}$ En utilisant la propriété rappelée dans l'encadré ci-dessous, calculer dans chacun des cas suivants les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ non nul orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a) $\vec{u}\,(4\,;2\,;-2)$ et $\vec{v}\,(-1\,;3\,;4)$; b) $\vec{u}\,(3\,;2\,;-1)$ et $\vec{v}\,(5\,;5\,;0)$; c) $\vec{u}\,(6\,;-2\,;7)$ et $\vec{v}\,(-4\,;5\,;1)$

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(yz'-zy',\, zx'-xz',\, xy'-yx')$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On peut aussi écrire les coordonnées de ce vecteur à l'aide de déterminants sous la forme $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$.

Vérifier avec la calculatrice Numworks :
On est dans l'espace « Calculs ».
On ouvre la boîte à outils puis on va dans la rubrique « Matrices et vecteurs » puis « Vecteurs ».
cross(U,V) Produit scalaire
On rentre les vecteurs avec les matrices lignes ou colonnes de leurs coordonnées.
Par exemple, dans le cas de la question a), l'affichage à l'écran pour calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doit être : $\mathrm{dot}\left(\begin{bmatrix}-3 & -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\end{bmatrix}\right)$ ou : $\mathrm{dot}\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\5\end{bmatrix}\right)$

10 On considère les points $A(3;2;-1)$, $B(5;0;1)$, $C(0;3;-2)$.
Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Vérifier avec la calculatrice Numworks :
Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis Vecteurs

cross(U,V) Produit vectoriel

On rentre les vecteurs avec les matrices colonnes de leurs coordonnées.

11 Soit *P* le plan contenant le point $A(3;-2;5)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\,(4;2;-1)$ pour vecteur normal.
$B(1;-1;-1)$ appartient-il à *P* ?

Série 2

1 Donner dans la colonne de droite les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal au plan *P* définie par l'équation donnée dans la colonne de gauche.

Équation de *P*	**Coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à *P***
$2x-6y+2z-7=0$	
$z-x=0$	
$x+2y=5-3z$	

2 On considère le plan *P* d'équation cartésienne $3x+y-4z+1=0$.
1°) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à *P*.
2°) Déterminer une équation cartésienne du plan *Q* parallèle à *P* passant par le point $A(1;2;0)$.

3 On considère le plan *P* d'équation cartésienne $x+y-2z+5=0$ ainsi que les points $A(-5;-4;4)$ et $B(1;2;-8)$.
La droite (AB) est-elle orthogonale au plan *P* ?

4 à enlever déjà mis dans la série 1 On considère les points A(2 ; 1 ; 3), B(1 ; 0 ; – 1), C(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0) et E(1 ; – 1 ; 1).
1°) Les points C, D, E sont-ils alignés ?
2°) Démontrer que (AB) ⊥ (CDE).

5 On considère le plan *P* d'équation cartésienne $x+2y+3z-6=0$.
1°) Déterminer les points d'intersection de *P* avec les axes du repère.
2°) Faire un graphique et représenter le plan *P* à l'aide de la question précédente.

6 On donne le point $A(2;-5;4)$.
Donner sans calcul
- une équation du plan P_1 passant par A et parallèle au plan (*x*O*y*) ;
- une équation du plan P_2 passant par A et parallèle au plan (*y*O*z*) ;
- une équation du plan P_3 passant par A et parallèle au plan (*z*O*x*).

(*x*O*y*), (*y*O*z*), (*z*O*x*) désignent les plans de base.
(*x*O*y*) désigne le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(*y*O*z*) désigne le plan de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$.
(*z*O*x*) désigne le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

$\boxed{7}$ Déterminer la position relative des plans P et Q d'équations cartésiennes respectives :
$x-2y+z-1=0$ et $2x-4y+2z-1=0$.

$\boxed{12}$ On considère la droite D admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ ainsi que le point $A(1;2;0)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1;2;0)$ et orthogonal à D.

2°) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur D.

$\boxed{13}$ On considère le plan P d'équation $x+y-z=1$ ainsi que le point $A(-3;2;1)$.

1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par le point A et orthogonale à P.
2°) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur P.

$\boxed{14}$ On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y+3z-5=0$ ainsi que le point $A(2;-2;2)$.

1°) Calculer la distance du point A au plan P.
2°) Déterminer une équation de la sphère S de centre A et tangente à P.

$\boxed{15}$ On considère les points $A(1;2;-1)$ et $B(0;-2;3)$.
Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne du plan médiateur P du segment [AB] par deux méthodes indépendantes (il faut faire les deux méthodes).

1ère méthode : en utilisant la définition du plan médiateur d'un segment

Rappeler la définition de P :
« P est le plan … ».
Calculer les coordonnées du milieu I de [AB] et déterminer une équation cartésienne de P en rédigeant convenablement.

2e méthode : en utilisant la caractérisation du plan médiateur d'un segment

Rappeler la propriété : « Un point appartient à P si et seulement si… ».
Déterminer alors une équation cartésienne de P en rédigeant ainsi :
« Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x;y;z)$.

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow MA = MB \\ &\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow \ldots \text{ »} \end{aligned}$$

$\boxed{16}$ On considère les points $A(2;1;2)$ et $B(-2;0;2)$.
Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre [AB] par deux méthodes indépendantes (il faut faire les deux méthodes).

1ère méthode : en utilisant l'orthogonalité

Déterminer alors une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ en rédigeant ainsi :

« Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x;y;z)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \text{ »} \end{aligned}$$

2e méthode : en utilisant le centre et le rayon de $\mathcal{S}$

Calculer la distance AB et les coordonnées du milieu I de [AB].
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

La 1ère méthode avec l'orthogonalité est préférable car il y a moins de calculs.

$\boxed{18}$ On considère les points $A(1;2;-1)$ et $B(2;1;0)$.
Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ de $\mathcal{E}$ tels que $2MA^2-MB^2=8$.
En déduire la nature de $\mathcal{S}$.

$\boxed{19}$ On donne le point $A(0;4;0)$.
Donner une équation du plan médiateur P du segment $[OA]$.

$\boxed{20}$ On considère le demi-espace fermé E_1 défini par l'inéquation $x-2y+3z-5 \geqslant 0$.
Préciser parmi les points suivants ceux s'ils appartiennent ou non à E_1 :
$A(1;1;1)$, $B(0;-4;1)$, $C(2;2;-3)$, $D(-3;0;2)$.

$\boxed{21}$ Donner une inéquation caractérisant le demi-espace ouvert E_1 admettant le plan P d'équation cartésienne $2x-y-z+6=0$ pour frontière et qui contient le point $A(-2;4;2)$.

$\boxed{22}$ On considère les plans P et Q d'équations cartésiennes respectives $2x+y-z-2=0$ et $x+3y+7z-11=0$.
Les plans P et Q sont-ils sécants ou parallèles ?
S'ils sont sécants, déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection Δ.

$\boxed{23}$ Dans chaque cas, déterminer si les plans P et Q sont perpendiculaires.
P : $x+y+z-1=0$ et Q : $-x+z+1=0$
P : $x+2y+3z-4=0$ et Q : $x-y+z-2=0$
P : $x+2y+3z-4=0$ et Q : $-3y+2z-4=0$
P : $2x-z+1=0$ et Q : $x-y+z-3=0$
P : $-2x+y+z+2=0$ et Q : $x+y+z+1=0$

$\boxed{24}$ à enlever déjà mis dans la série 1
On considère les points $A(3\,;2\,;-1)$, $B(5\,;0\,;1)$, $C(0\,;3\,;-2)$.
Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

$\boxed{25}$ On note S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-10y+6z-27=0$ et A le point de coordonnées $(-2\,;12\,;-5)$
Vérifier que A appartient à S.
Déterminer une équation du plan P tangent à S en A.

$\boxed{26}$ Rajouter un exercice sur intersection d'une droite et d'un plan (équation paramétrique – équation cartésienne)

Le 31 mars 2022

On considère le plan P d'équation cartésienne $4x+3y-2z+3=0$ et la droite D admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.
Démontrer que D et P sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.

$4t+3(3+t)-2(3+2t)+3=0$
$3t+6=0$
$t=-2$

$A(-2\,;1\,;-1)$

Le 15-2-2023

Livre Barbazo Terminale spécialité page 391

Exercice 1

Soit P le plan d'équation cartésienne $6x+3y+z-12=0$.
Le point $A(5\,;-1\,;-7)$ appartient-il à P ?

$A\notin P$

Exercice 2

Soit P le plan contenant le point $A(3\,;-2\,;5)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\,(4\,;2\,;-1)$ pour vecteur normal.
$B(1\,;-1\,;-1)$ appartient-il à P ?

Corrigé

Série 1

$\boxed{1}$ Calculer dans chacun des cas suivants le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants :
$\vec{u}\,(-3\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}\,(2\,;0\,;5)$; $\vec{u}\,(1\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}\,(2\,;3\,;-2)$; $\vec{u}\,(7\,;-1\,;2)$ et $\vec{v}\,(-3\,;-11\,;5)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\times2+(-1)\times0+0\times5=-6$
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-7$
c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux)

On vérifie avec la calculatrice Numworks.

$\boxed{2}$ On donne les points $A(0\,;-1\,;-1)$, $B(5\,;2\,;-1)$, $C(3\,;3\,;3)$, $D(1\,;0\,;-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}(5\,;3\,;0)$

$\overrightarrow{CD}(-2\,;-3\,;-5)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=5\times(-2)+3\times(-3)+0\times(-5)=-19$

On vérifie avec la calculatrice Numworks.

$\boxed{3}$ On considère les points $A(2\,;2\,;1)$, $B(5\,;-1\,;3)$, $C(0\,;4\,;-3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}(3\,;-3\,;2)$

$\overrightarrow{AC}(-2\,;2\,;-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-20$

On vérifie avec la calculatrice Numworks.

$\boxed{4}$ On considère les points $A(2\,;-3\,;4)$, $B(1\,;2\,;-11)$, $C(-8\,;3\,;4)$, $D(-3\,;10\,;6)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

$\overrightarrow{AB}(-1\,;5\,;-15)$

$\overrightarrow{CD}(5\,;7\,;2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-1\times5+5\times7-15\times2=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux et, par conséquent, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

5

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$:

$\vec{u}\,(1\,;2\,;2)$ $\quad\quad$ $\vec{u}\,(-2\,;-3\,;6)$ $\quad\quad$ $\vec{u}\,(9\,;12\,;-8)$

a) $\vec{u}\,(1\,;2\,;2)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$

b) $\vec{u}\,(-2\,;-3\,;6)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{49} = 7$

c) $\vec{u}\,(9\,;12\,;-8)$

$\|\vec{u}\| = 17$

On vérifie avec la calculatrice Numworks.

6 On considère les points $A(0\,;1\,;1)$ et $B(1\,;-1\,;0)$.

Déterminer la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

1ère méthode :

Dans le cours, on a la propriété suivante :

Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs quelconques non nuls de l'espace.

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Il est aussi bien de refaire la démarche.

On a $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\times OB}$.

On commence donc par effectuer le calcul du produit scalaire figurant au numérateur et des deux distances figurant au dénominateur.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -1\times0+1\times(-1)+0\times(-1) = -1$

$OA = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$OB = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$

Ancienne version :

On peut donc écrire $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos\widehat{AOB} = -1$ ce qui donne $2\cos\widehat{AOB} = -1$.

$$\cos\widehat{AOB} = \frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Or la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ est comprise entre 0 et π.

On en déduit que $\widehat{AOB} = \dfrac{2\pi}{3}$.

On peut aussi écrire $\widehat{AOB} = \text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

2e méthode :

Utiliser la formule de Pythagore généralisée (Al Kashi).
Cette méthode est à éviter par rapport à la précédente, plus simple.

7 Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

Faire une figure assez grande.

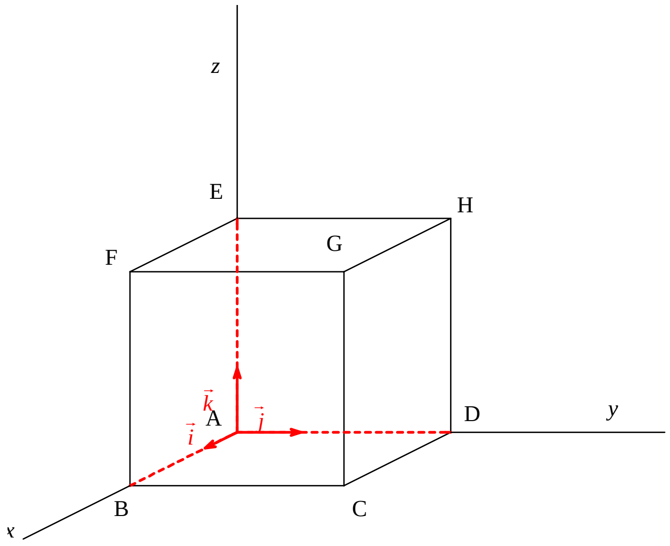
On pose $\vec{i} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

En utilisant le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Figure à faire

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

Le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc un repère orthonormé de l'espace.



Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ servent à définir le repère.

Le repère $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé auxiliaire qui va nous permettre de démontrer commodément une propriété du cube.

On va utiliser la propriété fondamentale suivante :

> Soit P un plan de l'espace.
> Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
> Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires de P.
> $\vec{u}$ est un vecteur normal à P si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.

La condition « $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ » est équivalente à $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

On va démontrer par exemple que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$.

On commence par chercher les coordonnées de tous les points dans le repère.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\mathrm{B}\left|\begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\mathrm{C}\left|\begin{matrix}a\\a\\0\end{matrix}\right.$ $\mathrm{D}\left|\begin{matrix}0\\a\\0\end{matrix}\right.$ $\mathrm{E}\left|\begin{matrix}0\\0\\a\end{matrix}\right.$ $\mathrm{F}\left|\begin{matrix}a\\0\\a\end{matrix}\right.$ $\mathrm{G}\left|\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}\right.$ $\mathrm{H}\left|\begin{matrix}0\\a\\a\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\left|\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}\right.$ $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\left|\begin{matrix}-a\\a\\0\end{matrix}\right.$ $\overrightarrow{\mathrm{BE}}\left|\begin{matrix}-a\\0\\a\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = a \times (-a) + a \times a + 0 \times 0 = -a^2 + a^2 = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}} = a \times (-a) + a \times 0 + a \times a = -a^2 + a^2 = 0$

D'après les résultats des deux produits scalaires, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$.
Or $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE).
Donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

$\boxed{7}$ (ex. $\boxed{24}$ de l'ancienne)

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}3\\2\\-1\end{matrix}\right.$ $\mathrm{B}\left|\begin{matrix}5\\0\\1\end{matrix}\right.$ $\mathrm{C}\left|\begin{matrix}0\\3\\-2\end{matrix}\right.$

Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{u}$ au plan (ABC).

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{matrix}2\\-2\\2\end{matrix}\right.$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\left|\begin{matrix}-3\\1\\-1\end{matrix}\right.$

On observe qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont donc pas colinéaires et, par conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés.

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC), on utilise la propriété suivante du cours.

> On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.
>
> Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u}\left|\begin{matrix}0\\-4\\-4\end{matrix}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En divisant les coordonnées par – 4, on peut aussi dire que le vecteur $\vec{v}\left|\begin{array}{l}0\\1\\1\end{array}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En effet, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à (ABC).

On peut vérifier directement par, calculs de produits scalaires, que ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

8 correspond au **4** de l'ancienne feuille

A(2 ; 1 ; 3), B(1 ; 0 ; – 1), C(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(1 ; – 1 ; 1)

1°) **Démontrons que les points C, D, E ne sont pas alignés.**

$\overrightarrow{CD}\,(-4\,;4\,;0)$

$\overrightarrow{CE}\,(-3\,;-1\,;1)$

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Ils ont la même origine donc **les points C, D, E ne sont pas alignés**.

2°) **Démontrons que (AB) ⊥ (CDE).**

Point-méthode :

Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Il suffit de démontrer que $(AB)\perp(CD)$ et que $(AB)\perp(CE)$ (en effet, (CD) et (CE) sont deux droites sécantes du plan (CDE) ; on utilise la propriété « si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan »).

$\overrightarrow{AB}\,(-1\,;-1\,;-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{CD}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{CD}}+z_{\overrightarrow{AB}}\times z_{\overrightarrow{CD}}=(-1)\times(-4)+(-1)\times4+(-4)\times0=4-4+0=0$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ d'où $(AB)\perp(CD)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{CE}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{CE}}+z_{\overrightarrow{AB}}\times z_{\overrightarrow{CE}}=-1\times(-3)+(-1)\times(-1)+(-4)\times1=3+1-4=0$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CE}$ d'où $(AB)\perp(CE)$.

On a donc $(AB)\perp(CD)$ et $(AB)\perp(CE)$.

(autre rédaction : « Donc (AB) est orthogonale à (CE) et à (CD) »)

Par suite, (AB) ⊥ (CDE).

9

a) $\vec{w}\left|\begin{array}{l}2\times4-(-2)\times3=14\\(-2)\times(-1)-4\times4=-14\\4\times3-2\times(-1)=14\end{array}\right.$

On peut diviser toutes les coordonnées de $\vec{w}$ par 14.

Le vecteur $\overrightarrow{w'}\left|\begin{array}{l}1\\-1\\1\end{array}\right.$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) $\vec{w}\left|\begin{array}{l}2\times0-(-1)\times5=5\\(-1)\times5-3\times0=-5\\3\times5-2\times5=5\end{array}\right.$

On peut diviser toutes les coordonnées de $\vec{w}$ par 5.

Le vecteur $\overrightarrow{w'}\left|\begin{array}{l}1\\-1\\1\end{array}\right.$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) $\vec{w}\left|\begin{array}{l}(-2)\times1-7\times5=-37\\7\times(-4)-6\times1=-34\\6\times5-(-2)\times(-4)=22\end{array}\right.$

On vérifie avec la fonction cross de la calculatrice Numworks.

10

Correspond au **24** de l'ancienne feuille

$A\left|\begin{array}{l}3\\2\\-1\end{array}\right.\qquad B\left|\begin{array}{l}5\\0\\1\end{array}\right.\qquad C\left|\begin{array}{l}0\\3\\-2\end{array}\right.$

Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{u}$ au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}2\\-2\\2\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}-3\\1\\-1\end{array}\right.$

On observe qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et pas conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés.
Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC), on utilise la propriété suivante du cours.

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.   Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u}\left|\begin{array}{l}(-2)\times(-1)-2\times1=0\\2\times(-3)-2\times(-1)=-4\\2\times1-(-2)\times(-3)=-4\end{array}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En divisant les coordonnées par – 4, on peut aussi dire que le vecteur $\vec{v}\left|\begin{array}{l}0\\1\\1\end{array}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En effet, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à (ABC).

On peut vérifier directement par, calculs de produits scalaires, que ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Série 2

1 Vecteur normal à un plan

Rappel de cours :

Si *P* est un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ ($(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$), alors le vecteur de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal à *P*.

Équation de *P*	**Coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à *P***
$2x-6y+2z-7=0$	$(2\,;-6\,;2)$ ou $(1\,;-3\,;1)$
$z-x=0$	$(-1\,;0\,;1)$ ou $(1\,;0\,;-1)$
$x+2y=5-3z$	$(1\,;2\,;3)$

L'équation $z-x=0$ est équivalente à $-x+z=0$ que l'on peut aussi écrire $-x+0y+z=0$ ou encore à $x-z=0$
L'équation $x+2y=5-3z$ est équivalente à $x+2y+3z-5=0$.

2

P : $3x+y-4z+1=0$

1°) **Déterminons un vecteur $\vec{n}$ normal à *P*.**

D'après la formule du cours donnant les coordonnées d'un vecteur normal à un plan dont on connaît une équation cartésienne, on peut dire que le vecteur $\vec{n}(3\,;1\,;-4)$ est un vecteur normal à *P*.

2°) **Déterminons une équation cartésienne du plan *Q* parallèle à *P* passant par le point A(1 ; 2 ; 0).**

P // *Q* donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à *Q*.

Si deux plans sont parallèles, alors tout vecteur normal à l'un est normal à l'autre.

1ère méthode :

P // Q donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à Q.

Soit M un point quelconque de l'espace.

On note $(x\,;y\,;z)$ ses coordonnées.

$$\begin{aligned}
\text{M} \in Q &\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}} \bullet \vec{n} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\times 3 + (y-2)\times 1 + (z-0)\times(-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x + y - 4z - 5 = 0
\end{aligned}$$

Attention : x, y, z ne sont pas des inconnues.
On ne dit pas que l'on remplace l'inconnue x par …, l'inconnue y par ….

2e méthode :

P // Q donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à Q.

Q admet donc une équation cartésienne de la forme $3x + y - 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Or $\text{A} \in Q$ donc $3x_{\text{A}} + y_{\text{A}} - 4z_{\text{A}} + d = 0$ soit $3 + 2 - 0 + d = 0$ donc $d = -5$.

On en déduit que **Q a pour équation cartésienne $3x + y - 4z - 5 = 0$**.

$\boxed{3}$

$P :\ x + y - 2z + 5 = 0$
$\text{A}(-5\,;-4\,;4)$
$\text{B}(1\,;2\,;-8)$

Déterminons si la droite (AB) est orthogonale au plan *P*.

On sait que le vecteur $\vec{n}(1\,;1\,;-2)$ est un vecteur normal à P.
$\overrightarrow{\text{AB}}(6\,;6\,;-12)$
On observe que $\overrightarrow{\text{AB}} = 6\vec{n}$.
On en déduit que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires.

On peut effectuer le calcul des 3 déterminants. Il est cependant plus simple de faire apparaître un coefficient de colinéarité.

Par suite, on a $(\text{AB}) \perp P$.

N.B. : On ne peut pas utiliser de vecteur directeur pour un plan. En effet, il n'y a pas de vecteur directeur pour un plan. Il faut deux vecteurs non colinéaires pour diriger un plan.

$\boxed{4}$

A(2 ; 1 ; 3), B(1 ; 0 ; – 1), C(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(1 ; – 1 ; 1)

1°) **Déterminons si les points C, D, E sont alignés.**

On utilise la colinéarité des vecteurs.

$\overrightarrow{\text{CD}}(-4\,;4\,;0)$

$\overrightarrow{\text{CE}}(-3\,;-1\,;1)$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{CD}}$ et $\overrightarrow{\text{CE}}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Ils ont la même origine donc **les points C, D, E ne sont pas alignés**.

2°) **Démontrons que (AB) ⊥ (CDE).**

Point-méthode :

Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Il suffit de démontrer que $(\text{AB}) \perp (\text{CD})$ et que $(\text{AB}) \perp (\text{CE})$ (en effet, (CD) et (CE) sont deux droites sécantes du plan (CDE) ; on utilise la propriété « si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan »).

$\overrightarrow{\text{AB}}(-1\,;-1\,;-4)$

$\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{CD}} = x_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times x_{\overrightarrow{\text{CD}}} + y_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times y_{\overrightarrow{\text{CD}}} + z_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times z_{\overrightarrow{\text{CD}}} = (-1)\times(-4) + (-1)\times 4 + (-4)\times 0 = 4 - 4 + 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{CD}}$ d'où $(\text{AB}) \perp (\text{CD})$.

$\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{CE}} = x_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times x_{\overrightarrow{\text{CE}}} + y_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times y_{\overrightarrow{\text{CE}}} + z_{\overrightarrow{\text{AB}}} \times z_{\overrightarrow{\text{CE}}} = -1\times(-3) + (-1)\times(-1) + (-4)\times 1 = 3 + 1 - 4 = 0$

Donc $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{CE}}$ d'où $(\text{AB}) \perp (\text{CE})$.

On a donc $(\text{AB}) \perp (\text{CD})$ et $(\text{AB}) \perp (\text{CE})$.

(autre rédaction : « Donc (AB) est orthogonale à (CE) et à (CD) »)

Par suite, (AB) ⊥ (CDE).

$\boxed{5}$

P : $x+2y+3z-6=0$

1°) **Déterminons les points d'intersection de *P* avec les axes du repère.**

Rappel :

• L'axe $(\mathrm{O}x)$ est l'ensemble des points d'ordonnée et de cote nulles.

• L'axe $(\mathrm{O}y)$ est l'ensemble des points d'abscisse et de cote nulles.

• L'axe $(\mathrm{O}z)$ est l'ensemble des points d'abscisse et d'ordonnée nulles.

Pour déterminer l'intersection de *P* avec l'axe (O*x*), on utilise le rappel sur la caractérisation des points de l'axe (O*x*).

Pour déterminer l'intersection de *P* avec l'axe (O*y*), on utilise le rappel sur la caractérisation des points de l'axe (O*y*).

Pour déterminer l'intersection de *P* avec l'axe (O*z*), on utilise le rappel sur la caractérisation des points de l'axe (O*z*).

• Soit A le point d'intersection de *P* avec l'axe (O*x*).

$\mathrm{A}\in(\mathrm{O}x)$ donc $y_{\mathrm{A}}=0$ et $z_{\mathrm{A}}=0$.
$\mathrm{A}\in P$ donc $x_{\mathrm{A}}+2y_{\mathrm{A}}+3z_{\mathrm{A}}-6=0$ d'où $x_{\mathrm{A}}+2\times 0+3\times 0-6=0$ soit $x_{\mathrm{A}}-6=0$ donc $x_{\mathrm{A}}=6$.

• Soit B le point d'intersection de *P* avec l'axe (O*y*).

$\mathrm{B}\in(\mathrm{O}y)$ donc $x_{\mathrm{B}}=0$ et $z_{\mathrm{B}}=0$.
$\mathrm{B}\in P$ donc $x_{\mathrm{B}}+2y_{\mathrm{B}}+3z_{\mathrm{B}}-6=0$ d'où $0+2\times y_{\mathrm{B}}+3\times 0-6=0$ soit $2y_{\mathrm{B}}-6=0$ donc $y_{\mathrm{B}}=3$.

• Soit C le point d'intersection de *P* avec l'axe (O*z*).

$\mathrm{C}\in(\mathrm{O}z)$ donc $x_{\mathrm{C}}=0$ et $y_{\mathrm{C}}=0$.
$\mathrm{C}\in P$ donc $x_{\mathrm{C}}+2y_{\mathrm{C}}+3z_{\mathrm{C}}-6=0$ d'où $0+2\times 0+3\times z_{\mathrm{C}}-6=0$ soit $3z_{\mathrm{C}}-6=0$ donc $z_{\mathrm{C}}=2$.

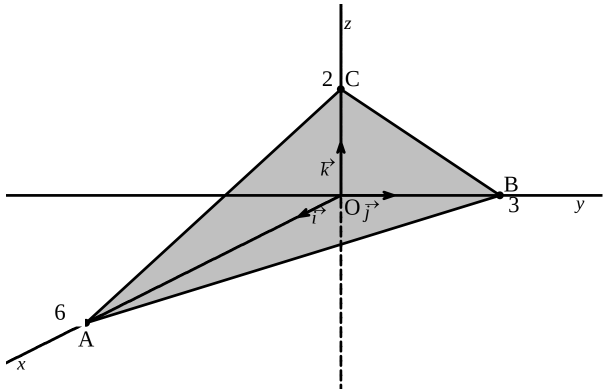
Conclusion :

$P\cap(\mathrm{O}x)=\{\mathrm{A}\}$ avec A(6 ; 0 ; 0) ; $P\cap(\mathrm{O}y)=\{\mathrm{B}\}$ avec B(0 ; 3 ; 0) ; $P\cap(\mathrm{O}z)=\{\mathrm{C}\}$ avec C(0 ; 0 ; 2)

Il s'agit d'égalités d'ensembles.

2°) Le plan est représenté par le triangle ABC.

N.B. En général, on représente un plan par un parallélogramme ; c'est l'un des rares cas où l'on représente un plan par un triangle. Il faut cependant garder à l'esprit qu'un plan est infini dans toutes les directions.



On dit l'on a représenté le plan *P* par ses **traces** sur les plans de base.

$\boxed{6}$ **Application directe du cours : équations de plans parallèles aux plans de coordonnées**

P_1 : $z=4$
P_2 : $x=2$
P_3 : $y=-5$

Solution détaillée :

$\mathrm{A}(2\,;-5\,;4)$

P_1 : plan passant par A et parallèle au plan (*x*O*y*)

P_2 : plan passant par A et parallèle au plan (*y*O*z*)

P_3 : plan passant par A et parallèle au plan (*z*O*x*)

(Il n'est pas très aisé ni très utile de faire une figure.)

Déterminons une équations des plans P_1, P_2, P_3.

• Le plan P_1 passe par A et est parallèle au plan (*x*O*y*) donc P_1 a pour équation $z=z_{\mathrm{A}}$ soit $\boldsymbol{z=4}$.

• Le plan P_2 passe par A et est parallèle au plan (*y*O*z*) donc P_2 a pour équation $x=x_{\mathrm{A}}$ soit $\boldsymbol{x=2}$.

• Le plan P_3 passe par A et est parallèle au plan (*z*O*x*) donc P_3 a pour équation $y=y_{\mathrm{A}}$ soit $\boldsymbol{y=-5}$.

7 **Trouver la position relative de deux plans dans l'espace**

P et *Q* sont strictement parallèles.

Solution détaillée :

$P: \ x-2y+z-1=0$

$Q: \ 2x-4y+2z-1=0$

Étudions les positions relatives de *P* et *Q*.

Position de deux plans dans l'espace :

- plans parallèles (strictement ou confondus)

- plans sécants selon une droite

Il s'agit de déterminer les positions relatives de deux plans dans l'espace c'est-à-dire de déterminer si les plans sont parallèles (strictement ou confondus) ou s'ils sont sécants (sécants selon une droite).
Pour répondre à la question, on utilise un vecteur normal à chacun des deux plans.
On pourrait aussi utiliser un repère de chacun des plans mais cette méthode serait beaucoup plus longue à mettre en œuvre. On aime donc mieux passer par les vecteurs normaux.

D'après l'équation cartésienne de *P*, on peut dire que le vecteur $\vec{n}(1\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal à *P*.
D'après l'équation cartésienne de *Q*, on peut dire que le vecteur $\vec{n'}(2\,;-4\,;2)$ est un vecteur normal à *Q*.
On remarque que $\vec{n'}=2\vec{n}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Par suite, *P* et *Q* sont parallèles.

Q a aussi pour équation cartésienne $x-2y+z-\frac{1}{2}=0$.
Or *P* a pour équation cartésienne $x-2y+z-1=0$.

En comparant ces deux équations cartésiennes, on peut dire que les plans *P* et *Q* ne sont pas confondus (car les équations ont le même début $x-2y+z$ mais le dernier terme qui diffère).

On peut donc en déduire que ***P* et *Q* sont strictement parallèles** (c'est-à-dire non confondus).

Autre façon :

P a pour équation $x-2y+z=1$.

Q a pour équation $x-2y+z=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}\neq 1$ donc *P* et *Q* sont strictement parallèles car il n'existe pas de triplet $(x\,;y\,;z)$ vérifiant les deux équations.

8 *D* : droite de repère (A ; $\vec{u}$) avec A(– 3 ; 1 ; 4) et $\vec{u}\left(-1\,;\frac{3}{2}\,;2\right)$.

1°) **Donnons un système d'équations paramétriques de *D*.**

On applique la formule du cours sur les équations paramétriques de droites.

On choisit soi-même la lettre pour désigner le paramètre (pas de lettre imposée).
Ce paramètre est souvent noté *t* ou λ.

Un système d'équations paramétriques de *D* s'écrit $\begin{cases} x=-3-t \\ y=1+\frac{3}{2}t \\ z=4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

N.B. : Il n'y a pas d'équations cartésiennes de droites dans l'espace.

2°) **Calculons les coordonnées du point d'intersection I de *D* avec le plan (*x*O*y*).**
Le plan (*x*O*y*) a pour équation *z* = 0 donc $z_{\text{I}}=0$.

On utilise ensuite le système d'équations paramétriques de la droite *D*.
Le paramètre *t* du point I sur la droite *D* vérifie l'équation 4 + 2*t* = 0.
Donc *t* = – 2.
Grâce au système d'équations paramétriques de *D*, on obtient :

$x_{\text{I}}=-3-(-2)=-1$ et $y_{\text{I}}=1+\frac{3}{2}\times(-2)=1-3=-2$.

D'où **I(– 1 ; – 2 ; 0)**.

9 *D* $\begin{cases} x=1-t \\ y=4+t \\ z=3-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

1°) **Donnons un repère de *D*.**

Repère d'une droite :

On appelle **repère d'une droite** (dans le plan ou dans l'espace) un couple formé d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.

Une droite admet une infinité de repères.

Conventionnellement, un repère est désigné en écrivant d'abord le point puis le vecteur directeur.

Lorsque l'on demande un repère d'une droite, on doit donner un point et un vecteur directeur de cette droite.

Un repère de la droite *D* est (A ; $\vec{u}$) avec A(1 ; 4 ; 3) et $\vec{u}$(– 1 ; 1 ; – 2).

2°) **Déterminons si les points E(6 ; – 1 ; 13) et F(2 ; 3 ; 1) appartiennent à *D*.**

Pour savoir si le point E appartient ou non à *D*, on cherche s'il existe un réel *t* tel que $\begin{cases} x_E = 1-t \\ y_E = 4+t \\ z_E = 3-2t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} 6 = 1-t \\ -1 = 4+t \\ 13 = 3-2t \end{cases}$.

Ce système est pléthorique (du mot pléthore = excès) en équations par rapport au nombre d'inconnues.

Méthode :

Prendre chaque équation et résoudre.
Si la valeur de *t* est la même pour les trois équations, alors le système admet une unique solution et l'on pourra dire que le point appartient bien à la droite *D*.
Si les valeurs de *t* sont différentes pour les trois équations, alors on pourra dire que le système d'admet pas de solution.

Ici, on obtient la même valeur pour les trois équations : $t = -5$.

Le système admet bien un unique nombre solution donc **E ∈ *D*** ($t = -5$).

De même pour le point F, on cherche s'il existe un réel *t* solution du système $\begin{cases} 2 = 1-t \\ 3 = 4+t \\ 1 = 3-2t \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$.

On remarque qu'il n'existe pas de nombre solution donc **F ∉ *D***.

Ou variante :

Le système n'admet pas de solution donc le point F n'appartient pas à *D*.

Il n'y a pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace.
On peut définir une droite par un système de deux équations cartésiennes de plans (selon la propriété « deux plans sécants de l'espace se coupent selon une droite ») ou par un système d'équations paramétriques.

$\boxed{10}$ $D \,//\, D'$ (déterminer un vecteur directeur de chacune des deux droites et démontrer qu'ils sont colinéaires)

Solution détaillée :

$D \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad D' \begin{cases} x = -9 + \frac{9}{2}t' \\ y = 5 + 3t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

• Attention : $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

• On pourrait utiliser le même paramètre *t* mais on aurait un problème dans le raisonnement (problème d'intersection de droites).

On peut dire que le vecteur $\vec{u}\,(3\,;\,2\,;\,2)$ est un vecteur directeur de *D* et que le vecteur $\vec{v}\,(\frac{9}{2}\,;\,3\,;\,3)$ est un vecteur directeur de D'.

Attention : On ne peut pas parler de vecteur normal à une droite dans l'espace.
Une droite dans l'espace pourrait admettre une infinité de vecteurs normaux au sens où il y a une infinité de vecteurs orthogonaux.
Mais ces vecteurs ne sont pas tous colinéaires entre eux (dans l'espace).
On ne parle donc pas de vecteur normal à une droite de l'espace.

On observe que $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
Par suite, $D \,//\, D'$.

On peut se demander si les deux droites sont strictement parallèles ou confondues.

Il y a pour cela deux méthodes pour répondre à la question.

La méthode la plus satisfaisante consiste à déterminer un point de *D* et à voir s'il appartient à D'.
On voit alors si *D* et D' sont confondues ou strictement parallèles.

1ère méthode :

Déterminer un point de *D* et voir s'il appartient à D'.

Le point O(0 ; 0 ; 0) obtenu pour $t = 0$ appartient à *D*.

On peut démontrer que O ∉ *D'*.

On voit qu'il n'appartient pas à D' (car on n'obtiendrait pas la même valeur de t' en résolvant le système formé par chacune des équations paramétriques égale à 0).

Donc les droites ***D* et *D'* sont strictement parallèles**.

2[e] méthode :

Étudier l'intersection de *D* et de D'.
On trouve une intersection vide (ensemble vide). En conséquence de quoi, les droites *D* et *D*' sont strictement parallèles (sinon on trouverait $D \cap D' = D = D'$).

Autre façon :

Un vecteur directeur de *D* est $\vec{u}\,(3\,;2\,;2)$.

Un vecteur directeur de *D*′ est $\vec{v}\left(\frac{9}{2}\,;3\,;3\right)$.

$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Par conséquent, *D* // *D*′.

11 $D \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1°) **Démontrons que *D* est parallèle à l'un des plans de coordonnées.**

D'après la troisième équation du système d'équations paramétriques, on remarque que la droite *D* est incluse dans le plan *P* d'équation $z = -3$.

D'autre part, *P* est parallèle au plan (*x*O*y*) (en effet, un plan parallèle au plan (*x*O*y*) admet une équation de la forme $z = a$ où a est un réel fixé). Or si deux plans sont parallèles, alors toute droite incluse dans l'un est parallèle à l'autre. Donc *D* // (*x*O*y*).

2°) **Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite D' parallèle à *D* passant par le point A(– 1 ; 7 ; 0).**

Le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;4\,;0)$ est un vecteur directeur de *D*.
Or *D* // *D*' donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de *D*'.

Si deux droites sont parallèles, alors tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

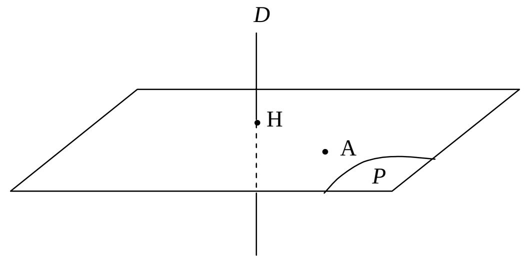
Donc $D' \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 7 + 4t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Autre façon :

1°) Un vecteur directeur de *D* est $\vec{u}\,(-1\,;4\,;0)$ donc la droite *D* est parallèle au plan (*x*O*y*).

2°) Un système d'équations paramétriques de *D*′ s'écrit $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 7 + 4t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

12 Faire une figure assez soignée pour se représenter la situation.



1°) $P : x - y + 2z + 1 = 0$; 2°) On trouve $t = -\frac{1}{6}$; $\mathrm{H}\left(\frac{5}{6}\,;\frac{7}{6}\,;-\frac{1}{3}\right)$

Solution détaillée :

$D \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

A(1 ; 2 ; 0)

1°) Déterminons une équation cartésienne du plan *P* passant par A et orthogonal à *D*.

D'après le système d'équations paramétriques de *D* donné dans l'énoncé, on peut dire que le vecteur $\vec{u}(1;-1;2)$ est un vecteur directeur de *D*.

Or $D \perp P$ par hypothèse donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à *P*.

Par conséquent, *P* admet une équation cartésienne de la forme $x - y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Or le point A appartient à *P* donc $1 - 2 + d = 0$ d'où $d = 1$.
Une équation cartésienne de *P* s'écrit donc $x - y + 2z + 1 = 0$.

Autre version :

Un vecteur directeur de *D* est le vecteur $\vec{u}(1;-1;2)$.

Une équation cartésienne du plan *P* est $x - y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Or A(1 ; 2 ; 0) est un point de *P* donc $1 - 2 + 2 \times 0 + d = 0$ d'où $d = 1$.
Donc $P : x - y + 2z + 1 = 0$.

2°) Déterminons les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur *D*.

Le point H est le projeté orthogonal de A sur *D*.
Par définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite, H est le point d'intersection de *D* et de *P* (car *P* est orthogonal à *D* par hypothèse).
Le paramètre *t* de H vérifie donc l'équation $(1+t)-(1-t)+2\times 2t+1=0 \quad (1)$ (obtenue en utilisant l'équation cartésienne de *P* trouvée dans la question précédente).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 1+t-1+t+4t+1=0\\ &\Leftrightarrow 6t=-1\\ &\Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

On reprend le système d'équations paramétriques de *D* pour en déduire les coordonnées de H.

On a $\begin{cases} x_H=1-\frac{1}{6}\\ y_H=1+\frac{1}{6}\\ z_H=2\times\left(-\frac{1}{6}\right)\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_H=\frac{5}{6}\\ y_H=\frac{7}{6}\\ z_H=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

$\mathbf{H\left(\frac{5}{6};\frac{7}{6};-\frac{1}{3}\right)}$

On pourrait résoudre directement le système $\begin{cases} x=1+t\\ y=1-t\\ z=2t\\ x-y+2z+1=0\end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

On pourrait calculer distance AH (distance de A à la droite *D*, qu'on note d(A, *D*)).

Le 7-3-2023

Exercices géométrie dans l'espace niveau (1)

Exercice $\boxed{12}$:

Calculatrice Numworks

$\begin{cases} x=1+t\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}$

équation de plan

calculatrice

$\boxed{13}$

1°) $\begin{cases} x=-3+t\\ y=2+t\\ z=1-t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$; 2°) Rédaction type : « Le paramètre *t* du point A' vérifie l'équation … ».

On trouve $t=1$; $\text{A}'(-2\,;3\,;0)$.

Solution détaillée :

$P:\ x+y-z=1$

$\text{A}(-3;2;1)$

1°) **Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite *D* passant par le point A et orthogonale à *P*.**

P a pour équation cartésienne $x+y-z-1=0$ (forme équivalente à l'équation donnée dans l'énoncé).
D'après cette équation cartésienne de *P*, le vecteur $\vec{u}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à *P*.
Or $D\perp P$ par hypothèse, donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de *D*.
Or $\text{A}\in D$ donc un système d'équations paramétriques de *D* s'écrit $\begin{cases} x=-3+t\\ y=2+t\\ z=1-t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

2°) **Déduisons-en les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan *P*.**

Le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan *P*.
Par définition du projeté orthogonal d'un point sur un plan, H est le point d'intersection de *D* et *P* (car *D* est orthogonale à *P* par hypothèse).
Le paramètre *t* du point H vérifie donc l'équation : $-3+t+2+t-(1-t)=1 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -3+t+2+t-1+t=1\\ &\Leftrightarrow 3t=3\\ &\Leftrightarrow t=1\end{aligned}$$

On a donc $\begin{cases} x_H=-3+1\\ y_H=2+1\\ z_H=1-1\end{cases}$, soit $\begin{cases} x_H=-2\\ y_H=3\\ z_H=0\end{cases}$.

Conclusion : **H(– 2 ; 3 ; 0)**

14

P : $x+2y+3z-5=0$

$A(2\,;-2\,;2)$

1°) Calculons d(A, *P*).

On applique directement la formule donnant la distance d'un point à un plan de l'espace.

$d(A, P)=\dfrac{|1\times2+2\times(-2)+3\times2-5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$ (attention à la présence de barres de valeur absolue)

$=\dfrac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}$

$=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+4+9}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

On peut laisser la racine carrée au dénominateur.
Il est inutile de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{14}$. Le résultat obtenu est alors $\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$, plus compliqué et sans intérêt ici (même résultat que celui affiché avec la calculatrice).

2°) S : sphère de centre A tangente à P

Déterminons une équation de *S*

La sphère S a pour rayon $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ d'après le 1°).

Une équation de S s'écrit $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)^2$ soit $\boldsymbol{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\dfrac{1}{14}}$.

Il n'est pas utile de développer cette équation pour la mettre sous forme cartésienne.

15 **Équation d'un plan médiateur**

$I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$

Rappel : coordonnées du milieu d'un segment

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

P : $2x+8y-8z+7=0$

Solution détaillée :

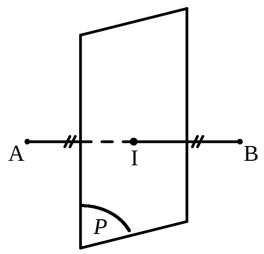
A(1 ; 2 ; – 1) ; B(0 ; – 2 ; 3)

P : plan médiateur de [AB]

Déterminons une équation cartésienne de *P*.

1^ère^ méthode :

P est le plan orthogonal (on n'utilise pas l'adjectif « perpendiculaire ») à (AB) passant par le milieu I de [AB].



$$I\left|\begin{array}{l} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=0\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}-1\\-4\\4\end{array}\right.$$

(AB) $\perp$ P (attention à l'ordre : quand le symbole $\perp$ est utilisé pour exprimer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, on écrit d'abord la droite puis ensuite la droite) donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à P.

Par conséquent, P admet une équation cartésienne de la forme $-x-4y+4z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$\mathrm{I} \in P$ donc $-x_{\mathrm{I}} - 4y_{\mathrm{I}} + 4z_{\mathrm{I}} + d = 0$ soit $-\dfrac{1}{2} + 4 + d = 0$ d'où $d = -\dfrac{7}{2}$.

P admet donc pour équation cartésienne $-x - 4y + 4z - \dfrac{7}{2} = 0$.

En multipliant les deux membres de l'équation par – 2, on en déduit que P a pour équation cartésienne $2x + 8y - 8z + 7 = 0$.

Autre version :

P est le plan médiateur de [AB] donc P est le plan perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de [AB].

$\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\
&\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2} - 4y + 4z - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow -x - 4y + 4z - \frac{7}{2} = 0
\end{aligned}$$

2[e] méthode :

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = \mathrm{BM}^2 \\
&\Leftrightarrow (x - x_{\mathrm{A}})^2 + (y - y_{\mathrm{A}})^2 + (z - z_{\mathrm{A}})^2 = (x - x_{\mathrm{B}})^2 + (y - y_{\mathrm{B}})^2 + (z - z_{\mathrm{B}})^2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \\
&\Leftrightarrow 2x + 8y - 8z + 7 = 0
\end{aligned}$$

Autre version :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 \\
&\Leftrightarrow (x_{\mathrm{A}} - x)^2 + (y_{\mathrm{A}} - y)^2 + (z_{\mathrm{A}} - z)^2 = (x_{\mathrm{B}} - x)^2 + (y_{\mathrm{B}} - y)^2 + (z_{\mathrm{B}} - z)^2 \\
&\Leftrightarrow (1-x)^2 + (2-y)^2 + (1+z)^2 = (-x)^2 + (-2-y)^2 + (3-z)^2 \\
&\Leftrightarrow -2x - 8y + 8z - 7 = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{16}$ Équation d'une sphère définie par un diamètre

Les deux méthodes donnent une équation cartésienne de $\mathcal{S}$: $x^2 + y^2 + z^2 - y - 4z = 0$.

Solution détaillée :

$\mathrm{A}(2\,;1\,;2)$ et $\mathrm{B}(-2\,;0\,;2)$

$\mathcal{S}$: sphère de diamètre [AB]

1[ère] méthode :

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}} + z_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} \times z_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-x)(-2-x) + (1-y)(0-y) + (2-z)(2-z) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - y - 4z = 0
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ s'écrit $x^2 + y^2 + z^2 - y - 4z = 0$.

Variante meilleure :

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{BM}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{BM}}} + z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}} \times z_{\overrightarrow{\mathrm{BM}}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (y-1)y + (z-2)(z-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - y - 4z = 0
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ s'écrit $x^2 + y^2 + z^2 - y - 4z = 0$.

Autre version :

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M}\in\mathcal{S} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,(2-x\,;1-y\,;2-z)$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{MB}}\,(-2-x\,;-y\,;2-z)$

$\Leftrightarrow (2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)+(2-z)(2-z)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-4z=0$

2^e méthode : en utilisant le centre et le rayon de $\mathcal{S}$

On calcule la distance AB.

On commence par calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-4\,;-1\,;0)$

On a donc $\mathrm{AB}=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{17}$.

On peut sinon appliquer la formule de distance de deux points dans le plan.

$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+0^2}$

$\mathrm{AB}=\sqrt{17}$

On calcule les coordonnées du milieu I de [AB].

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_\mathrm{I}=\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}=0\\ y_\mathrm{I}=\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}=\dfrac{1}{2}\\ z_\mathrm{I}=\dfrac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}=2\end{array}\right.$$

Le diamètre de $\mathcal{S}$ est égal à $\sqrt{17}$ donc son rayon est égal à $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

On aurait aussi pu calculer IA directement.

$\mathcal{S}$ a pour équation $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$ (1).

$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2-y+\dfrac{1}{4}+z^2-4z+4=\dfrac{17}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-4z=0$ (on ordonne l'équation de $\mathcal{S}$)

$\boxed{17}$ On résout le problème à l'aide d'un système.

$t=-2$ et $t'=-1$.

Donc M(– 1 ; – 4 ; 3) et M'(– 2 ; 5 ; 0).

Solution détaillée :

Soit M un point de D associé au paramètre t et M' un point de D' associé au paramètre t'.

$$\text{I milieu de [M M']}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_\mathrm{M}+x_{\mathrm{M'}}}{2}=x_\mathrm{I}\\ \dfrac{y_\mathrm{M}+y_{\mathrm{M'}}}{2}=y_\mathrm{I}\\ \dfrac{z_\mathrm{M}+z_{\mathrm{M'}}}{2}=z_\mathrm{I}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_\mathrm{M}+x_{\mathrm{M'}}=2x_\mathrm{I}\\ y_\mathrm{M}+y_{\mathrm{M'}}=2y_\mathrm{I}\\ z_\mathrm{M}+z_{\mathrm{M'}}=2z_\mathrm{I}\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}\dfrac{1+t+2t'}{2}=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2t+3-2t'}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1-t+1+t'}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+t+2t'=-3\\ 2t+3-2t'=1\\ 1-t+1+t'=3\end{cases}$$

On considère le système formé de la 1^ère et de la 2^e équation.

On le résout (méthode au choix) ; on trouve $\begin{cases}t=-2\\ t'=-1\end{cases}$.

On vérifie que la 3^e équation est satisfaite.

Conclusion :

Pour $t=-2$, on obtient $\begin{cases}x_\mathrm{M}=1-2=-1\\ y_\mathrm{M}=2\times(-2)=-4\\ z_\mathrm{M}=1-(-2)=3\end{cases}$.

Pour $t'=-1$, on obtient $\begin{cases}x_{\mathrm{M'}}=2\times(-1)=-2\\ y_{\mathrm{M'}}=3-2\times(-1)=5\\ z_{\mathrm{M'}}=1-1=0\end{cases}$.

On en déduit que M (– 1 ; – 4 ; 3) et M'(– 2 ; 5 ; 0).

Autre façon de rédiger :

I milieu de [M M'] $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_{\text{M}}+x_{\text{M'}}}{2}=x_{\text{I}} \\ \dfrac{y_{\text{M}}+y_{\text{M'}}}{2}=y_{\text{I}} \\ \dfrac{z_{\text{M}}+z_{\text{M'}}}{2}=z_{\text{I}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+2t'=-3 & (1) \\ 2t+3-2t'=1 & (2) \\ 1-t+1+t'=3 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow t=-4-2t'$ (1')

Compte tenu de (1'), (2) donne alors $3+2(-4-2t')-2t'=1$ soit $t'=-1$.

L'égalité (1') donne alors $t=2$.

L'égalité (3) est vérifiée pour $t=2$ et $t'=-1$.

18 Recherche d'un ensemble de points

$x^2+y^2+z^2-6y+4z-1=0$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(0\ ;3\ ;-2)$ et de rayon $\sqrt{14}$.

Solution détaillée :

$\text{A}(1\,;2\,;-1)$ $\text{B}(2\,;1\,;0)$.

$\mathcal{S}=\{\text{M}\in\mathcal{E}\ /\ 2\text{MA}^2-\text{MB}^2=8\}$

On va chercher une équation de $\mathcal{S}$ pour déterminer sa nature.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\ ;y\ ;z)$.

On commence par calculer à part $2\text{MA}^2-\text{MB}^2$ en fonction de x, y, z.

$\text{MA}^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$ (on note que $\text{MA}^2=\text{AM}^2$ plus commode pour les calculs)

$=x^2-2x+y^2-4y+z^2+2z+6$

$\text{MB}^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2$

$=x^2-4x+y^2-2y+z^2+5$

$2\text{MA}^2-\text{MB}^2=2(x^2-2x+y^2-4y+z^2+2z+6)-(x^2-4x+y^2-2y+z^2+5)$

$=x^2+y^2+z^2-6y+4z+7$

$$\begin{aligned}\text{M}\in\mathcal{S} &\Leftrightarrow 2\text{MA}^2-\text{MB}^2=8\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y+4z+7=8\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y+4z-1=0\ ^*\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-3)^2+(z+2)^2-9-4-1=0\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(0\,;3\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{14}$.

* On tombe sur une équation du type « équation de sphère ».
Pour reconnaître si l'ensemble est bien une équation de sphère, on doit la mettre sous forme canonique.

Ancienne version :

$\text{MA}^2=(1-x)^2+(2-y)^2+(-1-z)^2$

$\text{MA}^2=x^2-2x+y^2-4y+z^2+2z+6$

$\text{MB}^2=(2-x)^2+(1-y)^2+(0-z)^2$

$\text{MB}^2=x^2-4x+y^2-2y+z^2+5$

$$\begin{aligned}\text{M}\in\mathcal{S} &\Leftrightarrow 2\text{MA}^2-\text{MB}^2=8\\ &\Leftrightarrow 2(x^2-2x+y^2-4y+z^2+2z+6)-(x^2-4x+y^2-2y+z^2+5)=8\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y+4z-1=0\ ^*\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-3)^2+(z+2)^2-9-4-1=0\\ &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14\end{aligned}$$

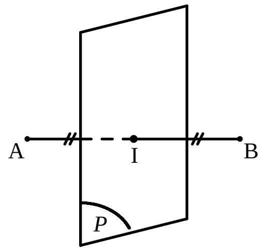
On en déduit que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(0\,;3\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{14}$.

* On tombe sur une équation du type « équation de sphère ».
Pour reconnaître si l'ensemble est bien une équation de sphère, on doit la mettre sous forme canonique.

19

A(0 ; 4 ; 0)

Déterminons une équation du plan médiateur *P* du segment [OA].



On a tout intérêt à faire une figure dans l'espace.

1ère méthode : méthode la plus simple, la plus élégante

Par définition, P est le plan passant par le milieu I de [OA] et orthogonal à la droite (OA).

I(0 ; 2 ; 0)
$A \in (Oy)$ donc la droite (OA) est confondue avec l'axe (Oy).

Donc $P \perp$ (Oy) donc comme le repère est orthonormé, on en déduit que P // (xOz).
Par conséquent, P admet une équation cartésienne de la forme $y = a$.
Comme $I \in P$, P admet donc pour équation cartésienne $y = 2$.

2e méthode : plus maladroite ici

On note I le milieu de [OA].

Calculons les coordonnées de I.

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = 0 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ z_{\mathrm{I}} = 0 \end{array}\right.$$

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 4 \\ 0 \end{array}\right.$$

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{OA} = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \times (x-0) + 4 \times (y-2) + 0 \times (z-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \times (y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

3e méthode : plus maladroit ici

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow MO^2 = MA^2 \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

20

$E_1 : x - 2y + 3z - 5 \geqslant 0$

L'ensemble E_1 est un demi-espace fermé ayant pour frontière le plan d'équation $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

• **Déterminons si le point A(1 ; 1 ; 1) appartient à E_1.**

$1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 - 5 = -3$; $-3 < 0$ donc $A \notin E_1$.

• **Déterminons si le point B(0 ; – 4 ; 1) appartient à E_1.**

$0 - 2 \times (-4) + 3 \times 1 - 5 = 6$; $6 \geqslant 0$ donc $B \in E_1$.

• **Déterminons si le point C(2 ; 2 ; – 3) appartient à E_1.**

$2 - 2 \times 2 + 3 \times (-3) - 5 = -16$; $-16 < 0$ donc $C \notin E_1$.

• **Déterminons si le point D(– 3 ; 0 ; 2) appartient à E_1.**

$-3 - 2 \times 0 + 3 \times 2 - 5 = -2$; $-2 < 0$ donc $D \notin E_1$.

Autre façon de rédiger pour le point A :

On a : $x_A - 2y_A + 3z_A - 5 = 1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 - 5 = -3$

Donc $x_A - 2y_A + 3z_A - 5 < 0$.

Par suite, $A \notin E_1$.

21

$P:\ 2x-y-z+6=0$

$\mathrm{A}(-2\,;4\,;2)$

Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces ouverts caractérisés par les inéquations $2x-y-z+6>0$ et $2x-y-z+6<0$.

On ne peut préciser davantage la position des deux demi-espaces par rapport aux axes du repère.

On a : $2x_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}+6=2\times(-2)-4-2+6=-4$.

$2x_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}+6<0$ donc | le demi-espace ouvert E_1 est défini par l'inéquation $2x-y-z+6<0$.

| E_1 est le demi-espace défini par l'inéquation $2x-y-z+6<0$.

22

$P:\ 2x+y-z-2=0$

$Q:\ x+3y+7z-11=0$

Le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}(1\,;3\,;7)$ est un vecteur normal à Q.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P et Q sont sécants selon une droite Δ.

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de Δ, on considère le système $\begin{cases}2x+y-z-2=0\\x+3y+7z-11=0\end{cases}$.

Ce système est équivalent à $\begin{cases}2x+y=z+2\\x+3y=-7z+11\end{cases}$.

On pose $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$.

Les équations (1) et (2) donnent alors les équations $2x+y=t+2$ $(1')$ et $x+3y=-7t+11$ $(2')$.

On résout alors le système linéaire $\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$ de deux équations à deux inconnues avec le paramètre t.

Le déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.

On peut utiliser la méthode des multiplicateurs ou la méthode matricielle ou même appliquer directement les formules de Cramer.

$$\left\{\begin{array}{l|l|l}2x+y=t+2 & \times 3 & \times(-1)\\ x+3y=-7t+11 & \times(-1) & \times 2\end{array}\right.$$

On multiplie d'abord $(1')$ par 3 et $(2')$ par – 1 puis on additionne membre à membre les deux équations.

On multiplie ensuite $(1')$ par – 1 et $(2')$ par 2 puis on additionne membre à membre les deux équations.

$$\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=10t-5\\5y=-15t+20\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2t-1\\y=-3t+4\end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de Δ s'écrit $\begin{cases}x=2t-1\\y=-3t+4\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

On peut effectuer la résolution du système $\begin{cases}2x+y-z-2=0\\x+3y+7z-11=0\end{cases}$ directement à l'aide de la calculatrice.

Le résultat est en accord avec celui obtenu avec notre résolution.

À partir d'un système d'équations paramétriques de Δ, on peut trouver un repère de Δ.

Variante pour la résolution matricielle du système $\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$:

On écrit le système sous la forme $\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+2\\-7t+11\end{pmatrix}$.

Une autre méthode consiste à prendre x comme paramètre c'est-à-dire à poser $x=t$. On obtient alors

$$\begin{cases}x=t\\y=\dfrac{5-3t}{2}\\z=\dfrac{t+1}{2}\end{cases}.$$

y possible également.

Astuce avec la calculatrice Numworks :

Pour effectuer la résolution du système $\begin{cases}2x+y-z-2=0\\x+3y+3z-11=0\end{cases}$, on peut remplacer z par p et demander à

La calculatrice de résoudre le système $\begin{cases}2x+y-\pi-2=0\\x+3y+3\pi-11=0\end{cases}$.

On obtient l'affichage suivant : $\begin{cases}x & 2\cdot\pi-1\\y & -3\cdot\pi+4\end{cases}$.

Il correspond à $\begin{cases}x=2\pi-1\\y=-3\pi+4\end{cases}$.

Il n'y a plus qu'à remplacer z par π.

On retrouve le système d'équations paramétriques de Δ obtenu par le calcul.

23

Dans chaque cas, dire si les plans P et Q sont perpendiculaires.

1ère méthode : On utilise la propriété suivante [condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires]

$P:\ ax+by+cz+d=0 \quad \left((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\right)$

$P':\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad \left((a'\,;b'\,;c')\neq(0\,;0\,;0)\right)$

$$\boxed{P\perp P' \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0}$$

$P:\ x+y+z-1=0$ et $Q:\ -x+z+1=0$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=-1+1=0$ donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

$P:\ x+2y+3z-4=0$ et $Q:\ x-y+z-2=0$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times1+2\times(-1)+3\times1=2$ donc les plans P et Q ne sont pas perpendiculaires.

$P:\ x+2y+3z-4=0$ et $Q:\ -3y+2z-4=0$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times0+2\times(-3)+3\times2=-6+6=0$ donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

$P:\ 2x-z+1=0$ et $Q:\ x-y+z-3=0$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=2\times1+0\times(-1)+(-1)\times1=1$ donc les plans P et Q ne sont pas perpendiculaires.

$P:\ -2x+y+z+2=0$ et $Q:\ x+y+z+1=0$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=(-2)\times1+1\times1+1\times1=-2+1+1=0$ donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

2e méthode : On utilise des vecteurs normaux de chacun des plans.

$P:\ x+y+z-1=0$ et $Q:\ -x+z+1=0$

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}\,(-1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal à Q.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=-1+1=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

$P:\ x+2y+3z-4=0$ et $Q:\ x-y+z-2=0$

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}\,(1\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal à Q.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times1+2\times(-1)+3\times1=2$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux donc les plans P et Q ne sont pas perpendiculaires.

$P:\ x+2y+3z-4=0$ et $Q:\ -3y+2z-4=0$

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}\,(0\,;-3\,;2)$ est un vecteur normal à Q.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times0+2\times(-3)+3\times2=-6+6=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

$P:\ 2x-z+1=0$ et $Q:\ x-y+z-3=0$

Le vecteur $\vec{u}\,(2\,;0\,;-1)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}\,(1\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal à Q.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=2\times1+0\times(-1)+(-1)\times1=1$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux donc les plans P et Q ne sont pas perpendiculaires.

$P:\ -2x+y+z+2=0$ et $Q:\ x+y+z+1=0$

Le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;1\,;1)$ est un vecteur normal à P.

Le vecteur $\vec{v}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal à Q.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=(-2)\times1+1\times1+1\times1=-2+1+1=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

24

Règle de dédoublement des termes

$$A\left|\begin{array}{l}3\\2\\-1\end{array}\right.\qquad B\left|\begin{array}{l}5\\0\\1\end{array}\right.\qquad C\left|\begin{array}{l}0\\3\\-2\end{array}\right.$$

Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{u}$ au plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}2\\-2\\2\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}-3\\1\\-1\end{array}\right.$$

On observe qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et pas conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés.

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC), on utilise la propriété suivante du cours.

> On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.
>
> Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(yz'-zy',\,zx'-xz',\,xy'-yx')$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u}\left|\begin{array}{l}0\\-4\\-4\end{array}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En divisant les coordonnées par – 4, on peut aussi dire que le vecteur $\vec{v}\left|\begin{array}{l}0\\1\\1\end{array}\right.$ est un vecteur normal à (ABC).

En effet, tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à (ABC).

On peut vérifier directement par, calculs de produits scalaires, que ces deux vecteurs sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

25 équation du plan tangent à une sphère

Règle de dédoublement des termes

« On donne une sphère Σ et un point T. Après avoir vérifié que T appartient à la sphère Σ, »

Réponse : $3x-7y+2z+100=0$

gycham.vd.ch La sphère téléchargé le 30-3-2022

$S:\ x^2+y^2+z^2-2x-10y+6z-27=0$

$A(-2\,;12\,;-5)$

J'avais noté D 20 mars au L 21 mars 2022